UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT.

193

UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
JENA

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY
E. HECKE G. HERGLOTZ O. PERRON
W. SÜSS W. THRELFALL H. WEYL

46. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1940

QA1
M88
v.46

5456-42

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
JENA

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY
E. HECKE G. HERGLOTZ O. PERRON
W. SÜSS W. THRELFALL H. WEYL

46. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1940

66 F3279

QA1
M88
V.46

Inhalt des 46. Bandes

Seite

Aumann, G., Die Mittelpunktsverzerrung bei konvexen konformen Abbildungen 80
Avakumović, V. G., Bemerkungen über Laplacesche Integrale, deren Wachstum von Exponentialcharakter ist. I 62
Avakumović, V. G., Bemerkungen über Laplacesche Integrale, deren Wachstum von Exponentialcharakter ist. II 67
Avakumović, V. G., Über das Verhalten Dirichletscher Reihen am Rande des Konvergenzgebietes 650
Behrens, E.-A., Bestimmung der Stufe für die aus binären Thetareihen erzeugten Modulformen 350
Boerner, H., Variationsrechnung aus dem Stokesschen Satz 709
Boerner, H., Über die Legendresche Bedingung und die Feldtheorien in der Variationsrechnung der mehrfachen Integrale 720
Carathéodory, C., Über die Differentiation von Maßfunktionen 181
Collatz, L., Schrittweise Näherungen bei Integralgleichungen und Eigenwertschranken 692
Coxeter, H. S. M., Regular and semi-regular polytopes. I 380
Dinghas, A., Über positive harmonische Funktionen in einem Halbraum . . . 559
Doetsch, G., Ein Zusammenhang zwischen Randwertproblemen verschiedenen Typs 315
Fejes, L., Über einen geometrischen Satz 83
Friedgé, H., Verallgemeinerung der Dodekaederräume 27
Garten, V., Über die Beziehungen zwischen den Hölderschen und Laplace-Abelschen Mittelbildungen und den Satz von O. Hölder 86
Geppert, H., Über einige Kennzeichnungen des Kreises 117
Gericke, H., Über stützbare Flächen und ihre Entwicklung nach Kugelfunktionen 55
Gericke, H., Zur Differentialgeometrie von Flächen im n-dimensionalen euklidischen Raum. Adjungierte Extremalflächen 408
Graf, H., Räumliche Ebenennetze, deren Sechsflachzellen Inkugeln besitzen . . 591
Hadwiger, H., Über das Umordnungsproblem im Hilbertschen Raum 70
Hasse, H., Produktformeln für verallgemeinerte Gaußsche Summen und ihre Anwendung auf die Klassenzahlformel für reelle quadratische Zahlkörper 303
Herzig, A., Die Winkelderivierte und das Poisson-Stieltjes-Integral 129
Kamke, E., Über die definiten selbstadjungierten Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen. II 231
Kamke, E., Über die definiten selbstadjungierten Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen. III 251
Klein-Barmen, F., Über eine weitere Verallgemeinerung des Verbandsbegriffes 472

Seite

Kloosterman, H. D., Limitierungsumkehrsätze mit Lückenbedingungen für das C-Verfahren 375
Kneser, H., Der Fundamentalsatz der Algebra und der Intuitionismus 287
Lammel, E., Über Approximation regulärer Funktionen eines komplexen Argumentes durch rationale Funktionen 104
Lyra, G., Über den Zusammenhang einiger Reihensätze 627
Mall, J., Beitrag zur Theorie der mehrdimensionalen Padéschen Tafel 337
Meyer-König, W., Zur Frage der Umkehrung des C- und A-Verfahrens bei Doppelfolgen 157
Meyer-König, W., Abelsche Sätze für Dirichletsche Reihen 571
Perron, O., Über lückenlose Ausfüllung des n-dimensionalen Raumes durch kongruente Würfel 1
Perron, O., Über lückenlose Ausfüllung des n-dimensionalen Raumes durch kongruente Würfel. II 161
Pylarinos, O., Über die Guichardschen Strahlensysteme 45
Rellich, F., Darstellung der Eigenwerte von $\Delta u + \lambda u = 0$ durch ein Randintegral 635
Schmidt, A., Konvergente und asymptotische Darstellungen für die Lösungen linearer Differentialgleichungen, deren Koeffizienten Dirichletsche Reihen oder Exponentialpolynome mit komplexen Exponenten sind 481
Schmidt, E., Über die isoperimetrische Aufgabe im n-dimensionalen Raum konstanter negativer Krümmung. I. Die isoperimetrischen Ungleichungen in der hyperbolischen Ebene und für Rotationskörper im n-dimensionalen hyperbolischen Raum 204
Schmidt, E., Die isoperimetrischen Ungleichungen auf der gewöhnlichen Kugel und für Rotationskörper im n-dimensionalen sphärischen Raum 743
Specht, W., Klassifikation der halblinearen Transformationen 637
Sprague, R., Zur Abschätzung der Mindestzahl inkongruenter Quadrate, die ein gegebenes Rechteck ausfüllen 460
Sz. Nagy, G. v., Über die Eigenschaften der beschränkten ebenen Kurven ohne Tangentensingularität 605
Tietze, H., Über die mit Lineal und Zirkel und die mit dem rechten Zeichenwinkel lösbaren Konstruktionsaufgaben. I 190
Unkelbach, H., Über die Randverzerrung bei schlichter konformer Abbildung 329
Weise, K. H., Invariante Charakterisierung von Kurvennetzen 665

Über lückenlose Ausfüllung des n-dimensionalen Raumes durch kongruente Würfel.

Von

Oskar Perron in München.

§ 1.

Einleitung.

Für n lineare Formen

$$\xi_\nu = a_{\nu 1} x_1 + a_{\nu 2} x_2 + \ldots + a_{\nu n} x_n \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{1, 1}$$

mit reellen Koeffizienten $a_{\nu\mu}$ und der Determinante 1 gilt bekanntlich der zuerst von Minkowski bewiesene Satz, daß es ganzzahlige $x_1, \ldots, x_n$ gibt, die nicht alle verschwinden und so beschaffen sind, daß

$$|\xi_\nu| \leqq 1 \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

ist. Dabei kann man bei $n - 1$ beliebig aus den n Formen ausgewählten sogar das Kleinerzeichen erreichen. Im allgemeinen kann man sogar bei allen n Formen das Kleinerzeichen erreichen; es gibt aber auch Ausnahmen, bei denen das nicht möglich ist. Speziell das Formensystem

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1, \\ \xi_2 &= a_{21} x_1 + x_2, \\ \xi_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + x_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_n &= a_{n1} x_1 + \ldots + a_{n,n-1} x_{n-1} + x_n, \end{aligned} \tag{1, 2}$$

bei dem die Koeffizienten in der Diagonale alle gleich 1 und oberhalb der Diagonale gleich 0 sind, ist eine solche Ausnahme. Denn wenn man die Größen $|\xi_1|, \ldots, |\xi_n|$ durch ganzzahlige x_ν alle kleiner als 1 machen will, so erfordert das der Reihe nach: $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$. Selbstverständlich bildet dann auch jedes Formensystem, das durch eine lineare Transformation mit ganzzahligen Koeffizienten und der Determinante ± 1 auf die Gestalt (1, 2), abgesehen von der Reihenfolge der Formen, gebracht werden kann, eine Ausnahme. Minkowski hat *vermutet* und für $n = 2$ und $n = 3$ auch bewiesen, daß es weitere Ausnahmen nicht gibt.

Das nach der Minkowskischen Theorie der konvexen Körper vom Volumen 2^n geometrische Äquivalent zu dieser Vermutung besagt folgendes: Wenn man den n-dimensionalen Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten[1])

[1]) Die Koordinaten sind hier nur zum Zweck des besseren Anschlusses an die Formeln (1, 2) mit ξ_ν bezeichnet. Vom nächsten Paragraphen an werden sie wie üblich mit x_ν bezeichnet.

$\xi_1, \ldots, \xi_n$ lückenlos durch Einheitswürfel ausfüllen will, derart, daß die Mittelpunkte der Würfel einen n-gliedrigen Modul bilden, d. h. ein (im allgemeinen schiefwinkliges) Gitter mit einem Gitterpunkt im Nullpunkt, so haben die Koordinaten der Würfelmittelpunkte bei passender Numerierung die Gestalt (1, 2), wobei das System $x_1, \ldots, x_n$ alle Systeme ganzer Zahlen durchläuft. Diese Gestalt ist, wie man leicht sieht, *hinreichend*; die Minkowskische Vermutung sagt aus, daß sie auch *notwendig* ist.

Die erste der Gleichungen (1, 2) besagt, daß für alle Würfelmittelpunkte die erste Koordinate ξ_1 ganzzahlig ist. Die Würfel ordnen sich also in „Schichten", wobei eine Schicht aus allen Würfeln besteht, bei denen ξ_1 denselben Wert hat. Wenn es gelänge zu beweisen, daß die Lagerung der Würfel notwendig schichtenförmig sein muß, d. h. daß ein und dieselbe Koordinate (hier die erste) aller Mittelpunkte ganzzahlig sein muß, so wäre damit, da die Mittelpunkte innerhalb einer Schicht ein $(n-1)$-dimensionales Gitter bilden, die ganze Minkowskische Vermutung durch Schluß von $n-1$ auf n beweisbar; denn für $n=2$ ist sie ziemlich trivial.

Die Formeln (1, 2) besagen weiter, daß an den Würfel mit dem Mittelpunkt im Nullpunkt einer anstößt, dessen Mittelpunkt die Koordinaten $0, \ldots, 0, 1$ hat, nämlich für $x_1 = 0, \ldots, x_{n-1} = 0, x_n = 1$. Diese beiden Würfel haben also eine ganze $(n-1)$-dimensionale „Seitenfläche" miteinander gemein (in der Ebene $\xi_n = \frac{1}{2}$), und wegen der gitterförmigen Anordnung der Mittelpunkte ordnen sich die Würfel zu „Balken" (in der Literatur: Säulen; aber Säulen sollten eigentlich einen runden Querschnitt haben). Wenn es gelänge zu beweisen, daß ein Würfel notwendig eine ganze $(n-1)$-dimensionale Seitenfläche mit einem seiner Nachbarn gemein haben muß, woraus sogleich die balkenförmige Lagerung folgt, so könnte man daraus wieder, da die Balkenachsen die darauf senkrechte Koordinatenebene (hier die Ebene $\xi_n = 0$) in einem $(n-1)$-dimensionalen Gitter treffen, die ganze Minkowskische Vermutung durch Schluß von $n-1$ auf n beweisen.

Der Versuch, die Minkowskische Vermutung zu beweisen, stößt auf unerwartete Schwierigkeiten, die mit zunehmender Dimensionszahl n rasch wachsen. Die diesbezügliche Literatur ist am Ende dieser Einleitung zusammengestellt. Jedoch muß ich gestehen, daß ich in den meisten Arbeiten irgendwo an eine Stelle oder mehrere Stellen gekommen bin, wo ich dem Gedankengang des Autors nicht mehr folgen kann, so daß ich nicht recht weiß, wieweit die Sache wirklich bewiesen ist[2]). Zum Teil, aber nicht ganz, liegt das daran, daß ich vom n-dimensionalen Raum nicht die geringste anschauliche Vorstellung habe, mit der andere begabt zu sein scheinen. Herr O. H. Keller hat den fruchtbaren Gedanken gehabt, das Problem in der Weise zu

[2]) Siehe die im Literaturverzeichnis am Schluß der Einleitung beigefügten kurzen Inhaltsangaben.

verallgemeinern, daß die Forderung der gitterförmigen Anordnung der Mittelpunkte fallen gelassen und nur Lückenlosigkeit verlangt wird. Er hat dabei bewiesen — und wir werden in § 3 diesen Satz ebenfalls beweisen —, daß je zwei Würfelmittelpunkte eine ganzzahlige von 0 verschiedene Koordinatendifferenz haben müssen. Er hat dann weiter *vermutet* (später auch wieder bezweifelt), daß stets zwei Würfel da sein müssen, die eine ganze $(n-1)$-dimensionale Seitenfläche gemein haben; dagegen ist es für $n \geqq 3$ nicht nötig, daß *jeder* Würfel mit einem seiner Nachbarn eine ganze $(n-1)$-dimensionale Seitenfläche gemein hat. Wenn die Kellersche Vermutung richtig ist, so ergibt sich daraus im Falle gitterförmiger Anordnung der Mittelpunkte sofort die balkenförmige Lagerung der Würfel, also auch, wie oben bemerkt, die Richtigkeit der Minkowskischen Vermutung.

Die gegenwärtige Arbeit beschäftigt sich mit der *Kellerschen Vermutung*, und zwar wird in § 5 gezeigt, *daß für jeden festen Wert von n die Entscheidung über Richtigkeit oder Falschheit der Vermutung durch endlich viele Versuche erzwungen werden kann*, indem das Problem auf eine algebraische Aufgabe zurückgeführt wird, deren Lösung sich durch einen Prozeß mit endlich vielen Schritten ergibt. Leider ist die Zahl der Versuche sehr groß und man kann sie ganz mühelos nur für $n = 2$ (s. den Schluß des § 5) und mit etwas mehr Mühe auch noch für $n = 3$ (s. § 6) durchführen. Wie man aber etwa bei Lösung einer Schachaufgabe längst nicht alle möglichen Zugskombinationen planlos durchzuprobieren braucht, sondern sich auf einige wenige durch irgendwelche Überlegungen als aussichtsreich erkannte beschränken kann, so muß man auch hier durch zusätzliche Überlegungen danach trachten, die Zahl der Versuche einzuschränken. Durch ein solch abgekürztes Verfahren werden in § 7 noch einmal die Fälle $n = 2$ und $n = 3$ behandelt und sollen in einer anschließenden Arbeit einige weitere Werte von n behandelt werden.

Wenn die Kellersche Vermutung sich nach Anstellung der Versuche als richtig erweist, so ist damit auch die Richtigkeit der Minkowskischen Vermutung bewiesen, wie oben bemerkt. Wenn aber die Kellersche Vermutung für einen gewissen Wert von n sich als falsch herausstellt (ein solcher Wert n ist mir bis heute allerdings nicht bekannt), so kann daraus für die Minkowskische Vermutung nichts gefolgert werden.

Das erwähnte algebraische Problem, auf welches die Frage zurückgeführt wird, ist folgendes: Gegeben ist ein System algebraischer Gleichungen mit den Unbekannten $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Alle Gleichungen sind von der Gestalt

$$\prod_{i=1}^{r} (u_{r_i} - u_{u_i}) = 0,$$

wo bei den verschiedenen Gleichungen die Anzahl r der Faktoren des Produkts verschiedene Werte ($\geqq 1$) haben kann. Außerdem ist noch ein zweites System von Gleichungen gegeben, die dieselbe Gestalt haben, nur mit anderer

Gruppierung der Indizes. Gefragt wird, ob das zweite System eine Folge des ersten ist, d. h. ob jede Lösung des ersten Systems auch das zweite System befriedigt.

Es ist klar, daß diese Frage durch endlich viele Versuche entschieden werden kann[3]). Denn man kann ja alle Lösungen des ersten Systems sofort angeben; man erhält sie, indem man in jedem Produkt einen Faktor gleich 0 setzt. Die Anzahl der Lösungen ist daher, wenn man die Anzahlen der Faktoren in den einzelnen Produkten mit $r_1, r_2, \ldots, r_k$ bezeichnet, gleich $r_1 \cdot r_2 \ldots r_k$; es können aber einige dieser Lösungen einander gleich oder in anderen als Spezialfälle enthalten sein. Jede Lösung läßt sich in der Weise hinschreiben, daß die Unbekannten in mehrere Klassen von einander gleichen, im übrigen aber willkürlich bleibenden aufgeteilt sind. Dann muß lediglich für jede einzelne Lösung geprüft werden, ob in dem zweiten Gleichungssystem jedes Produkt einen Faktor enthält, bei dem Minuend und Subtrahend der gleichen Klasse angehören.

Beispielsweise ist bei dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 &= 0, \\ (u_1 - u_3)\,(u_3 - u_4) &= 0, \\ (u_1 - u_5)\,(u_2 - u_3) &= 0 \end{aligned}$$

die Anzahl der Lösungen gleich $1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$. Aber sie sind schon in den folgenden *zwei* Lösungen enthalten:

$$\text{I} \left\{ \begin{aligned} u_1 = u_2 = u_3 &= \text{willkürlich} \\ u_4 &= \text{willkürlich} \\ u_5 &= \text{willkürlich} \end{aligned} \right\} \text{drei Klassen,}$$

$$\text{II} \left\{ \begin{aligned} u_1 = u_2 = u_5 &= \text{willkürlich} \\ u_3 = u_4 &= \text{willkürlich} \end{aligned} \right\} \text{zwei Klassen.}$$

Die Lösung, die sich ergibt, wenn man in der zweiten und dritten Gleichung jeweils den ersten Faktor gleich 0 setzt, ist in I als Spezialfall enthalten (die erste und dritte Klasse sind zu einer Klasse vereinigt); ebenso die Lösung, die sich ergibt, wenn man jeweils den zweiten Faktor gleich 0 setzt (die erste und zweite Klasse sind zu einer Klasse vereinigt). Ein zweites Gleichungssystem ist dann und nur dann für beide Lösungen ebenfalls befriedigt, wenn in jedem Produkt einer der drei Faktoren

$$u_1 - u_2, \quad u_1 - u_3, \quad u_2 - u_3 \qquad \text{(wegen Lösung I)}$$

und auch einer der vier Faktoren

$$u_1 - u_2, \quad u_1 - u_5, \quad u_2 - u_5, \quad u_3 - u_4 \quad \text{(wegen Lösung II)}$$

vorkommt.

[3]) Eigentlich ist es eine Frage über Polynomideale, deren allgemeine Lösung vielleicht die modernen Algebraiker reizen könnte.

Literatur.

H. Minkowski, Geometrie der Zahlen, Leipzig 1896, § 37. — Die Minkowskische Vermutung wird für $n = 2$ bewiesen. Die dabei angekündigte Veröffentlichung eines Beweises für beliebiges n ist nicht erfolgt, weil der Beweis nicht gelungen ist.

H. Minkowski, Diophantische Approximationen, Leipzig 1907, 2. Kap., § 4 und 3. Kap., § 7. — Beweis der Minkowskischen Vermutung für $n = 2$ und $n = 3$; für allgemeines n wird die Vermutung ausgesprochen.

H. Jansen, Lückenlose Ausfüllung des R_n mit gitterförmig angeordneten n-dimensionalen Quadern. Diss. Kiel 1909. — Hier wird die Minkowskische Vermutung für $n \leqq 6$ bewiesen.

B. Levi, Un teorema del Minkowski sui sistemi di forme lineari a variabili intere. Rendiconti del circolo matematico di Palermo **31** (1911), S. 318—340. — Enthält einen mißglückten Beweisversuch der Minkowskischen Vermutung für beliebiges n (vgl. unten die erste Arbeit von Keller, S. 232).

O. H. Keller, Über die lückenlose Erfüllung des Raumes mit Würfeln. Journ. f. d. reine u. angew. Mathematik **163** (1930), S. 231—248. — Das Minkowskische Problem wird erweitert und ein wichtiger Satz für beliebiges n bewiesen (Kellerscher Satz). Einführung vieler geometrischer Begriffe, deren Definition und Handhabung mir nicht immer verständlich ist.

Th. Schmidt, Über die Zerlegung des n-dimensionalen Raumes in gitterförmig angeordnete Würfel. Diss. Greifswald 1933 = Schriften des mathematischen Seminars der Universität Berlin, Bd. 1. — Hier wird eine Reihe von Sätzen für beliebiges n aufgestellt und die Minkowskische Vermutung für $n = 7$ bestätigt; mir aber großenteils unverständlich.

O. H. Keller, Ein Satz über die lückenlose Erfüllung des 5- und 6-dimensionalen Raumes mit Würfeln. Journ. f. d. reine u. angew. Mathematik **177** (1937), S. 61—64. — Enthält einen sehr skizzenhaften mir ziemlich unverständlichen Beweis für die Richtigkeit der Kellerschen Vermutung im Falle $n = 5$ und $n = 6$. Die Minkowskische Vermutung soll damit für $n = 7$ und $n = 8$ bestätigt sein.

§ 2.

Begriff der lückenlosen Ausfüllung und einfachste Sätze.

Da unsere geometrische Anschauung des dreidimensionalen Raumes R_3 allzu leicht zu übereilten Analogieschlüssen im n-dimensionalen Raum R_n verführt, wollen wir auf schwierige geometrische Begriffe verzichten und alles arithmetisch machen; auch ganz trivial erscheinende Sätze, die gebraucht werden, sollen vorsichtshalber mit wirklichen Beweisen versehen werden. Aus der n-dimensionalen Geometrie verwenden wir lediglich die arithmetisch definierten Begriffe Punkt und Würfel, sowie den Volumenbegriff für Punktmengen, die sich aus endlich vielen Quadern zusammensetzen. Der mehrfach zu benutzende Satz, daß das Volumen einer Teilmenge nicht größer als das Volumen der ganzen Menge sein kann, ist dabei keine aus der dreidimensionalen Anschauung übernommene Analogie, sondern folgt in der allgemeinen arithmetisch begründeten Volumenlehre unmittelbar aus den elementaren Rechengesetzen, insbesondere dem distributiven Gesetz

der Multiplikation. Man vergleiche etwa: H. Minkowski, Geometrie der Zahlen, Kap. 2, oder C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, § 228—234, oder Erhard Schmidt, Über die Darstellung der Lehre vom Inhalt in der Integralrechnung. Math. Zeitschr. 12.

Definition 1. *Ein Punkt (des R_n) ist ein geordnetes System von n reellen Zahlen $x_1, \ldots, x_n$. Dabei heißt x_ν die ν-te Koordinate des Punktes.*

Definition 2. *Der Würfel (Einheitswürfel) mit dem Mittelpunkt $a_1, \ldots, a_n$ ist die Menge der Punkte $x_1, \ldots, x_n$, für welche*

$$-\tfrac{1}{2} \leqq x_\nu - a_\nu < \tfrac{1}{2} \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

ist; der Mittelpunkt eines Würfels ist offenbar eindeutig bestimmt.

Man beachte, daß wir nur einen Teil der „Randpunkte" mit zum Würfel gerechnet haben. Dadurch werden in der ganzen Arbeit lästige Ausnahmen bezüglich der Randpunkte vermieden.

Satz 1. *Zwei Würfel mit den Mittelpunkten*

$$a_1, \ldots, a_n \quad \text{und} \quad b_1, \ldots, b_n$$

haben dann und nur dann keinen Punkt gemein (sind punktfremd), wenn $\operatorname{Max}_{\nu=1}^{n} |a_\nu - b_\nu| \geqq 1$ *ist.*

Beweis. Ist $x_1, \ldots, x_n$ ein gemeinsamer Punkt, so ist für alle ν

$$-\tfrac{1}{2} \leqq x_\nu - a_\nu < \tfrac{1}{2},$$
$$-\tfrac{1}{2} \leqq x_\nu - b_\nu < \tfrac{1}{2},$$

woraus folgt $-1 < a_\nu - b_\nu < 1$, also $\operatorname{Max}_{\nu=1}^{n} |a_\nu - b_\nu| < 1$. Wenn umgekehrt diese Ungleichung gilt, so haben die Würfel den Punkt mit den Koordinaten $x_\nu = \frac{1}{2}(a_\nu + b_\nu)$ gemein; denn es ist für alle ν

$$|x_\nu - a_\nu| = \tfrac{1}{2}|b_\nu - a_\nu| < \tfrac{1}{2},$$
$$|x_\nu - b_\nu| = \tfrac{1}{2}|a_\nu - b_\nu| < \tfrac{1}{2}.$$

Definition 3. *Eine lückenlose Ausfüllung des Raumes mit Würfeln ist eine Würfelmenge derart, daß jeder Punkt genau einem Würfel angehört.*

Beispielsweise ist die Menge aller Würfel, deren Mittelpunkte ganzzahlige Koordinaten haben, eine lückenlose Ausfüllung des Raumes.

Satz 2. *Wenn man bei einer lückenlosen Ausfüllung des Raumes mit Würfeln die erste Mittelpunktskoordinate aller Würfel um dieselbe Zahl u_1, die zweite um dieselbe Zahl $u_2, \ldots$, schließlich die n-te um dieselbe Zahl u_n vermindert, so bilden die neuen Würfel wieder eine lückenlose Ausfüllung des Raumes (Parallelverschiebung).*

Beweis. Jedem Würfel W der gegebenen lückenlosen Ausfüllung wird durch die beschriebenen Koordinatenänderungen umkehrbar eindeutig ein

Würfel $\overline{W}$ der neuen Würfelmenge zugeordnet. Ist nun $c_1, \ldots, c_n$ ein beliebiger Punkt, so ist zu zeigen, daß er genau einem Würfel der neuen Menge angehört. Nun muß der Punkt

$$c_1 + u_1, \ldots, c_n + u_n$$

genau einem Würfel W der gegebenen lückenlosen Ausfüllung angehören, etwa mit dem Mittelpunkt $a_1, \ldots, a_n$. Dann gehört aber der Punkt $c_1, \ldots, c_n$ dem zugeordneten Würfel $\overline{W}$ an und keinem anderen Würfel der neuen Menge, weil die Ungleichungen

$$-\tfrac{1}{2} \leqq (c_\nu + u_\nu) - a_\nu < \tfrac{1}{2} \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

dasselbe besagen wie die Ungleichungen

$$-\tfrac{1}{2} \leqq c_\nu - (a_\nu - u_\nu) < \tfrac{1}{2} \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Satz 3. *Eine lückenlose Ausfüllung des Raumes mit Würfeln besteht aus abzählbar unendlich vielen Würfeln.*

Beweis. Ein Würfel hat das Volumen 1, eine Menge von m punktfremden Würfeln also das Volumen m. Ferner hat die Menge $\mathfrak{M}$ der Punkte, für welche

$$-g \leqq x_\nu < g \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

ist[4]), das Volumen $(2g)^n$. Würde eine lückenlose Ausfüllung nur endlich viele, etwa m Würfel enthalten, so müßte, da jeder Punkt, also insbesondere jeder Punkt der Menge $\mathfrak{M}$ einem Würfel angehört, $m \geqq (2g)^n$ sein, was aber für genügend großes g falsch ist. Es sind also unendlich viele Würfel. Andererseits kann die Menge $\mathfrak{M}$, da sie das Volumen $(2g)^n$ hat, nur endlich viele, nämlich höchstens $(2g)^n$ Würfel einer lückenlosen Ausfüllung enthalten. Man kann also die Würfel, indem man für g der Reihe nach etwa die Werte $10, 10^2, 10^3, \ldots$ wählt, abzählen. W. z. b. w.

Wir denken uns jetzt eine lückenlose Ausfüllung des Raumes gegeben. Sie besteht aus abzählbar unendlich vielen Würfeln $W_1, W_2, \ldots$ Der Mittelpunkt des Würfels W_k sei $a_{k1}, \ldots, a_{kn}$. Dann gelten die folgenden Sätze:

Satz 4. *Für $k \neq l$ ist* $\max_{\nu=1}^{n} |a_{k\nu} - a_{l\nu}| \geqq 1$.

Satz 5. *Zu jedem Punkt $c_1, \ldots, c_n$ gibt es genau einen Würfel W_k derart, daß $c_\nu \leqq a_{k\nu} < c_\nu + 1$ ist für $\nu = 1, \ldots, n$. — Allgemeiner gibt es, wenn man die Koordinatenindizes ν irgendwie in zwei Klassen teilt, von denen die eine auch leer sein kann, genau einen Würfel W_k derart, daß*

$$c_\nu \leqq a_{k\nu} < c_\nu + 1 \text{ für die } \nu \text{ der ersten Klasse,}$$
$$c_\nu < a_{k\nu} \leqq c_\nu + 1 \text{ für die } \nu \text{ der zweiten Klasse ist.}$$

---

[4]) Wir vermeiden für diese Menge das sonst übliche Wort Würfel, weil wir diesen Namen für die speziellen in Definition 2 definierten Würfel reserviert haben.

Satz 6. *Unter den Punkten* $[a_{k1}], \ldots, [a_{kn}]$ *kommt jeder Gitterpunkt, d. h. Punkt mit ganzzahligen Koordinaten, genau einmal vor*[5]).

Beweis zu Satz 4. Folgt unmittelbar aus Satz 1.

Beweis zu Satz 5. Wir beweisen die zweite (allgemeinere) Aussage. Aus Satz 4 folgt sofort, daß es *höchstens einen* solchen Würfel gibt. Daß es wirklich einen gibt, erkennt man folgendermaßen: Sei ε eine positive Zahl. Für den Punkt mit den Koordinaten

$$x_\nu = c_\nu + \tfrac{1}{2} \mp \varepsilon \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

wobei das obere oder untere Vorzeichen gelten soll, je nachdem der Index ν der ersten oder zweiten Klasse angehört, muß es definitionsgemäß ein k geben, so daß

$$-\tfrac{1}{2} \leqq x_\nu - a_{k\nu} < \tfrac{1}{2},$$

also

$$c_\nu - \varepsilon < a_{k\nu} \leqq c_\nu + 1 - \varepsilon < c_\nu + 1 \text{ für die } \nu \text{ der ersten Klasse,}$$

$$c_\nu < c_\nu + \varepsilon < a_{k\nu} \leqq c_\nu + 1 + \varepsilon \text{ für die } \nu \text{ der zweiten Klasse}$$

ist. Läßt man hier ε eine nach 0 abnehmende Folge durchlaufen, so muß unendlich oft dasselbe k kommen, weil in der Punktmenge

$$c_\nu - 1 < x_\nu < c_\nu + 2 \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

nur endlich viele Würfel W_k enthalten sein können (wieder aus Volumgründen). Für dieses k sind dann die in Satz 5 behaupteten Ungleichungen erfüllt.

Beweis zu Satz 6. Man hat nur nötig, in Satz 5 für $c_1, \ldots, c_n$ einen beliebigen Gitterpunkt zu wählen.

§ 3.

Der Kellersche Satz.

In diesem Paragraphen seien wiederum $W_1, W_2, \ldots$ die Würfel einer lückenlosen Ausfüllung des Raumes und sei $a_{k1}, \ldots, a_{kn}$ der Mittelpunkt von W_k. Dann gilt weiter

Satz 7. *Wenn bei zwei Würfeln* W_p *und* W_q *(wobei* $p \neq q$ *oder auch* $p = q$ *sein darf) für* $n - 1$ *Indizes* ν *die Ungleichung*

$$|a_{p\nu} - a_{q\nu}| < 1$$

gilt, so ist für den fehlenden Index ν *notwendig* $a_{p\nu} - a_{q\nu}$ *eine ganze Zahl, für* $p \neq q$ *also nach Satz 4 absolut* $\geqq 1$[6]).

---

[5]) $[a]$ bedeutet hier wie üblich die größte in a enthaltene ganze Zahl.

[6]) Der triviale Fall $p = q$ hat natürlich kein Interesse. Wir haben ihn aber bei der Formulierung des Satzes mitberücksichtigt, weil wir beim Beweis eine Induktionsannahme machen werden, deren Anfangsglied gerade der Fall $p = q$ ist.

Beweis. Da es auf die Numerierung der Koordinaten nicht ankommt, dürfen wir

(3, 1) $$|a_{p\nu} - a_{q\nu}| < 1 \qquad \text{für } \nu = 1, \ldots, n-1$$

voraussetzen; ferner auch, da p und q ihre Rolle tauschen können, $a_{pn} \geqq a_{qn}$. Bezeichnen wir dann die größte in $a_{pn} - a_{qn}$ enthaltene ganze Zahl mit g und setzen

(3, 2) $$a_{pn} - a_{qn} = g + \alpha \qquad (0 \leqq \alpha < 1),$$

so ist $g \geqq 0$, und wir haben zu beweisen, daß $a_{pn} - a_{qn}$ ganzzahlig, d. h. daß $\alpha = 0$ ist.

Im Falle $g = 0$ muß nach Satz 4 notwendig $p = q$ sein, und dann ist nach (3, 2) auch $\alpha = 0$, womit dieser Fall erledigt ist. Wir machen daher die Induktionsannahme, für $g - 1$ $(\geqq 0)$ an Stelle von g sei die Sache schon bewiesen. Nach Satz 5 gibt es einen Würfel W_k derart, daß

(3, 3) $$\begin{cases} a_{q\nu} \leqq a_{k\nu} < a_{q\nu} + 1 \text{ für diejenigen } \nu \leqq n-1, \text{ für die } a_{p\nu} \geqq a_{q\nu}, \\ a_{q\nu} - 1 < a_{k\nu} \leqq a_{q\nu} \text{ für diejenigen } \nu \leqq n-1, \text{ für die } a_{p\nu} < a_{q\nu}, \end{cases}$$

(3, 4) $$a_{qn} + g - 1 \leqq a_{kn} < a_{qn} + g$$

ist. Nach (3, 3) ist dann $|a_{k\nu} - a_{q\nu}| < 1$ für $\nu = 1, \ldots, n-1$; daher nach (3, 4) und nach der Induktionsannahme $a_{kn} - a_{qn}$ ganzzahlig, und zwar

(3, 5) $$a_{kn} - a_{qn} = g - 1.$$

Ferner ist nach (3, 1) und (3, 3)

(3, 6) $$|a_{p\nu} - a_{k\nu}| < 1 \qquad \text{für } \nu = 1, \ldots, n-1$$

und nach (3, 5) und (3, 2)

(3, 7) $$a_{pn} - a_{kn} = a_{pn} - a_{qn} - g + 1 = 1 + \alpha.$$

Nun betrachten wir den Punkt mit den Koordinaten

(3, 8) $$x_\nu = \tfrac{1}{2}(a_{p\nu} + a_{k\nu}) \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1),$$

(3, 9) $$x_n = a_{kn} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\alpha = a_{pn} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\alpha \qquad \text{(nach (3, 7))}.$$

Dieser muß einem Würfel W_l angehören, so daß

(3, 10) $$-\tfrac{1}{2} \leqq x_\nu - a_{l\nu} < \tfrac{1}{2} \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

ist. Dann ist mit Rücksicht auf (3, 9)

(3, 11) $$\begin{cases} x_n - a_{ln} < \tfrac{1}{2} \leqq \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\alpha = x_n - a_{kn}, \\ x_n - a_{ln} \geqq -\tfrac{1}{2} \geqq -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\alpha = x_n - a_{pn}, \end{cases}$$

und hieraus folgt

(3, 12) $$a_{kn} < a_{ln} \leqq a_{pn}.$$

Nun ist mit Rücksicht auf (3, 8), (3, 6) und (3, 10)

$$\left.\begin{aligned} |a_{p\nu} - a_{l\nu}| &\leqq |a_{p\nu} - x_\nu| + |x_\nu - a_{l\nu}| < 1 \\ |a_{k\nu} - a_{l\nu}| &\leqq |a_{k\nu} - x_\nu| + |x_\nu - a_{l\nu}| < 1 \end{aligned}\right\} \quad \text{für } \nu = 1, \ldots, n-1.$$

Außerdem wegen (3, 12) und (3, 7)

$$\text{Min}\,(|a_{pn} - a_{ln}|,\ |a_{kn} - a_{ln}|) \leqq \tfrac{1}{2}\,(a_{pn} - a_{kn}) = \tfrac{1}{2}\,(1 + \alpha) < 1.$$

Nach Satz 4 ist daher W_l mit W_p oder W_k identisch. Aber $l = k$ ist nach (3, 12) ausgeschlossen, also ist $l = p$. Daher müssen in der zweiten Zeile von (3, 11) lauter Gleichheitszeichen stehen. woraus insbesondere folgt: $\alpha = 0$. W. z. b. w.

Satz 8. *Teilt man die Würfel $W_1, W_2, \ldots$ einer lückenlosen Ausfüllung des Raumes in zwei Klassen $W_1', W_2', \ldots$ und $W_1'', W_2'', \ldots$, wobei die eine Klasse auch eine endliche oder sogar leere Menge sein darf, bezeichnet man den Mittelpunkt von W_k' bzw. W_l'' mit*

$$a_{k1}', \ldots, a_{kn}' \quad \text{bzw.} \quad a_{l1}'', \ldots, a_{ln}''$$

und ist die Klasseneinteilung derart, daß die erste Koordinate bei allen Würfeln W_k' zu ein- und derselben Zahl a nach dem Modul 1 kongruent ist, während das für die Würfel W_l'' nicht gilt, d. h.

$$a_{k1}' \equiv a \pmod 1 \qquad \text{für alle } k,$$
$$a_{l1}'' \not\equiv a \pmod 1 \qquad \text{für alle } l,$$

so bilden, wenn c eine beliebige Zahl bedeutet, die Würfel $\overline{W}_k'$ und $\overline{W}_l''$ mit den Mittelpunkten

$$a_{k1}' - c, a_{k2}, \ldots, a_{kn} \quad \text{bzw.} \quad a_{l1}'', a_{l2}'', \ldots, a_{ln}'$$

zusammen ebenfalls eine lückenlose Ausfüllung des Raumes.

Zusatz. *Die Sonderrolle, die hier die erste Koordinate spielt, kann natürlich auch von jeder anderen Koordinate übernommen werden.*

Beweis. Wir zeigen erstens, daß keine zwei der neuen Würfel einen Punkt gemein haben. Nun können zwei Würfel $\overline{W}_l''$ und $\overline{W}_m''$ gewiß keinen Punkt gemein haben, weil das ja die alten Würfel W_l'' und W_m'' sind. Ebenso können zwei Würfel $\overline{W}_k'$ und $\overline{W}_j'$ keinen Punkt $x_1, \ldots, x_n$ gemein haben; sonst wäre

$$-\tfrac{1}{2} \leqq x_1 - (a_{k1}' - c) < \tfrac{1}{2}, \quad -\tfrac{1}{2} \leqq x_\nu - a_{k\nu}' < \tfrac{1}{2} \qquad (\nu = 2, \ldots, n),$$
$$-\tfrac{1}{2} \leqq x_1 - (a_{j1}' - c) < \tfrac{1}{2}, \quad -\tfrac{1}{2} \leqq x_\nu - a_{j\nu}' < \tfrac{1}{2} \qquad (\nu = 2, \ldots, n),$$

woraus folgen würde, daß auch die Würfel W_k' und W_j' einen Punkt, nämlich den Punkt

$$x_1 + c, x_2, \ldots, x_n$$

gemein hätten. Schließlich kann aber auch ein Würfel $\overline{W}_k'$ mit einem $\overline{W}_l''$ keinen Punkt $x_1, \ldots, x_n$ gemein haben. Andernfalls wäre nämlich

$$-\tfrac{1}{2} \leqq x_1 - (a_{k1}' - c) < \tfrac{1}{2}, \quad -\tfrac{1}{2} \leqq x_\nu - a_{k\nu}' < \tfrac{1}{2} \qquad (\nu = 2, \ldots, n),$$
$$-\tfrac{1}{2} \leqq x_1 - a_{l1}'' < \tfrac{1}{2}, \quad -\tfrac{1}{2} \leqq x_\nu - a_{l\nu}'' < \tfrac{1}{2} \qquad (\nu = 2, \ldots, n).$$

Hieraus würde insbesondere folgen:

$$|a''_{l\nu} - a'_{k\nu}| < 1 \qquad (\nu = 2, \ldots, n),$$

so daß $a''_{l1} - a'_{k1}$ nach Satz 7 ganzzahlig sein müßte, also

$$a''_{l1} \equiv a'_{k1} \pmod 1.$$

entgegen der Voraussetzung.

Wir beweisen zweitens, daß jeder beliebige Punkt $x_1, \ldots, x_n$ einem der neuen Würfel angehört. Gehört er etwa einem alten Würfel W''_l an, so ist nichts zu beweisen, weil das zugleich der neue Würfel $\overline{W}''_l$ ist. Wir nehmen also an, der Punkt gehört keinem Würfel W''_l an; dann muß er einem W'_k angehören, es ist also

$$(3, 13) \qquad -\tfrac{1}{2} \leqq x_\nu - a'_{k\nu} < \tfrac{1}{2} \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Nun muß aber auch der Punkt $x_1 + c, x_2, \ldots, x_n$ einem der alten Würfel, also entweder einem W'_j oder einem W''_l angehören. Im ersten Fall ist

$$-\tfrac{1}{2} \leqq x_1 + c - a'_{j1} < \tfrac{1}{2},$$

$$-\tfrac{1}{2} \leqq x_\nu - a'_{j\nu} < \tfrac{1}{2} \qquad (\nu = 2, \ldots, n),$$

was aber besagt, daß der Punkt $x_1, \ldots, x_n$ dem Würfel mit dem Mittelpunkt $a'_{j1} - c, a'_{j2}, \ldots, a'_{jn}$, also dem Würfel $\overline{W}'_j$ angehört, womit dieser Fall erledigt ist. Im zweiten Fall ist

$$-\tfrac{1}{2} \leqq x_1 + c - a''_{l1} < \tfrac{1}{2},$$

$$-\tfrac{1}{2} \leqq x_\nu - a''_{l\nu} < \tfrac{1}{2} \qquad (\nu = 2, \ldots, n),$$

also wegen (3. 13) insbesondere

$$|a''_{l\nu} - a'_{k\nu}| < 1 \qquad (\nu = 2, \ldots, n).$$

Hieraus folgt aber nach Satz 7, daß $a''_{l1} - a'_{k1}$ ganzzahlig sein muß, entgegen der Voraussetzung; dieser zweite Fall kann also gar nicht eintreten.

Satz 9 (Kellerscher Satz). *Die Mittelpunkte von zwei verschiedenen Würfeln einer lückenlosen Ausfüllung des Raumes haben wenigstens eine ganzzahlige von 0 verschiedene Koordinatendifferenz.*

Beweis. Der Satz ist nach Satz 7 richtig für zwei Würfel, bei denen $n - 1$ Koordinatendifferenzen absolut < 1 sind. Wir wollen daher die Induktionsannahme machen, er gelte bereits, wenn $n - p$ ($\geqq 1$) Koordinatendifferenzen absolut < 1 sind, und betrachten zwei Würfel W_k und W_l, bei denen nur $n - p - 1$ Koordinatendifferenzen absolut < 1, also $p + 1$ Koordinatendifferenzen absolut $\geqq 1$ sind. Mit unserer seitherigen

Bezeichnungsweise ist also etwa, da es auf die Numerierung der Koordinaten nicht ankommt:

$$|a_{k1} - a_{l1}| \geqq 1, \ldots, |a_{k,\,p+1} - a_{l,\,p+1}| \geqq 1,$$
$$|a_{k,\,p+2} - a_{l,\,p+2}| < 1, \ldots, |a_{kn} - a_{ln}| < 1;$$

für $p + 1 = n$ fällt die zweite Zeile natürlich weg.

Wenn nun $a_{k1} - a_{l1}$ ganzzahlig, so ist nichts mehr zu beweisen. Wenn aber $a_{k1} - a_{l1}$ nicht ganzzahlig, dann gehen wir auf Grund von Satz 8 zu einer zweiten lückenlosen Ausfüllung des Raumes über, indem wir bei allen Würfelmittelpunkten, deren erste Koordinate $\equiv a_{k1} \pmod 1$ und folglich $\not\equiv a_{l1} \pmod 1$ ist, diese Koordinate um die Zahl $c = a_{k1} - a_{l1}$ verkleinern. Dieser Ausfüllung gehören insbesondere die beiden Würfel mit den Mittelpunkten

$$a_{k1} - (a_{k1} - a_{l1}),\ a_{k2}, \ldots, a_{kn}$$

und

$$a_{l1},\ a_{l2}, \ldots, a_{ln}$$

an. Bei diesen sind aber $n - p$ Koordinatendifferenzen absolut < 1 und nur p sind absolut $\geqq 1$, nämlich

$$|a_{k2} - a_{l2}| \geqq 1, \ \ldots, \ |a_{k,\,p+1} - a_{l,\,p+1}| \geqq 1.$$

Nach der Induktionsannahme ist daher eine dieser p Zahlen ganz, womit Satz 9 bewiesen ist.

§ 4.

Konglomerate.

Definition 4. *Eine Menge von 2^n Würfeln mit den Mittelpunkten*

(4, 1) $$k_1 + \varphi^1_{k_1 k_2 \ldots k_n},\ k_2 + \varphi^2_{k_1 k_2 \ldots k_n},\ \ldots,\ k_n + \varphi^n_{k_1 k_2 \ldots k_n},$$

wobei die k_ν unabhängig voneinander die Werte 0 und 1 annehmen und wobei

(4, 2) $$0 \leqq \varphi^\nu_{k_1 k_2 \ldots k_n} < 1$$

ist, heißt ein Konglomerat, wenn die Mittelpunkte von je zwei Würfeln wenigstens eine ganzzahlige von 0 verschiedene Koordinatendifferenz haben. Die oberen Indizes bei den φ bedeuten natürlich keine Exponenten.

Aus Satz 1 folgt, daß zwei verschiedene Würfel eines Konglomerats punktfremd sind. Ferner kann wegen (4, 2) und, weil für die k_ν nur die Werte 0 und 1 zulässig sind, eine ganzzahlige von 0 verschiedene Koordinatendifferenz nur gleich ± 1 sein, und zwar ist bei den zwei Würfelmittelpunkten

$$k_1 + \varphi^1_{k_1 \ldots k_n},\ \ldots,\ k_n + \varphi^n_{k_1 \ldots k_n}$$

und

$$l_1 + \varphi^1_{l_1 \ldots l_n},\ \ldots,\ l_n + \varphi^n_{l_1 \ldots l_n}$$

offenbar dann und nur dann wenigstens eine Koordinatendifferenz gleich ± 1, wenn die Differenz

$$\varphi^{\nu}_{k_1 \dots k_n} - \varphi^{\nu}_{l_1 \dots l_n}$$

für wenigstens einen derjenigen Werte ν, für die $k_\nu \neq l_\nu$, also $|k_\nu - l_\nu| = 1$ ist, verschwindet, oder, was dasselbe sagt, wenn

$$\prod_{\nu} (\varphi^{\nu}_{k_1 \dots k_n} - \varphi^{\nu}_{l_1 \dots l_n}) = 0 \tag{4,3}$$

ist, wobei das Produkt über diejenigen Indizes ν erstreckt wird, für welche $k_\nu \neq l_\nu$ ist. Somit ergibt sich

Satz 10. *Die 2^n Würfel mit den Mittelpunkten* (4, 1), *wobei die k_ν unabhängig voneinander die Werte* 0 *und* 1 *annehmen und wobei die Ungleichungen* (4, 2) *gelten, bilden dann und nur dann ein Konglomerat, wenn die $n \cdot 2^n$ Größen $\varphi^{\nu}_{k_1 \dots k_n}$ dem Gleichungssystem* (4, 3) *genügen.*

Die Anzahl der Gleichungen des Systems (4, 3) ist gleich $2^{n-1}(2^n - 1)$, wenn die beiden Gleichungen

$$\prod_{\nu} (\varphi^{\nu}_{k_1 \dots k_n} - \varphi^{\nu}_{l_1 \dots l_n}) = 0 \quad \text{und} \quad \prod_{\nu} (\varphi^{\nu}_{l_1 \dots l_n} - \varphi^{\nu}_{k_1 \dots k_n}) = 0$$

als nicht verschieden angesehen werden. Das Gleichungssystem ist genau von der in der Einleitung beschriebenen Art. Für $n = 2$ sind es z. B. die folgenden sechs Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\varphi^1_{00} - \varphi^1_{10} &= 0,\\
\varphi^2_{00} - \varphi^2_{01} &= 0,\\
(\varphi^1_{00} - \varphi^1_{11})\,(\varphi^2_{00} - \varphi^2_{11}) &= 0,\\
(\varphi^1_{10} - \varphi^1_{01})\,(\varphi^2_{10} - \varphi^2_{01}) &= 0,\\
\varphi^2_{10} - \varphi^2_{11} &= 0,\\
\varphi^1_{01} - \varphi^1_{11} &= 0.
\end{aligned}$$

Sie haben zwei Lösungen, nämlich:

$$\text{I} \left\{ \begin{aligned} \varphi^1_{00} = \varphi^1_{10} = \varphi^1_{01} = \varphi^1_{11} &= \text{willkürlich},\\ \varphi^2_{00} = \varphi^2_{01} &= \text{willkürlich},\\ \varphi^2_{10} = \varphi^2_{11} &= \text{willkürlich}; \end{aligned} \right.$$

$$\text{II} \left\{ \begin{aligned} \varphi^1_{00} = \varphi^1_{10} &= \text{willkürlich},\\ \varphi^1_{01} = \varphi^1_{11} &= \text{willkürlich},\\ \varphi^2_{00} = \varphi^2_{01} = \varphi^2_{10} = \varphi^2_{11} &= \text{willkürlich}. \end{aligned} \right.$$

Bei einer lückenlosen Ausfüllung des Raumes mit Würfeln lassen sich die Koordinaten sämtlicher Würfelmittelpunkte, wie unmittelbar aus Satz 6 ersichtlich, in die Gestalt (4, 1) setzen, wobei aber jetzt das System $k_1, \dots, k_n$ *alle* Systeme ganzer Zahlen durchläuft und wobei wieder die Ungleichungen (4, 2) gelten. Wenn man von diesen unendlich vielen Würfeln diejenigen

2^n Würfel herausgreift, für welche die k_ν nur die Werte 0 und 1 haben, so folgt unmittelbar aus Satz 9, daß sie ein Konglomerat bilden. Es gilt also der

Satz 11. *Bei einer lückenlosen Ausfüllung des Raumes mit Würfeln bilden diejenigen nach Satz 6 eindeutig vorhandenen 2^n Würfel, deren Mittelpunkte die folgenden sind:*

$$k_1 + \varphi^1_{k_1 \dots k_n},\ k_2 + \varphi^2_{k_1 \dots k_n},\ \dots,\ k_n + \varphi^n_{k_1 \dots k_n}$$
$$(k_\nu = 0 \text{ oder } 1;\quad 0 \leqq \varphi^\nu_{k_1 \dots k_n} < 1),$$

ein Konglomerat.

Von größter Wichtigkeit ist nun, daß dieser Satz sich in folgender Weise umkehren läßt:

Satz 12. *Ein Konglomerat kann stets durch Hinzufügung von Würfeln zu einer lückenlosen Ausfüllung des Raumes ergänzt werden* [7]).

Zum Beweis betrachten wir neben dem Konglomerat (4, 1), wobei also die k_ν auf die Werte 0 und 1 beschränkt sind und wobei die Ungleichungen (4, 2) und die Gleichungen (4, 3) gelten, noch die Menge der Würfel, deren Mittelpunkte die folgenden sind:

$$(4,4) \qquad p_1 + \varphi^1_{p_1' \dots p_n'},\ p_2 + \varphi^2_{p_1' \dots p_n'},\ \dots,\ p_n + \varphi^n_{p_1' \dots p_n'}.$$

Dabei sind unter dem System $p_1, \dots, p_n$ alle Systeme ganzer Zahlen zu verstehen, und p_ν' bedeutet den kleinsten nicht negativen Rest von p_ν nach dem Modul 2, also $p_\nu' = 0$ oder 1. Unter den Würfeln dieser Menge sind die des Konglomerats (4, 1) dabei, nämlich für $p_\nu = 0$ oder 1. Die Menge ent-

---

[7]) Die Vermutung, daß etwa jede Würfelmenge, bei der je zwei Mittelpunkte wenigstens eine ganzzahlige von 0 verschiedene Koordinatendifferenz haben, sich zu einer lückenlosen Ausfüllung des Raumes ergänzen läßt, ist, wie bereits Herr Keller bemerkt hat, für $n > 3$ falsch. Betrachten wir z. B. die vier Würfel mit den Mittelpunkten

$$\begin{array}{lccccccc} \text{I:} & 0, & 0, & 0, & 0, & \dots, & 0, \\ \text{II:} & 1, & \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & 0, & \dots, & 0, \\ \text{III:} & -\frac{1}{2}, & 1, & \frac{1}{2}, & 0, & \dots, & 0, \\ \text{IV:} & \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & 1, & 0, & \dots, & 0, \end{array}$$

so haben je zwei Mittelpunkte eine Koordinatendifferenz, die gleich ± 1 ist. Würden sie sich zu einer lückenlosen Ausfüllung ergänzen lassen, so müßte unter den Würfeln dieser Ausfüllung nach Satz 5 auch einer sein, dessen Mittelpunktskoordinaten die Gestalt

$$\text{V:}\ \tfrac{1}{2} + \alpha_1,\ \tfrac{1}{2} + \alpha_2,\ \tfrac{1}{2} + \alpha_3,\ \alpha_4,\ \dots,\ \alpha_n$$

haben, wobei $0 \leqq \alpha_\nu < 1$ ist. Damit bei II und V eine ganzzahlige von 0 verschiedene Koordinatendifferenz vorhanden ist, was ja nach Satz 9 der Fall sein muß, muß $\alpha_3 = 0$ sein. Ebenso folgt aus III und V: $\alpha_1 = 0$, und aus IV und V: $\alpha_2 = 0$. Analog folgt aber aus I und V, daß eine der drei Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ gleich $\frac{1}{2}$ sein muß; Widerspruch.

steht also aus dem Konglomerat (4, 1) durch Hinzufügung von Würfeln. Wir zeigen, daß sie eine lückenlose Ausfüllung des Raumes bildet.

Zunächst ist leicht zu sehen, daß die Mittelpunkte von je zwei verschiedenen Würfeln wenigstens eine Koordinatendifferenz haben, die absolut $\geqq 1$ ist, so daß die betreffenden Würfel nach Satz 1 punktfremd sind. Denn wenn wir annehmen, daß einmal

$$\max_{\nu=1}^{n} |(p_\nu + \varphi^{\nu}_{p_1' \dots p_n'}) - (q_\nu + \varphi^{\nu}_{q_1' \dots q_n'})| < 1$$

ist, so muß wegen (4, 2) gewiß

$$\max_{\nu=1}^{n} |p_\nu - q_\nu| \leqq 1$$

sein. Da es sich um zwei verschiedene Würfel handelt, ist also für einige Werte ν (mindestens für einen) $|p_\nu - q_\nu| = 1$ und für die anderen ν ist $p_\nu = q_\nu$. Für die erstgenannten Werte ν ist daher auch $|p_\nu' - q_\nu'| = 1$ und für die anderen ν ist $p_\nu' = q_\nu'$. Für wenigstens einen der erstgenannten Werte ν ist dann nach (4, 3)

$$\varphi^{\nu}_{p_1' \dots p_n'} - \varphi^{\nu}_{q_1' \dots q_n'} = 0$$

und folglich

$$|(p_\nu + \varphi^{\nu}_{p_1' \dots p_n'}) - (q_\nu + \varphi^{\nu}_{q_1' \dots q_n'})| = |p_\nu - q_\nu| = 1,$$

entgegen unserer Annahme.

Jetzt ist noch zu zeigen, daß jeder beliebige Punkt $c_1, \dots, c_n$ einem der Würfel mit den Mittelpunkten (4, 4) angehört. Diesen Beweis führen wir durch eine Volumbetrachtung von spezifisch Minkowskischer Art. Wir nehmen an, der Punkt $c_1, \dots, c_n$ gehöre keinem der genannten Würfel an, und setzen

$$\max_{\nu=1}^{n} |c_\nu| + 1 = C.$$

Nun betrachten wir von unserer Würfelmenge (4, 4) einmal die endliche Teilmenge derjenigen Würfel, deren sämtliche Mittelpunktskoordinaten absolut $\leqq C$ sind. Das seien die m Würfel $W_1, \dots, W_m$, und die Mittelpunktskoordinaten von W_k bezeichnen wir zur Abkürzung mit $a_{k1}, \dots, a_{kn}$. Da der Punkt $c_1, \dots, c_n$ insbesondere keinem der Würfel $W_1, \dots, W_m$ angehört, so ist für jeden der Werte $k = 1, \dots, m$ wenigstens eine der $2n$ Ungleichungen

$$-\tfrac{1}{2} \leqq c_1 - a_{k1} < \tfrac{1}{2}, \quad -\tfrac{1}{2} \leqq c_2 - a_{k2} < \tfrac{1}{2}, \dots, \quad -\tfrac{1}{2} \leqq c_n - a_{kn} < \tfrac{1}{2}$$

falsch. Dann gibt es aber offenbar eine positive Zahl ϱ, die wir $< \frac{1}{2}$ annehmen dürfen, derart, daß alle Punkte $x_1, \dots, x_n$ des Bereichs

(4, 5) $\quad c_1 \leqq x_1 < c_1 + \varrho, \quad c_2 \leqq x_2 < c_2 + \varrho, \dots, \quad c_n \leqq x_n < c_n + \varrho$

die analoge Eigenschaft haben, daß nämlich für jeden der Werte $k = 1, \ldots, m$ wenigstens eine der $2n$ Ungleichungen

$$-\tfrac{1}{2} \leqq x_1 - a_{k1} < \tfrac{1}{2}, \quad -\tfrac{1}{2} \leqq x_2 - a_{k2} < \tfrac{1}{2}, \ldots, \quad -\tfrac{1}{2} \leqq x_n - a_{kn} < \tfrac{1}{2}$$

falsch ist. Ein Punkt des Bereichs (4, 5) gehört also keinem der Würfel $W_1, \ldots, W_m$ an. Er gehört aber auch keinem der unendlich vielen anderen Würfel mit den Mittelpunkten (4, 4) an. Denn für diese ist wenigstens eine Mittelpunkskoordinate absolut größer als C; diese Würfel enthalten also nur Punkte, von denen wenigstens eine Koordinate absolut größer als $C - \frac{1}{2}$ ist, während die Punkte des Bereichs (4, 5) lauter Koordinaten haben, deren Absolutwerte

$$\leqq \operatorname*{Max}_{\nu=1}^{n} |c_\nu| + \varrho = C - 1 + \varrho < C - \tfrac{1}{2}$$

sind.

Hiernach besteht der ganze Bereich (4, 5), dessen Volumen gleich ϱ^n ist, aus lauter Punkten, die keinem der Würfel mit den Mittelpunkten (4, 4) angehören. Dasselbe gilt dann aber offenbar auch für alle zum Bereich (4, 5) nach dem Modul 2 kongruenten Bereiche, d. h. für alle Bereiche der Form

$$(4, 6) \quad c_1 + 2g_1 \leqq x_1 < c_1 + 2g_1 + \varrho, \ldots, c_n + 2g_n \leqq x_n < c_n + 2g_n + \varrho,$$

wo die g_ν irgendwelche ganze Zahlen sind, und von diesen Bereichen, die alle das Volumen ϱ^n haben, sind je zwei offenbar punktfremd (wegen $\varrho < \frac{1}{2} < 2$).

Nun betrachten wir den Bereich

$$-\tfrac{1}{2} \leqq x_\nu < 2G + \tfrac{3}{2} \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

dessen Volumen gleich $(2G + 2)^n$ ist; G sei dabei eine große ganze Zahl. Dieser Bereich umfaßt mindestens $(2G + 1)^n$ von den Würfeln mit den Mittelpunkten (4, 4), nämlich die für $p_\nu = 0, 1, \ldots, 2G$ entstehenden. Er umfaßt aber außerdem noch mindestens G^n von den Bereichen (4, 6), nämlich diejenigen, für welche die ganzen Zahlen g_ν den Ungleichungen

$$-\tfrac{1}{2} \leqq c_\nu + 2g_\nu < 2G - \tfrac{1}{2}$$

genügen, was für jedes g_ν genau G Möglichkeiten, für das System $g_1, \ldots, g_n$ also G^n Möglichkeiten liefert.

Aus Volumgründen ist hiernach

$$(2G + 2)^n \geqq (2G + 1)^n \cdot 1 + G^n \cdot \varrho^n.$$

Das ist aber für genügend großes G falsch, so daß unsere Annahme sich als widerspruchsvoll erweist.

§ 5.

Die Kellersche Vermutung.

Definition 5. *Zwei Würfel, bei denen eine Mittelpunktskoordinatendifferenz gleich* ± 1 *ist und die* $n-1$ *anderen gleich* 0 *sind, heißen ein Zwillingspaar.*

Kellersche Vermutung. *Unter den Würfeln einer lückenlosen Ausfüllung des Raumes gibt es wenigstens ein Zwillingspaar.*

Wir stellen dieser Vermutung die folgende an die Seite:

Vermutung Ko. *Unter den* 2^n *Würfeln eines Konglomerats gibt es wenigstens ein Zwillingspaar.*

Das Merkwürdige ist nun, daß diese beiden Vermutungen, von denen die eine sich auf unendlich viele, die andere nur auf endlich viele Würfel bezieht, gleichwertig sind. Es gilt nämlich der

Satz 13. *Wenn die Vermutung Ko zutrifft, so trifft auch die Kellersche Vermutung zu und umgekehrt.*

Beweis. Wenn die Vermutung Ko zutrifft, so trifft, weil nach Satz 11 unter den Würfeln einer lückenlosen Ausfüllung des Raumes stets 2^n Würfel sich finden, die ein Konglomerat bilden, gewiß auch die Keilersche Vermutung zu. Um auch die Umkehrung zu beweisen, nehmen wir an, es gebe ein Konglomerat, bei dem die Vermutung Ko nicht zutrifft; das Konglomerat (4, 1) möge diese Eigenschaft haben, also kein Zwillingspaar enthalten. Wir müssen zeigen, daß es dann auch eine lückenlose Ausfüllung des Raumes gibt, die ebenfalls kein Zwillingspaar enthält. Zu dem Zweck ergänzen wir das Konglomerat genau wie beim Beweis von Satz 12 zu einer lückenlosen Ausfüllung des Raumes mit Würfeln; die Mittelpunktskoordinaten dieser Würfel sind durch (4, 4) gegeben. Wir wollen zeigen, daß gerade in dieser Ausfüllung kein Zwillingspaar vorhanden ist.

Wenn es doch ein Zwillingspaar gäbe und die beiden Würfel mit den Mittelpunkten

$$p_1 + \varphi^{1}_{p_1' \dots p_n'},\quad p_2 + \varphi^{2}_{p_1' \dots p_n'},\quad \dots,\quad p_n + \varphi^{n}_{p_1' \dots p_n'}$$

und

$$q_1 + \varphi^{1}_{q_1' \dots q_n'},\quad q_2 + \varphi^{2}_{q_1' \dots q_n'},\quad \dots,\quad q_n + \varphi^{n}_{q_1' \dots q_n'}$$

eines bilden würden, bei dem etwa die μ-te Koordinatendifferenz gleich ± 1 ist und die anderen gleich 0 sind, so wäre

$$|p_\mu - q_\mu| = 1, \quad p_\nu = q_\nu \quad \text{für} \quad \nu \neq \mu,$$

$$\varphi^{\nu}_{p_1' \dots p_n'} - \varphi^{\nu}_{q_1' \dots q_n'} = 0 \quad \text{für } \nu = 1, \dots, n.$$

Dann wäre aber auch

$$|p'_\mu - q'_\mu| = 1, \quad p'_\nu = q'_\nu \quad \text{für} \quad \nu \neq \mu$$

und folglich wäre auch bei den zwei Würfeln mit den Mittelpunkten

$$p'_1 + \varphi^1_{p'_1 \dots p'_n}, \quad p'_2 + \varphi^2_{p'_1 \dots p'_n}, \quad \dots, \quad p'_n + \varphi^n_{p'_1 \dots p'_n}$$

und

$$q'_1 + \varphi^1_{q'_1 \dots q'_n}, \quad q'_2 + \varphi^2_{q'_1 \dots q'_n}, \quad \dots, \quad q'_n + \varphi^n_{q'_1 \dots q'_n}$$

die μ-te Koordinatendifferenz gleich ± 1 und alle anderen gleich 0; sie wären also ein Zwillingspaar. Das sind aber zwei Würfel des Konglomerats (4, 1). in dem es nach Voraussetzung kein Zwillingspaar gibt. Damit ist Satz 13 bewiesen.

Nach Satz 10 bilden die 2^n Würfel mit den Mittelpunkten

$$k_1 + \varphi^1_{k_1 \dots k_n}, \quad k_2 + \varphi^2_{k_1 \dots k_n}, \quad \dots, \quad k_n + \varphi^n_{k_1 \dots k_n},$$

wobei die k_ν unabhängig voneinander die Werte 0 und 1 annehmen und wobei

$$\text{(A)} \qquad 0 \leqq \varphi^\nu_{k_1 \dots k_n} < 1$$

ist, ein Konglomerat, wenn die $\varphi^\nu_{k_1 \dots k_n}$ dem System von $2^{n-1}\ (2^n - 1)$ Gleichungen

$$\text{(B)} \qquad \prod_\nu (\varphi^\nu_{k_1 \dots k_n} - \varphi^\nu_{l_1 \dots l_n}) = 0$$

genügen, wobei das Produkt über diejenigen Indizes ν zu erstrecken ist, für welche $k_\nu \neq l_\nu$ ist. Wir wollen jetzt durch ein ähnliches Gleichungssystem auch den etwaigen Tatbestand zum Ausdruck bringen, daß das Konglomerat ein Zwillingspaar enthält.

Wenn bei den zwei Mittelpunkten

$$k_1 + \varphi^1_{k_1 \dots k_n}, \quad k_2 + \varphi^2_{k_1 \dots k_n}, \quad \dots, \quad k_n + \varphi^n_{k_1 \dots k_n}$$

und

$$l_1 + \varphi^1_{l_1 \dots l_n}, \quad l_2 + \varphi^2_{l_1 \dots l_n}, \quad \dots, \quad l_n + \varphi^n_{l_1 \dots l_n}$$

etwa die *erste* Koordinatendifferenz gleich ± 1 ist und die anderen gleich 0 sind, so ist

$$|k_1 - l_1| = 1, \quad \text{also} \quad k_1 = 1, \quad l_1 = 0 \quad \text{oder umgekehrt},$$

$$l_\nu = k_\nu \quad \text{für} \quad \nu = 2, \dots, n,$$

$$\varphi^\nu_{k_1 \dots k_n} - \varphi^\nu_{l_1 \dots l_n} = 0 \quad \text{für} \quad \nu = 1, \dots, n,$$

also

$$\varphi^\nu_{1 k_2 \dots k_n} - \varphi^\nu_{0 k_2 \dots k_n} = 0 \qquad (\nu = 1, \dots, n),$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\varphi^\nu_{1 k_2 \dots k_n} - \varphi^\nu_{0 k_2 \dots k_n}| = 0.$$

Hier darf aber der Summand für $\nu = 1$ weggelassen werden, weil in dem System (B) die Gleichung

$$\varphi^1_{1 k_2 \dots k_n} - \varphi^1_{0 k_2 \dots k_n} = 0$$

vorkommt, so daß dieser Summand verschwindet. Der Tatbestand, daß *überhaupt* zwei Würfel da sind, bei denen die *erste* Mittelpunktskoordinatendifferenz gleich ± 1 ist und die $n - 1$ anderen gleich 0 sind, läßt sich daher durch die Gleichung

$$(C_1) \qquad \prod_{k_2 \dots k_n} \sum_{\nu=2}^{n} | \varphi^\nu_{1 k_2 \dots k_n} - \varphi^\nu_{0 k_2 \dots k_n} | = 0$$

ausdrücken, wobei das Produkt über die 2^{n-1} Wertsysteme $k_2, \dots, k_n$ $(= 0$ oder 1) zu erstrecken ist.

Analog läßt sich der Tatbestand, daß zwei Würfel da sind, bei denen die *zweite* Mittelpunktskoordinatendifferenz gleich ± 1 ist und die anderen gleich 0 sind, durch die Gleichung

$$(C_2) \qquad \prod_{k_1 k_3 \dots k_n} \sum_{\nu=1}^{n} | \varphi^\nu_{k_1 1 k_3 \dots k_n} - \varphi^\nu_{k_1 0 k_3 \dots k_n} | = 0$$

ausdrücken, wobei der Summand für $\nu = 2$ als verschwindend weggelassen werden darf; usw. Schließlich wird der Tatbestand, daß zwei Würfel da sind, bei denen die *n-te* Mittelpunktskoordinatendifferenz gleich ± 1 ist und die anderen gleich 0 sind, ausgedrückt durch die Gleichung

$$(C_n) \qquad \prod_{k_1 \dots k_{n-1}} \sum_{\nu=1}^{n-1} | \varphi^\nu_{k_1 \dots k_{n-1} 1} - \varphi^\nu_{k_1 \dots k_{n-1} 0} | = 0,$$

wobei wir den Summanden für $\nu = n$ als verschwindend gleich weggelassen haben.

Hiernach läßt sich nun der Tatbestand, daß in dem Konglomerat ein Zwillingspaar vorkommt, d. h. daß zwei Würfel da sind, bei denen *irgendeine* der n Mittelpunktskoordinatendifferenzen gleich ± 1 ist und die $n - 1$ anderen gleich 0 sind, dadurch ausdrücken, daß man das Produkt der n in (C_1), (C_2), $\dots$, (C_n) stehenden Produkte bildet und dieses gleich 0 setzt. Da aber in dem so entstehenden Gesamtprodukt von $n \cdot 2^{n-1}$ Faktoren jeder Faktor eine Summe von $n - 1$ absoluten Beträgen ist, so muß beim gliedweisen Ausmultiplizieren jedes der $(n-1)^{n \cdot 2^{n-1}}$ entstehenden Glieder für sich verschwinden. Man erhält also das Gleichungssystem

$$(D) \qquad \begin{aligned} &\prod_{k_2 \dots k_n} (\varphi^{\nu_1}_{1 k_2 \dots k_n} - \varphi^{\nu_1}_{0 k_2 \dots k_n}) \cdot \prod_{k_1 k_3 \dots k_n} (\varphi^{\nu_2}_{k_1 1 k_3 \dots k_n} - \varphi^{\nu_2}_{k_1 0 k_3 \dots k_n}) \cdot \dots \\ &\cdot \prod_{k_1 \dots k_{n-1}} (\varphi^{\nu_n}_{k_1 \dots k_{n-1} 1} - \varphi^{\nu_n}_{k_1 \dots k_{n-1} 0}) = 0, \end{aligned}$$

wobei die Absolutstriche bei den einzelnen Faktoren als offenbar überflüssig weggelassen sind. In (D) enthält die linke Seite n Teilprodukte von je 2^n-1 Faktoren, im ganzen also $n \cdot 2^{n-1}$ Faktoren. Das System (D) besteht aus $(n-1)^{n \cdot 2^{n-1}}$ Gleichungen, die entstehen, indem man in jedem der 2^n-1 Faktoren des ersten Teilprodukts dem Index ν_1 einen der $n-1$ Werte $2, \ldots, n$ beilegt[8]), in jedem der 2^n-1 Faktoren des zweiten Teilprodukts dem Index ν_2 einen der $n-1$ Werte $1, 3, \ldots, n$, usw., schließlich in jedem der 2^n-1 Faktoren des n-ten Teilprodukts dem Index ν_n einen der $n-1$ Werte $1, \ldots, n-1$. Die bei dieser Aufzählung für $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ jeweils ausgeschlossenen Werte wären an sich ebenfalls zulässig, doch sind die betreffenden Faktoren, wie oben erwähnt, wegen (B) von selbst gleich 0, die betreffenden Gleichungen also von selbst erfüllt.

Die Frage, ob die Vermutung Ko zutrifft, d. h. ob es in einem Konglomerat immer wenigstens ein Zwillingspaar gibt, ist hiermit zurückgeführt auf die Frage, ob das Gleichungssystem (B) das Gleichungssystem (D) zur Folge hat. Das ist eine rein algebraische Frage, deren Beantwortung dadurch, daß für die $n \cdot 2^n$ in den Gleichungssystemen auftretenden Größen $\varphi^r_{k_1 \ldots k_n}$ noch die Ungleichungen (A) vorgeschrieben sind, offenbar nicht geändert wird. Wir dürfen daher bei der Frage, ob (D) eine Folge von (B) ist, von der Nebenbedingung (A) absehen. Da nach Satz 13 die Vermutung Ko mit der Kellerschen Vermutung gleichwertig ist, gewinnen wir somit den

Satz 14. *Die Kellersche Vermutung trifft dann und nur dann zu, wenn das System der* $2^{n-1}(2^n-1)$ *Gleichungen* (B) *das System der* $(n-1)^{n \cdot 2^n - 1}$ *Gleichungen* (D) *nach sich zieht, wenn also jede Lösung von* (B) *auch Lösung von* (D) *ist.*

Beispiel: $n = 2$. Für $n = 2$ ist das System der sechs Gleichungen (B) bereits auf Seite 13 mitgeteilt; es hat die zwei dort angegebenen Lösungen I und II. Das System (D) besteht nur aus einer einzigen Gleichung, nämlich

$$(\varphi^2_{10} - \varphi^2_{00})\,(\varphi^2_{11} - \varphi^2_{01})\,(\varphi^1_{01} - \varphi^1_{00})\,(\varphi^1_{11} - \varphi^1_{10}) = 0.$$

Diese Gleichung ist nun für jede Lösung von (B) erfüllt; denn für die Lösung I verschwinden die letzten beiden Faktoren, für die Lösung II die ersten beiden. Daraus folgt

Satz 15. *Für* $n = 2$ *trifft die Kellersche Vermutung zu.*

---

[8]) Eigentlich müßte man, da ν_1 nicht in jedem Faktor des Teilprodukts denselben Wert hat, ausführlicher $\nu_{1\,k_2 \ldots k_n}$ statt ν_1 schreiben. Doch wollten wir diese schwerfällige Schreibweise vermeiden und statt dessen lieber eine ausführliche Beschreibung des Sachverhalts geben.

Übrigens läßt sich der Fall $n = 2$, der hier nur als Beispiel angeführt ist, auch viel einfacher ohne Benutzung von Satz 14 erledigen. Es handelt sich dabei um ebene Geometrie und jeder Leser kann die Sache sofort an einer einfachen Figur ablesen. Ob dieses „Ablesen" in jedem Falle ein strenger Beweis ist, darf allerdings bezweifelt werden. Indes folgt auch in § 7 noch ein ganz kurzer von Satz 14 unabhängiger Beweis.

§ 6.

Einige Folgerungen aus dem Gleichungssystem (B).

Um zu erkennen, ob das Gleichungssystem (D) eine Folge von (B) ist, kann man, statt alle Lösungen von (B) aufzuschreiben, auch versuchen, durch Kombination der verschiedenen Gleichungen (B) weitere Gleichungen derselben Bauart herzuleiten und so allmählich zu verschwindenden Produkten zu gelangen, die in den linken Seiten der Gleichungen (D) enthalten sind. Dabei ist es vorteilhaft, die Bezeichnung etwas zu ändern. Wir setzen

$$\varphi^{\nu}_{00\ldots0} = u^{\nu}$$

und allgemein, wenn in $\varphi^{\nu}_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ etwa der $\varkappa_1$-te, $\varkappa_2$-te, ..., $\varkappa_r$-te untere Index gleich 1 ist (und die anderen gleich 0):

$$\varphi^{\nu}_{k_1 k_2 \ldots k_n} = u^{\nu}_{\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_r},$$

wobei die Reihenfolge der $\varkappa_\mu$ noch beliebig permutiert werden darf. Also z. B. im Falle $n = 4$:

$$\varphi^{\nu}_{0100} = u^{\nu}_{2},$$
$$\varphi^{\nu}_{1010} = u^{\nu}_{13} = u^{\nu}_{31},$$
$$\varphi^{\nu}_{0111} = u^{\nu}_{234} = u^{\nu}_{243} = u^{\nu}_{324} = u^{\nu}_{342} = u^{\nu}_{423} = u^{\nu}_{432}.$$

Das System (B) schreibt sich dann folgendermaßen:

$$\text{(B)} \qquad \prod_{\nu} (u^{\nu}_{\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_r} - u^{\nu}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_s}) = 0,$$

wobei $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_r$ und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ irgend zwei verschiedene Mengen zulässiger Indizes sind (die eine darf auch leer sein, d. h. das betreffende u hat keinen unteren Index) und wobei das Produkt über diejenigen Werte ν zu erstrecken ist, die entweder in der Menge $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_r$ oder in der Menge $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ vorkommen, aber nicht in beiden. Beispielsweise sind die folgenden Gleichungen in dem System (B) enthalten:

$$(\mathrm{B}_1) \qquad u^{\varkappa}_{\varkappa} - u^{\varkappa} = 0, \quad u^{\varkappa}_{\varkappa\lambda} - u^{\varkappa}_{\lambda} = 0, \quad u^{\varkappa}_{\varkappa\lambda\mu} - u^{\varkappa}_{\lambda\mu} = 0, \quad \ldots,$$

$$(\mathrm{B}_2) \qquad (u^{\varkappa}_{\varkappa\lambda} - u^{\varkappa})(u^{\lambda}_{\varkappa\lambda} - u^{\lambda}) = 0, \quad (u^{\varkappa}_{\varkappa\lambda\mu} - u^{\varkappa}_{\mu})(u^{\lambda}_{\varkappa\lambda\mu} - u^{\lambda}_{\mu}) = 0, \quad \ldots,$$

$$(\mathrm{B}_3) \qquad (u^{\varkappa}_{\varkappa} - u^{\varkappa}_{\lambda})(u^{\lambda}_{\varkappa} - u^{\lambda}_{\lambda}) = 0, \quad (u^{\varkappa}_{\varkappa\mu} - u^{\varkappa}_{\lambda\mu})(u^{\lambda}_{\varkappa\mu} - u^{\lambda}_{\lambda\mu}) = 0, \quad \ldots,$$

$$(\mathrm{B}_4) \qquad (u^{\varkappa}_{\varkappa\lambda\mu} - u^{\varkappa})(u^{\lambda}_{\varkappa\lambda\mu} - u^{\lambda})(u^{\mu}_{\varkappa\lambda\mu} - u^{\mu}) = 0,$$

$$(\mathrm{B}_5) \qquad (u^{\varkappa}_{\varkappa\lambda} - u^{\varkappa}_{\mu})(u^{\lambda}_{\varkappa\lambda} - u^{\lambda}_{\mu})(u^{\mu}_{\varkappa\lambda} - u^{\mu}_{\mu}) = 0.$$

Das System (D) hat in der neuen Bezeichnungsweise folgendes Aussehen:

$$\text{(D)} \qquad \begin{aligned} &\prod_{\varkappa}(u_{\varkappa}^{\nu}-u^{\nu})\cdot\prod_{\varkappa\lambda}(u_{\varkappa\lambda}^{\nu}-u_{\lambda}^{\nu})\cdot\prod_{\varkappa\lambda\mu}(u_{\varkappa\lambda\mu}^{\nu}-u_{\lambda\mu}^{\nu})\cdot\cdots\\ &\cdot\prod_{\varkappa\lambda_2\ldots\lambda_n}(u_{\varkappa\lambda_2\ldots\lambda_n}^{\nu}-u_{\lambda_2\ldots\lambda_n}^{\nu})=0, \end{aligned}$$

Dabei darf in jeder einzelnen Klammer der obere Index ν irgendeinen von $\varkappa$ verschiedenen Wert haben, nicht etwa in allen Klammern eines Teilprodukts oder gar des ganzen Produkts immer denselben Wert. Übrigens wäre auch der Wert $\nu = \varkappa$ als oberer Index zulässig; aber der betreffende Faktor und also auch das Produkt verschwindet dann nach (B_1) von selbst, weshalb wir schon in § 5 diesen oberen Index jeweils nicht mit aufgezählt haben.

Im Fall $n = 3$ handelt es sich z. B. um das System

$$\text{(D 3)} \qquad \begin{aligned} &(u_1-u)(u_2-u)(u_3-u)(u_{12}-u_1)(u_{12}-u_2)(u_{13}-u_1)(u_{13}-u_3)\\ &(u_{23}-u_2)(u_{23}-u_3)(u_{123}-u_{12})(u_{123}-u_{13})(u_{123}-u_{23})=0, \end{aligned}$$

wobei die unteren Indizes gegenüber der Schreibweise oben in (D) teilweise permutiert sind und wobei in jedem der zwölf Faktoren noch ein beliebiger oberer Index beizusetzen ist. In jedem Faktor gibt es dabei zwei Möglichkeiten, abgesehen von der trivialen nie mitgezählten, bei der der betreffende Faktor wegen (B_1) bereits verschwindet. Das System (D 3) besteht also aus $2^{12} = 4096$ Gleichungen [9]). Trotz dieser großen Zahl wird es uns möglich sein, sie alle als Folge des Systems (B) nachzuweisen.

Satz 16. *Das System* (B) *zieht die folgenden Gleichungen nach sich, wobei* $\varkappa$ *und* λ *irgend zwei verschiedene Indizes sind*:

$$(u_{\lambda}^{\varkappa}-u^{\varkappa})(u_{\varkappa}^{\lambda}-u^{\lambda})=0.$$

Beweis. Im System (B) kommen die folgenden Gleichungen vor (vgl. (B_1) und (B_2)):

$$u_{\varkappa\lambda}^{\varkappa}-u_{\lambda}^{\varkappa}=0,\quad u_{\varkappa\lambda}^{\lambda}-u_{\varkappa}^{\lambda}=u_{\lambda\varkappa}^{\lambda}-u_{\varkappa}^{\lambda}=0,$$

$$(u_{\varkappa\lambda}^{\varkappa}-u^{\varkappa})(u_{\varkappa\lambda}^{\lambda}-u^{\lambda})=0.$$

Aus diesen folgt unmittelbar die Behauptung.

Satz 17. *Das System* (B) *zieht die folgenden Gleichungen nach sich, wobei* $\varkappa$, λ, μ *irgend drei verschiedene Indizes sind*:

$$(u_{\varkappa}^{\lambda}-u^{\lambda})(u_{\lambda}^{\mu}-u^{\mu})(u_{\mu}^{\varkappa}-u^{\varkappa})(u_{\lambda\varkappa}^{\mu}-u_{\varkappa}^{\mu})=0.$$

[9]) Allgemein besteht das System (D) aus $(n-1)^n\cdot 2^{n-1}$ Gleichungen, wie bereits in § 5 abgezählt wurde und sich aus der obigen Darstellung ebenfalls leicht ergibt.

Beweis. Unter den Gleichungen (B) kommt die Gleichung (B_5) vor, die wir in der Form

$$(u^{\varkappa}_{\varkappa\lambda} - u^{\varkappa}_{\mu})\,[(u^{\lambda}_{\varkappa\lambda} - u^{\lambda}) - (u^{\lambda}_{\mu} - u^{\lambda})]\,(u^{\mu}_{\varkappa\lambda} - u^{\mu}_{\mu}) = 0$$

schreiben und dann mit $u^{\mu}_{\lambda} - u^{\mu}$ multiplizieren. Da nach Satz 16 das Produkt $(u^{\lambda}_{\mu} - u^{\lambda})\ (u^{\mu}_{\lambda} - u^{\mu})$ verschwindet, ergibt sich alsdann

$$(u^{\varkappa}_{\varkappa\lambda} - u^{\varkappa}_{\mu})\,(u^{\lambda}_{\varkappa\lambda} - u^{\lambda})\,(u^{\mu}_{\varkappa\lambda} - u^{\mu}_{\mu})\,(u^{\mu}_{\lambda} - u^{\mu}) = 0.$$

Wir schreiben das in der Gestalt

$$[(u^{\varkappa}_{\varkappa\lambda} - u^{\varkappa}) - (u^{\varkappa}_{\mu} - u^{\varkappa})]\,(u^{\lambda}_{\varkappa\lambda} - u^{\lambda})\,(u^{\mu}_{\varkappa\lambda} - u^{\mu}_{\mu})\,(u^{\mu}_{\lambda} - u^{\mu}) = 0$$

Da nach (B_2) das Produkt $(u^{\varkappa}_{\varkappa\lambda} - u^{\varkappa})\ (u^{\lambda}_{\varkappa\lambda} - u^{\lambda})$ verschwindet, ergibt sich

$$(u^{\varkappa}_{\mu} - u^{\varkappa})\,(u^{\lambda}_{\varkappa\lambda} - u^{\lambda})\,(u^{\mu}_{\varkappa\lambda} - u^{\mu}_{\mu})\,(u^{\mu}_{\lambda} - u^{\mu}) = 0,$$

oder mit Rücksicht auf (B_1)

$$(u^{\varkappa}_{\mu} - u^{\varkappa})\,(u^{\lambda}_{\varkappa} - u^{\lambda})\,(u^{\mu}_{\varkappa\lambda} - u^{\mu})\,(u^{\mu}_{\lambda} - u^{\mu}) = 0.$$

Das schreiben wir in der Gestalt

$$(u^{\varkappa}_{\mu} - u^{\varkappa})\,(u^{\lambda}_{\varkappa} - u^{\lambda})\,[(u^{\mu}_{\varkappa\lambda} - u^{\mu}_{\varkappa}) + (u^{\mu}_{\varkappa} - u^{\mu})]\,(u^{\mu}_{\lambda} - u^{\mu}) = 0.$$

Da das Produkt $(u^{\varkappa}_{\mu} - u^{\varkappa})\ (u^{\mu}_{\varkappa} - u^{\mu})$ nach Satz 16 verschwindet, kommt schließlich

$$(u^{\varkappa}_{\mu} - u^{\varkappa})\,(u^{\lambda}_{\varkappa} - u^{\lambda})\,(u^{\mu}_{\varkappa\lambda} - u^{\mu}_{\varkappa})\,(u^{\mu}_{\lambda} - u^{\mu}) = 0.$$

Das ist gerade die Behauptung.

Anwendung: $n = 3$. In jeder Gleichung des Systems (D) kommen nach (D 3) fünf Faktoren

$$(u_1 - u)\ (u_2 - u)\ (u_3 - u)\ (u_{21} - u_1)\ (u_{12} - u_2)$$

vor, jeder mit irgendeinem oberen Index. Wir wollen zeigen, daß bei jeder Wahl der oberen Indizes bereits das Produkt dieser fünf Faktoren als Folge des Systems (B) verschwindet, so daß das System (D) in der Tat eine Folge von (B) ist. Die Werte für die oberen Indizes, welche wegen (B_1) unberücksichtigt bleiben dürfen, sind für die fünf Faktoren der Reihe nach die folgenden:

$$1,\ 2,\ 3,\ 2,\ 1.$$

Beim ersten Faktor kommt daher als oberer Index nur 2 oder 3 in Frage. Ist er etwa 2, so ist im zweiten Faktor nur noch der Wert 3 als oberer Index zu prüfen, weil $(u^2_1 - u^2)\ (u^1_2 - u^1)$ nach Satz 16 bereits verschwindet. Aus

analogem Grund ist dann im dritten Faktor nur noch der Wert 1 als oberer Index zu prüfen. Es handelt sich also um das Produkt

$$P_1 = (u_1^2 - u^2)\ (u_2^3 - u^3)\ (u_3^1 - u^1)\ (u_{21}^{\nu} - u_1^{\nu})\ (u_{12}^{\mu} - u_2^{\mu}).$$

Wenn dagegen im ersten Faktor der obere Index gleich 3 ist, so führt die gleiche Überlegung mit Vertauschung der Rollen des zweiten und dritten Faktors zu dem Produkt

$$P_2 = (u_1^3 - u^3)\ (u_2^1 - u^1)\ (u_3^2 - u^2)\ (u_{21}^{\nu} - u_1^{\nu})\ (u_{12}^{\mu} - u_2^{\mu}).$$

Es ist also nur noch zu zeigen, daß die Produkte P_1 und P_2 bei jeder Wahl der Indizes ν (= 1 oder 3) und μ (= 2 oder 3) verschwinden. Nun ist aber

$$(u_1^2 - u^2)\ (u_{21}^1 - u_1^1) = (u_1^2 - u^2)\ (u_2^1 - u^1) = 0 \text{ nach } (B_1) \text{ und Satz 16.}$$

$$(u_1^2 - u^2)\ (u_2^3 - u^3)\ (u_3^1 - u^1)\ (u_{21}^3 - u_1^3) = 0 \text{ nach Satz 17.}$$

Also verschwindet in P_1 schon das Produkt der ersten vier Faktoren bei jeder Wahl von ν. Ferner ist

$$(u_2^1 - u^1)\ (u_{12}^2 - u_2^2) = (u_2^1 - u^1)\ (u_1^2 - u^2) = 0 \text{ nach } (B_1) \text{ und Satz 16,}$$

$$(u_2^1 - u^1)\ (u_1^3 - u^3)\ (u_3^2 - u^2)\ (u_{12}^3 - u_2^3) = 0 \text{ nach Satz 17.}$$

Also verschwindet in P_2 das Produkt aus den ersten drei und dem fünften Faktor bei jeder Wahl von μ.

Somit hat sich das System der 4096 Gleichungen (D) wirklich als eine Folge des Systems (B) erwiesen und aus Satz 14 ergibt sich

Satz 18. *Für $n = 3$ trifft die Kellersche Vermutung zu.*

§ 7.

Abgekürzte Beweise für n = 2 und n = 3.

Wir wollen die Fälle $n = 2$ und $n = 3$ jetzt noch einmal behandeln, und zwar nach einer kürzeren von Satz 14 unabhängigen Methode. Von einer gegebenen lückenlosen Ausfüllung des Raumes mit Würfeln kann man durch Parallelverschiebung auf Grund von Satz 2 zu einer anderen übergehen, bei der ein Würfel seinen Mittelpunkt im Nullpunkt hat. Die Koordinaten*differenzen* von je zwei Mittelpunkten werden dadurch nicht geändert, so daß bei der Frage nach der Existenz von Zwillingspaaren von vorn herein

ein Mittelpunkt im Nullpunkt angenommen werden darf; das soll im folgenden geschehen.

Wir behandeln jetzt den Fall $n = 2$.

Nach Satz 6 sind in einer lückenlosen Ausfüllung des Raumes (jetzt der Ebene) insbesondere drei Würfel (jetzt Quadrate) W_0, W_1, W_2 vorhanden mit den Mittelpunkten

$$\begin{array}{lll} W_0: & 0 & 0 \\ W_1: & 1+u_1^1 & u_1^2 \\ W_2: & u_2^1 & 1+u_2^2, \end{array}$$

wobei $0 \leqq u_\varkappa^\nu < 1$ ist. Das sind drei Würfel (Quadrate) des in der lückenlosen Ausfüllung enthaltenen Konglomerats; den vierten brauchen wir nicht. Die Bezeichnung der $u_\varkappa^\nu$ ist die gleiche wie in § 6; nur sind die u^ν ohne unteren Index durch 0 ersetzt, weil wir ja einen Mittelpunkt im Nullpunkt annehmen wollten.

Da nun nach Satz 9 bei W_0 und W_1 eine ganzzahlige von 0 verschiedene Koordinatendifferenz da sein muß, muß $u_1^1 = 0$ sein. Wir drücken das aus, indem wir sagen: Aus $W_1 - W_0$ folgt $u_1^1 = 0$. Aus $W_2 - W_0$ folgt ebenso $u_2^2 = 0$. Dann folgt aber aus $W_1 - W_2$, daß auch von den Zahlen u_2^1 und u_1^2 wenigstens eine verschwinden muß [10]). Im Fall $u_2^1 = 0$ bilden aber W_0 und W_2 ein Zwillingspaar; im Fall $u_1^2 = 0$ bilden W_0 und W_1 ein Zwillingspaar.

Wir kommen jetzt zum Fall $n = 3$.

Nach Satz 6 sind in einer lückenlosen Ausfüllung des Raumes insbesondere fünf Würfel $W_0, \ldots, W_4$ vorhanden mit den Mittelpunkten

$$\begin{array}{lllll} W_0: & 0 & 0 & 0 \\ W_1: & 1+u_1^1 & u_1^2 & u_1^3 \\ W_2: & u_2^1 & 1+u_2^2 & u_2^3 \\ W_3: & u_3^1 & u_3^2 & 1+u_3^3 \\ W_4: & 1+u_{12}^1 & 1+u_{12}^2 & u_{12}^3, \end{array}$$

wobei wieder $0 \leqq u_\varkappa^\nu < 1$ und auch $0 \leqq u_{12}^\nu < 1$ ist. Das sind fünf Würfel des in der lückenlosen Ausfüllung enthaltenen Konglomerats, die anderen drei brauchen wir nicht. Die Bezeichnung der $u_\varkappa^\nu$ und $u_{\varkappa\lambda}^\nu$ ist wieder die des § 6 und die u^ν ohne unteren Index sind wieder gleich 0 gesetzt.

Genau wie vorhin folgt, daß u_1^1, u_2^2, u_3^3 verschwinden und daß auch von den Zahlen u_2^1 und u_1^2 wenigstens eine verschwinden muß. Indem wir

---

[10]) Darin erkennt man die nach Satz 16 als Folge des Systems (B) bestehende Gleichung $(u_2^1 - u^1)(u_1^2 - u^2) = 0$, die sich jetzt wegen $u^1 = u^2 = 0$ auf $u_2^1 \cdot u_1^2 = 0$ reduziert.

nötigenfalls die erste und zweite Koordinate und gleichzeitig die Würfel W_1 und W_2 ihre Rollen tauschen lassen, dürfen wir annehmen, daß $u_2^1 = 0$ ist. Dann haben wir das folgende links stehende Bild:

W_0:	0	0	0
W_1:	1	u_1^2	u_1^3
W_2:	0	1	u_2^3
W_3:	u_3^1	u_3^2	1
W_4:	$1 + u_{12}^1$	$1 + u_{12}^2$	u_{12}^3.

W_0:	0	0	0
W_1:	1	u_1^2	0
W_2:	0	1	u_2^3
W_3:	u_3^1	0	1
W_4:	$1 + u_{12}^1$	$1 + u_{12}^2$	u_{12}^3.

Wenn nun $u_2^3 = 0$ ist, bilden W_0 und W_2 ein Zwillingspaar. Wir nehmen daher $u_2^3 \neq 0$ an. Aus $W_2 - W_3$ folgt dann $u_3^2 = 0$. Wenn auch $u_3^1 = 0$ ist, bilden W_0 und W_3 ein Zwillingspaar. Wir nehmen daher $u_3^1 \neq 0$ an. Aus $W_1 - W_3$ folgt dann aber $u_1^3 = 0$. Wenn auch $u_1^2 = 0$ ist, bilden W_0 und W_1 ein Zwillingspaar. Wir nehmen daher $u_1^2 \neq 0$ an und erhalten so das oben rechts stehende Bild, wobei u_1^2, u_2^3, u_3^1 von 0 verschieden sind. Alsdann folgt aber der Reihe nach

$$\begin{aligned} &\text{aus } W_1 - W_4\text{:} \quad u_{12}^2 = u_1^2, \\ &\text{aus } W_2 - W_4\text{:} \quad u_{12}^1 = 0, \\ &\text{aus } W_3 - W_4\text{:} \quad u_{12}^3 = 0. \end{aligned}$$

Daher bilden jetzt W_1 und W_4 ein Zwillingspaar.

(Eingegangen am 17. Oktober 1939.)

Verallgemeinerung der Dodekaederräume*).

Von

Hans Friedgé in Hanau-Main.

Inhalt.

§ 1. Der Dodekaederraum 27
§ 2. Verallgemeinerungen 29
§ 3. Das Homöomorphieproblem 36
§ 4. Weitere Verallgemeinerung (Beispiele) 40

Einleitung.

Da man das vollständige Invariantensystem dreidimensionaler geschlossener Mannigfaltigkeiten noch nicht kennt und sie daher nicht aufzählen kann, hat es ein gewisses Interesse, neue dreidimensionale Räume zu konstruieren und sie mit den vorhandenen Invarianten auf ihre Übereinstimmung mit bereits bekannten Räumen zu prüfen. Wir leiten im folgenden durch Verallgemeinerung der Konstruktion des sphärischen Dodekaederraumes [1]) sechs Klassen von Mannigfaltigkeiten ab; unter ihnen sind zwei Klassen Poincaréscher Räume, deren Fundamentalgruppen isomorph sind mit den Fundamentalgruppen Poincaréscher Räume, die man aus dem Torusknoten (2, 3) gewinnen kann [2]). In § 3 wird die Homöomorphie dieser Räume nachgewiesen, in § 4 Beispiele weiterer Verallgemeinerung gegeben, die zu neuen Räumen führen.

§ 1.

Der Dodekaederraum.

a) Konstruktion.

Wir nehmen ein Dodekaeder und identifizieren gegenüberliegende Seiten, nachdem wir sie um $\frac{\pi}{5}$ gleichsinnig gegeneinander verschraubt haben (Fig. 1).

*) Die Arbeit wurde von der naturw. Fakultät der Universität Frankfurt a. M. als Dissertation (D 30) angenommen.

[1]) C. Weber und H. Seifert, Die beiden Dodekaederräume, Math. Zeitschr. 37 (1933), S. 241.

[2]) M. Dehn, Math. Annalen 69 (1910), S. 160—165.

Dadurch werden die Kanten zu je dreien, die Ecken zu je vieren äquivalent. Die Eulersche Charakteristik ist:

$$N = -5 + 10 - 6 + 1 = 0;$$

der entstehende Komplex ist also eine Mannigfaltigkeit [3]).

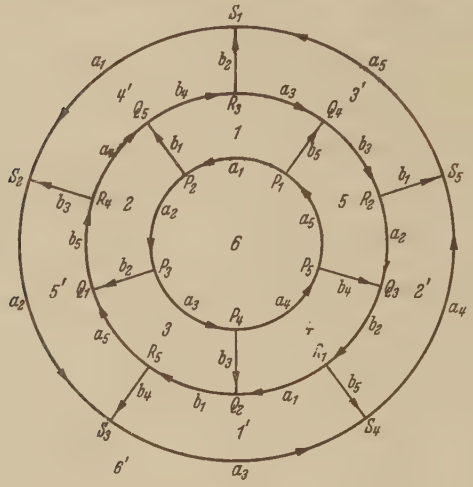


Fig. 1.

Man denke sich das Innere des Dodekaeders als Halbraum über der Zeichenebene, die durch einen unendlich fernen Punkt geschlossen ist. Zu identifizieren sind z. B. das „Grundfünfeck" $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$ und das „Dachfünfeck" $S_1 S_2 S_3 S_4 S_5$.

b) Fundamentalgruppe [4]).

In der Fig. 1 sind äquivalente Kanten mit dem gleichen Buchstaben benannt, äquivalente Ecken tragen denselben Index. Um die Relationen der Fundamentalgruppe aufzustellen, wählen wir P_1 zum Ausgangspunkt der geschlossenen Wege und als Hilfswege nach den übrigen vier Ecken:

$$Q_1 P_3 = b_2^{-1},$$
$$Q_1 P_5 = b_2^{-1} b_4^{-1},$$
$$P_1 Q_4 = b_5,$$
$$P_1 Q_2 = b_5 b_3.$$

Erzeugende der Fundamentalgruppe gibt es ebenso viele wie Kanten, also zehn; wir nennen sie $A_1, \ldots, A_5$, $B_1, \ldots, B_5$. Die Relationen erster Art, die den Kanten entsprechen, werden dann:

$$\begin{aligned}
B_1 &= B_5\ B_3\ \cdot B_1\ \cdot B_4\ B_2 \\
B_2 = B_2^{-1} \cdot B_2 &= 1 \qquad B_3 = B_5 \cdot B_3\ \cdot B_3^{-1} B_5^{-1} = 1 \\
B_4 = B_2^{-1} B_4^{-1} \cdot B_4 \cdot B_2 &= 1 \qquad B_5 = B_5\ \cdot B_5^{-1} = 1 \\
A_1 &= A_1 \cdot B_3^{-1} B_5^{-1} \\
A_2 &= B_5\ B_3\ \cdot A_2 \cdot B_2 \\
A_3 &= B_2^{-1} \cdot A_3 \cdot B_5^{-1} \\
A_4 &= B_5\ \cdot A_4 \cdot B_4\ B_2 \\
A_5 &= B_2^{-1} B_4^{-1} \cdot A_5;
\end{aligned}$$

hiervon sind nur die Relationen

$$\text{(I)} \qquad B_2 = B_3 = B_4 = B_5 = 1$$

wesentlich, die übrigen werden trivial.

[3]) Seifert-Threlfall, Lehrbuch der Topologie, S. 208.

[4]) H. Seifert, Konstruktion dreidimensionaler geschlossener Räume, Ber. d. sächs. Akad. d. Wiss. 83, S. 32.

Die Relationen zweiter Art, die den Flächenumläufen entsprechen, werden mit (I):

$$\left.\begin{array}{l} 1 = A_1\ B_1\ A_3 \\ 1 = A_2\ A_4\ B_1^{-1} \\ 1 = A_3\ B_1\ A_5 \\ 1 = A_4\ A_1 \\ 1 = A_5\ A_2 \\ 1 = \prod_{\nu=1}^{5} A_\nu \end{array}\right| \quad \text{Wir eliminieren } A_4 \text{ und } A_5 \text{ und erhalten:}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 = A_1 B_1\ \ A_3 \\ 1 = A_2 A_1^{-1} B_1^{-1} \quad \ldots \quad A_1 = B_1^{-1} A_2 \\ 1 = A_3 B_1\ \ A_2^{-1} \quad \ldots \quad A_3 = A_2\ \ B_1^{-1} \\ 1 = A_1 A_2\ \ A_3\ \ A_1^{-1} A_2^{-1}. \end{array}\right.$$

Wir eliminieren noch A_1 und A_3 und erhalten:

(1) $$B_1^2 = A_2 B_1 A_2 \quad \text{oder} \quad B_1^3 = (A_2 B_1)^2,$$

(2) $$1 = B_1^{-1} A_2 \cdot A_2 \cdot A_2 B_1^{-1} \cdot A_2^{-1} B_1 \cdot A_2^{-1} = B_1^{-2} A_2^3 B_1^{-1} (A_2^{-1} B_1)^2.$$

Wir schreiben A und B an Stelle von A_2 und B_1: aus (1) folgt:

(3) $$A^{-1} B = B A B^{-1} \quad \text{und} \quad (A^{-1} B)^n = B A^n B^{-1},$$

und es wird (2) mit (3):

$$1 = B^{-2} A^3 B^{-1} \cdot B A^2 B^{-1} = B^{-3} A^5.$$

Die Fundamentalgruppe ist also die Gruppe von zwei Erzeugenden A und B mit den Relationen:

$$A^5 = B^3 = (A B)^2.$$

Macht man abelsch und geht zur additiven Schreibung der Gruppe über, so wird, wenn wir die Erzeugenden der Abelschen Gruppe mit $\bar{A}$ und $\bar{B}$ bezeichnen:

$$\left.\begin{array}{l} 5 \cdot \bar{A} - 3 \cdot \bar{B} = 0 \\ 2 \cdot \bar{A} - \ \ \bar{B} = 0 \end{array}\right|, \text{ also } \bar{A} = \bar{B} = 0,$$

d. h. die Homologiegruppe besteht aus dem Nullelement allein oder: der Dodekaederraum ist ein Poincarésсher Raum.

§ 2.

Verallgemeinerung.

a) Konstruktion.

Wir betrachten das Polyeder $\mathfrak{P}^{(n)}$, dessen stereographische Projektion in Fig. 2 schematisch gezeichnet ist (die Zeichenebene ist durch einen unendlichfernen Punkt zur Kugelfläche zu schließen); Grund- und Dachfläche von $\mathfrak{P}^{(n)}$ sind n-Ecke; die übrigen Seiten sind Fünfecke (Anzahl $2n$), die in einem doppelten Kranz angeordnet sind wie die zehn Fünfecke des Dodekaeders zwischen Grund- und Dachfläche. Die Seiten von $\mathfrak{P}^{(n)}$ sind also: $2n$ Fünfecke und zwei n-Ecke. Wir identifizieren die Seiten paarweise, entsprechend der Bezeichnung der Figur, nachdem wir die Fünfecke um $\frac{\pi}{5}$ gleichsinnig

verschraubt haben, wie aus der Figur zu ersehen. Hierdurch werden die Kanten zu je dreien, die Ecken zu je vieren äquivalent: $P_r \sim Q_r \sim R_r \sim S_r$ ($r = 1, 2, 3, \ldots, n$). Die Eulersche Charakteristik ist also:

$$N = -n + 2n - (n+1) + 1 = 0;$$

der entstehende Komplex ist also eine Mannigfaltigkeit [3]). Wir berechnen die numerischen Invarianten, indem wir die Inzidenzmatrizen auf die Normalform bringen [5]). Je nach der Restklasse von n modulo 6 erhalten wir dabei verschiedene Ergebnisse. Wir finden für $k = 0, 1, 2, \ldots$ ($p^{(1)}$ = Bettische Zahl, $\tau^{(1)}$ = Torsionskoeffizient der Dimension 1):

$n =$	$1+6k$	$2+6k$	$3+6k$	$4+6k$	$5+6k$	$6+6k$
$p^{(1)}$	0	0	0	0	0	2
$\tau^{(1)}$	–	3	2; 2	3	–	–

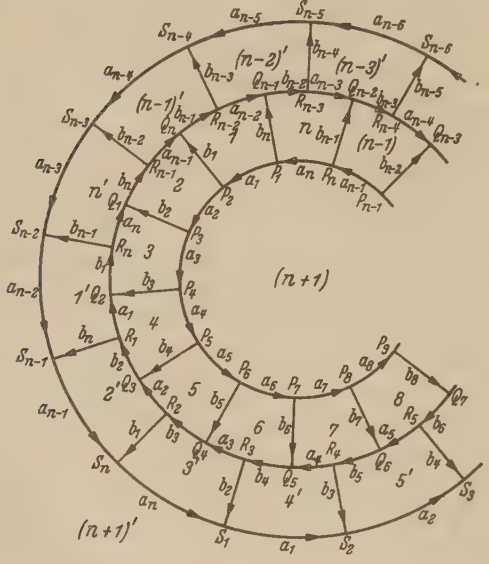


Fig. 2.

Unter den gefundenen Mannigfaltigkeiten sind also zwei Klassen Poincaréscher Räume: für $n = 1 + 6k$ und für $n = 5 + 6k$. Die Umformung der Matrizen soll hier übergangen werden, da die numerischen Invarianten sich aus der Fundamentalgruppe leicht bestimmen.

b) Fundamentalgruppe [4]).

1. Sei n ungerade. Wir wählen P_1 zum Ausgangspunkt der geschlossenen Wege und als Hilfswege nach den übrigen Ecken:

$$\begin{aligned}
P_1P_3 &= b_2^{-1} & P_1P_{n-1} &= b_n \\
P_1P_5 &= b_2^{-1}b_4^{-1} & P_1P_{n-3} &= b_n b_{n-2} \\
P_1P_7 &= b_2^{-1}b_4^{-1}b_6^{-1} & P_1P_{n-5} &= b_n b_{n-2} b_{n-4} \\
&\vdots & &\vdots \\
P_1P_{n-2} &= b_2^{-1}b_4^{-1}b_6^{-1}\cdots b_{n-3}^{-1} & P_1P_4 &= b_n b_{n-2} b_{n-4}\cdots b_5 \\
P_1P_n &= b_2^{-1}b_4^{-1}b_6^{-1}\cdots b_{n-3}^{-1}b_{n-1}^{-1} & P_1P_2 &= b_n b_{n-2} b_{n-4}\cdots b_5 b_3;
\end{aligned}$$

Die Relationen erster Art, die den Kanten entsprechen, werden also:

[5]) l. c. [3]), S. 71ff.

$$
\begin{array}{lcccccccccccccccc}
B_1 & = & B_n & B_{n-2} & & \dots & B_5 & B_3 & \cdot B_1 & \cdot B_{n-1} & B_{n-3} & \dots & B_4 & B_2; & & & \\
B_2 & = & & & & & & B_2^{-1} & \cdot B_2 & & & & & & & & = 1 \\
B_4 & = & & & & & B_2^{-1} & B_4^{-1} & \cdot B_4 & \cdot B_2 & & & & & & & = 1 \\
B_6 & = & & & & B_2^{-1} & B_4^{-1} & B_6^{-1} & \cdot B_6 & \cdot B_4 & B_2 & & & & & & = 1 \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\
B_{n-3} & = & & B_2^{-1} & B_4^{-1} & \dots & & B_{n-3}^{-1} & \cdot B_{n-3} & \cdot B_{n-5} & B_{n-7} & \dots & B_4 & B_2 & & & = 1 \\
B_{n-1} & = & B_2^{-1} & B_4^{-1} & B_6^{-1} & \dots & & B_{n-1}^{-1} & \cdot B_{n-1} & \cdot B_{n-3} & B_{n-5} & \dots & B_6 & B_4 & B_2 & & = 1 \\
B_n & = & & & & & & & B_n & \cdot B_n^{-1} & & & & & & & = 1 \\
B_{n-2} & = & & & & & & B_n & \cdot B_{n-2} & \cdot B_{n-2}^{-1} & B_n^{-1} & & & & & & = 1 \\
B_{n-4} & = & & & & & B_n & B_{n-2} & \cdot B_{n-4} & \cdot B_{n-4}^{-1} & B_{n-2}^{-1} & B_n^{-1} & & & & & = 1 \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\
B_5 & = & & B_n & B_{n-2} & \dots & & B_7 & \cdot B_5 & \cdot B_5^{-1} & B_7^{-1} & \dots & B_{n-2}^{-1} & B_n^{-1} & & & = 1 \\
B_3 & = & B_n & B_{n-2} & B_{n-4} & \dots & & B_5 & \cdot B_3 & \cdot B_3^{-1} & B_5^{-1} & \dots & B_{n-4}^{-1} & B_{n-2}^{-1} & B_n^{-1} & & = 1, \\
A_2 & = & B_n & B_{n-2} & B_{n-4} & \dots & & B_3 & \cdot A_2 & \cdot B_2 & & & & & & & \\
A_4 & = & & B_n & B_{n-2} & \dots & & B_5 & \cdot A_4 & \cdot B_4 & B_2 & & & & & & \\
A_6 & = & & & B_n & \dots & & B_7 & \cdot A_6 & \cdot B_6 & B_4 & B_2 & & & & & \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & & & \\
A_{n-3} & = & & & & & B_n & B_{n-2} & \cdot A_{n-3} & \cdot B_{n-3} & B_{n-5} & \dots & B_4 & B_2 & & & \\
A_{n-1} & = & & & & & & B_n & \cdot A_{n-1} & \cdot B_{n-1} & B_{n-3} & \dots & B_6 & B_4 & B_2, & & \\
A_1 & = & & & & & & & A_1 & \cdot B_3^{-1} & B_5^{-1} & \dots & B_{n-4}^{-1} & B_{n-2}^{-1} & B_n^{-1} & & \\
A_3 & = & & & & & & B_2^{-1} & \cdot A_3 & \cdot B_5^{-1} & B_7^{-1} & \dots & B_{n-2}^{-1} & B^{-1} & & & \\
A_5 & = & & & & & B_2^{-1} & B_4^{-1} & \cdot A_5 & \cdot B_7^{-1} & B_9^{-1} & \dots & B_n^{-1} & & & & \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & & & \\
A_{n-2} & = & & B_2^{-1} & B_4^{-1} & \dots & & B_{n-3}^{-1} & \cdot A_{n-2} & \cdot B_n^{-1} & & & & & & & \\
A_n & = & B_2^{-1} & B_4^{-1} & B_6^{-1} & \dots & & B_{n-1}^{-1} & \cdot A_n. & & & & & & & &
\end{array}
$$

Von diesen Relationen sind wesentlich nur die folgenden:

$$\text{(I)} \qquad B_2 = B_3 = B_4 = B_5 = \ldots = B_{n-1} = B_n = 1.$$

Die Relationen zweiter Art, die den Flächenumläufen entsprechen. werden mit (I):

$$\begin{aligned}
1 &= A_1\ B_1\ A_{n-2} \\
1 &= A_2\ A_{n-1}\ B_1^{-1} \\
1 &= A_3\ B_1\ A_n \\
1 &= A_4\ A_1 \\
1 &= A_5\ A_2 \\
1 &= A_6\ A_3 \\
&\vdots \\
1 &= A_n\ A_{n-3} \\
1 &= \prod_{\nu=1}^{n} A_\nu
\end{aligned}$$

Aus der vierten bis n-ten Relation lassen sich alle A_ν $(\nu = 4, 5, \ldots, n)$ sukzessive ausdrücken durch A_1, A_2, A_3; ist $\nu = \mu + 3 \cdot \varrho$ $(\mu = 1, 2, 3)$, so ist: $A_\nu = A_\mu^{(-1)^\varrho}$.

Nach den Restklassen von n modulo 6 unterscheiden wir drei Fälle:

α) $n = 1 + 6k$. Es wird: $A_{n-2} = A_2^{-1}$, $A_{n-1} = A_3^{-1}$, $A_n = A_1$. und die Relationen zweiter Art werden im wesentlichen:

$$\left.\begin{aligned}
1 &= A_1\ B_1\ A_2^{-1} \cdot \cdot \cdot A_1\ = A_2\ B_1^{-1} \\
1 &= A_2\ A_3^{-1}\ B_1^{-1} \cdot \cdot \cdot A_3\ = B_1^{-1}\ A_2
\end{aligned}\right\} B_1^3 = (A_2\ B_1)^2.$$

$$\text{(4)} \qquad 1 = A_3\ B_1\ A_1$$

$$\text{(5)} \qquad 1 = (A_1\ A_2\ A_3\ A_1^{-1}\ A_2^{-1}\ A_3^{-1})^k \cdot A_1.$$

Setzen wir die Werte für A_1 und A_3 in (5) ein, so wird:

$$1 = (A_2\,B_1^{-1} \cdot A_2 \cdot B_1^{-1}\,A_2 \cdot B_1\,A_2^{-1} \cdot A_2^{-1} \cdot A_2^{-1}\,B_1)^k \cdot A_2\,B_1^{-1}$$

oder

$$1 = [(A_2\ B_1^{-1})^3 \cdot B_1^2\,A_2^{-3}\,B_1]^k \cdot A_2\,B_1^{-1}.$$

Wir schreiben A und B an Stelle von A_2 und B_1 und beachten. daß wegen (4) gilt:

$$(A\,B^{-1})^n = B^2\,A^{-n}\,B^{-2};$$

damit wird (5):

$$1 = (B^2\,A^{-3}\,B^{-2} \cdot B^2\,A^{-3}\,B)^k \cdot A\,B^{-1} = (B^{+2}\,A^{-6}\,B)^k \cdot A\,B^{-1}$$

oder

$$1 = B^{-1}\,(B^3\,A^{-6})^k \cdot B\,A\,B^{-1} = (A^{-6}\,B^3)^k \cdot B^{-2}\,A\,B = (A^{-6}\,B^3)^k \cdot A^{-1}.$$

oder auch

$$1 = B^{-3} \cdot A^7 \cdot (B^{-3}\,A^6)^{k-1}.$$

Die Fundamentalgruppe ist also die Gruppe von zwei Erzeugenden A und B mit den Relationen:

$$(A\,B)^2 = B^3 = A^7\,(B^{-3}\,A^6)^{k-1}.$$

Macht man abelsch und geht zur additiven Schreibung der Gruppe über, so wird, wenn wieder $\overline{A}$ und $\overline{B}$ die Erzeugenden der Abelschen Gruppe sind:

$$\left.\begin{aligned}(1+6k)\cdot\overline{A} - 3k\cdot\overline{B} &= 0\\ 2\cdot\overline{A} - \overline{B} &= 0\end{aligned}\right\} \qquad \overline{A} = \overline{B} = 0,$$

d. h. die Mannigfaltigkeit ist ein Poincaréscher Raum.

$\beta)$ $n = 3 + 6k$. Es wird: $A_{n-2} = A_1$, $A_{n-1} = A_2$, $A_n = A_3$ und die Relationen zweiter Art werden im wesentlichen:

$$\begin{aligned}1 &= A_1 B_1 A_1\\ 1 &= A_2 A_2 B_1^{-1}\\ 1 &= A_3 B_1 A_3\\ 1 &= (A_1 A_2 A_3 A_1^{-1} A_2^{-1} A_3^{-1})^k \cdot A_1 A_2 A_3\end{aligned}$$

oder

$$A_1^2 = A_2^{-2} = A_3^2; \quad (A_1 A_2 A_3)^{2k+1} = A_1^{2k}.$$

Numerische Invarianten: $p^{(1)} = 0$, zwei Torsionskoeffizienten der Dimension 1 vom Werte 2.

$\gamma)$ $n = 5 + 6k$. Es wird: $A_{n-2} = A_3$, $A_{n-1} = A_1^{-1}$, $A_n = A_2^{-1}$ und die Fundamentalgruppe wird die Gruppe von zwei Erzeugenden A und B mit den Relationen:

$$(A\,B)^2 = B^3 = A^5\,(B^{-3}\,A^6)^k,$$

wie man entsprechend dem Falle $n = 1 + 6k$ leicht nachrechnet. Macht man abelsch und geht zur additiven Schreibung der Gruppe über, so wird:

$$\left.\begin{aligned}(5+6k)\cdot\overline{A} - (3+3k)\cdot\overline{B} &= 0\\ 2\cdot\overline{A} - \overline{B} &= 0\end{aligned}\right\} \qquad \overline{A} = \overline{B} = 0,$$

d. h. die Mannigfaltigkeit ist ein Poincaréscher Raum.

2. Sei n gerade. Wir wählen wieder P_1 zum Ausgangspunkt der geschlossenen Wege und als Hilfswege nach den übrigen Ecken:

$$\begin{aligned}
P_1P_3 &= b_2^{-1} & P_1P_n &= a_n^{-1}\\
P_1P_5 &= b_2^{-1}b_4^{-1} & P_1P_{n-2} &= a_n^{-1}b_{n-1}\\
P_1P_7 &= b_2^{-1}b_4^{-1}b_6^{-1} & P_1P_{n-4} &= a_n^{-1}b_{n-1}b_{n-3}\\
&\vdots & &\vdots\\
P_1P_{n-3} &= b_2^{-1}b_4^{-1}b_6^{-1}\ldots b_{n-4}^{-1} & P_1P_4 &= a_n^{-1}b_{n-1}b_{n-3}\ldots b_5\\
P_1P_{n-1} &= b_2^{-1}b_4^{-1}b_6^{-1}\ldots b_{n-4}^{-1}b_{n-2}^{-1} & P_1P_2 &= a_n^{-1}b_{n-1}b_{n-3}\ldots b_5b_3.
\end{aligned}$$

Die Relationen erster Art, die den Kanten entsprechen, werden also:

$$
\begin{array}{lcccccccccccccccc}
B_2 & = & & & & & B_2^{-1} & \cdot & B_2 & & & & & & & = & 1 \\
B_4 & = & & & & B_2^{-1} & B_4^{-1} & \cdot & B_4 & \cdot & B_2 & & & & & = & 1 \\
B_6 & = & & & B_2^{-1} & B_4^{-1} & B_6^{-1} & \cdot & B_6 & \cdot & B_4 & B_2 & & & & = & 1 \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\
B_{n-2} & = & B_2^{-1} & B_4^{-1} & \ldots & & B_{n-2}^{-1} & \cdot & B_{n-2} & \cdot & B_{n-4} & B_{n-6} & \ldots & B_4 & B_2 & = & 1 \\
B_n & = & & & & & & & B_n & \cdot & B_{n-2} & B_{n-4} & \ldots & B_6 & B_4 \quad B_2; & & \\
B_1 & = & A_n^{-1} & B_{n-1} & B_{n-3} \quad \ldots & B_3 & B_3 & \cdot & B_1 & \cdot & A_n & & & & & & \\
B_3 & = & A_n^{-1} & B_{n-1} & B_{n-3} \quad \ldots & & B_5 & \cdot & B_3 & \cdot & B_3^{-1} & B_5^{-1} & \ldots & B_{n-3}^{-1} & B_{n-1}^{-1} \quad A_n & = & 1 \\
B_5 & = & & A_n^{-1} & B_{n-1} \quad \ldots & & B_7 & \cdot & B_5 & \cdot & B_5^{-1} & B_7^{-1} & \ldots & B_{n-1}^{-1} & A_n & = & 1 \\
B_7 & = & & & A_n^{-1} \quad \ldots & & B_9 & \cdot & B_7 & \cdot & B_7^{-1} & B_9^{-1} & \ldots & A_n & & = & 1 \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\
B_{n-3} & = & & & & A_n^{-1} & B_{n-1} & \cdot & B_{n-3} & \cdot & B_{n-3}^{-1} & B_{n-1}^{-1} & A_n & & & = & 1 \\
B_{n-1} & = & & & & & A_n^{-1} & \cdot & B_{n-1} & \cdot & B_{n-1}^{-1} & A_n & & & & = & 1 \\
\\
A_2 & = & A_n^{-1} & B_{n-1} & B_{n-3} \quad \ldots & & B_3 & \cdot & A_2 & \cdot & B_2 & & & & & & \\
A_4 & = & & A_n^{-1} & B_{n-1} \quad \ldots & & B_5 & \cdot & A_4 & \cdot & B_4 & B_2 & & & & & \\
A_6 & = & & & A_n^{-1} \quad \ldots & & B_7 & \cdot & A_6 & \cdot & B_6 & B_4 & B_2 & & & & \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & & & \\
A_{n-2} & = & & & & A_n^{-1} & B_{n-1} & \cdot & A_{n-2} & \cdot & B_{n-2} & B_{n-4} & \ldots & B_4 & B_2 & & \\
A_n & = & & & & & A_n^{-1} & \cdot & A_n & & & & & & & = & 1 \\
\\
A_1 & = & & & & & & & A_1 & \cdot & B_3^{-1} & & \ldots & B_{n-5}^{-1} & B_{n-3}^{-1} \quad B_{n-1}^{-1} \quad A_n & & \\
A_3 & = & & & & & B_2^{-1} & \cdot & A_3 & \cdot & B_5^{-1} & & \ldots & B_{n-3}^{-1} & B_{n-1}^{-1} \quad A_n & & \\
A_5 & = & & & & B_2^{-1} & B_4^{-1} & \cdot & A_5 & \cdot & B_7^{-1} & & \ldots & B_{n-1}^{-1} & A_n & & \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & & & \\
A_{n-3} & = & & B_2^{-1} & B_4^{-1} \quad \ldots & & B_{n-4}^{-1} & \cdot & A_{n-3} & \cdot & B_{n-1}^{-1} & A_n & & & & & \\
A_{n-1} & = & B_2^{-1} & B_4^{-1} & B_6^{-1} \quad \ldots & & B_{n-2}^{-1} & \cdot & A_{n-1} & \cdot & A_n . & & & & & &
\end{array}
$$

Wesentliche Relationen:

(I) $$A_n = B_2 = B_3 = \ldots = B_{n-1} = 1.$$

Die Relationen zweiter Art, die den Flächenumläufen entsprechen, werden mit (I):

$$1 = A_1 \quad B_1 \quad A_{n-2} B_n^{-1}$$
$$1 = A_2 \quad B_n \quad A_{n-1} B_1^{-1}$$
$$1 = A_3 \quad B_1 \quad \ldots \qquad B_1 = A_3^{-1}$$
$$1 = A_4 \quad A_1$$
$$1 = A_5 \quad A_2$$
$$1 = A_6 \quad A_3$$
$$\vdots$$
$$1 = A_{n-1} A_{n-4}$$

Aus der vierten bis $(n-1)$-ten Relation lassen sich alle A_ν $(\nu = 4, 5, \ldots, \overline{n-1})$ sukzessive ausdrücken durch A_1, A_2, A_3.
Ist $\nu = \mu + 3 \cdot \varrho$ $(\mu = 1, 2, 3)$, so ist:
$A_\nu = A_\mu^{(-1)^\varrho}$.

$$1 = B_{n-1} A_{n-3} \qquad \ldots B_n = A_{n-3}^{-1}$$
$$1 = \prod_{\nu=1}^{n} A_\nu.$$

Nach den Restklassen von n modulo 6 unterscheiden wir drei Fälle:

$\alpha)$ $n = 2 + 6k$. Es wird: $A_{n-3} = A_2^{-1}$, $A_{n-2} = A_3^{-1}$, $A_{n-1} = A_1$, $B_n = A_2$ und die Relationen zweiter Art werden:

$$1 = A_1 A_3^{-2} A_2^{-1} \ldots A_1 = A_2 A_3^2 \Big| A_2^3 A_3^3 = 1$$
$$1 = A_2^2 A_1 \quad A_3 \Big|$$
$$1 = \prod_{\nu=1}^{n} A_\nu = (A_2 A_3^2 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_3^{-2} A_2^{-1} \cdot A_2^{-1} \cdot A_3^{-1})^k \cdot A_2 A_3^2$$
$$= (A_2 A_3^2 A_2 \cdot A_3^{-1} A_2^{-2} A_3^{-1})^k \cdot A_2 A_3^2$$
$$= (A_2 A_3^2)^{3k+1} \cdot A_2^{3k}.$$

Die Fundamentalgruppe ist also die Gruppe von zwei Erzeugenden A und B mit den Relationen:

$$A^3 B^3 = (A B^2)^{3k+1} \cdot A^{3k} = 1.$$

Numerische Invarianten:

$$p^{(1)} = 0, \quad \tau^{(1)} = 3.$$

$\beta)$ $n = 4 + 6k$. Wie oben finden wir: Die Fundamentalgruppe ist die Gruppe von zwei Erzeugenden A und B mit den Relationen:

$$A^3 B^3 = (A B^{-1} A^{-2} B^{-1} A B^2)^k \cdot A B^{-1} A^{-2} B^{-1} = 1.$$

Numerische Invarianten:

$$p^{(1)} = 0, \quad \tau^{(1)} = 3.$$

$\gamma)$ $n = 6 + 6k$. Die Fundamentalgruppe ist die Gruppe von zwei Erzeugenden A und B mit den Relationen:

$$(A\,B\,A^{-1}\,B^{-1})^{k-1} \text{ vertauschbar mit } A \text{ und } B.$$

Numerische Invarianten:

$$p^{(1)} = 2, \quad \tau^{(1)} = -.$$

§ 3.

Das Homöomorphieproblem.

Die Fundamentalgruppen der gefundenen Poincaréschen Räume sind isomorph den Fundamentalgruppen der Poincaréschen Räume, die man aus dem Torusknoten (2, 3), der Kleeblattschlinge, gewinnen kann. Es erhebt sich also die Frage, ob die Mannigfaltigkeiten mit der gleichen Fundamentalgruppe auch homöomorph sind. Nun gilt der Satz:

> *Ein Poincaréscher Raum läßt sich dann und nur dann aus einem Torusknoten ableiten, wenn er sich fasern läßt und seine Faserung genau drei Ausnahmefasern der Vielfachheiten* $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ *hat, wobei* α_1, α_2, α_3, *paarweise relativ prime ganze positive Zahlen* (> 1) *sind und* $\alpha_3 = |q \cdot \alpha_1\alpha_2 - 1|$ *ist (*q *eine beliebige ganze Zahl). Ein solcher Poincaréscher Raum läßt sich nur aus einem einzigen Torusknoten auf eindeutig bestimmte Weise ableiten* [H. Seifert [6])].

Es genügt also zu zeigen, daß sich unsere Poincaréschen Räume fasern lassen und genau drei Ausnahmefasern der Vielfachheiten 2, 3, $6q \pm 1$ haben.

Um zu einer Faserung der Poincaréschen Räume $\mathfrak{M}^{(n)}$ zu kommen, schneiden wir $\mathfrak{M}^{(n)}$ zum Polyeder $\mathfrak{P}^{(n)}$ auf und zerlegen $\mathfrak{P}^{(n)}$ in Teilpolyeder $\mathfrak{T}^{(n)}$, die wir zweckmäßig deformieren und durch parallele Strecken fasern; identifizieren wir dann wieder zugehörige Seiten, so schließen sich die parallelen Strecken von $\mathfrak{T}^{(n)}$ zu geschlossenen Fasern von $\mathfrak{M}^{(n)}$ aneinander $(n = 6k \pm 1)$.

Sei $\mathfrak{M}^{(n)}$ zum Polyeder $\mathfrak{P}^{(n)}$ aufgeschnitten (Fig. 2). Wir zerlegen die Fünfecke (i) durch Strecken $R_{i-3}\,P_{i+1}$ je in ein Dreieck $\triangle_i$ und ein Viereck $\square_i$ und entsprechend $(i)'$ durch $S_{i-3}\,Q_{i+1}$ in $\triangle_i'$ und $\square_i'$ (Fig. 3a).

Die durch das Innere von $\mathfrak{P}^{(n)}$ hindurchgehenden Schnitte:

$$R_{i-3}\,P_{i+1}\,S_{i-5}$$
$$Q_{i-1}\,P_{i+1}\,S_{i-5} \qquad \text{(alle Indizes modulo } n = 6k \pm 1\text{)}$$
$$P_{i+1}\,S_{i-5}\,S_{i-6}\,P_i$$

---

[6]) H. Seifert, Topologie gefaserter dreidimensionaler Räume, Acta math. **60**, S. 211.

zerlegen $\mathfrak{P}^{(n)}$ in n „Tetraeder“ $R_{i-3}\ P_{i+1}\ Q_{i-1}\ S_{i-5}$, in n dreiseitige „Prismen“ $P_{i+1}\ R_{i-3}\ S_{i-5}\ P_i\ Q_{i-2}\ S_{i-6}$ und in ein n-seitiges „Prisma“ (Fig. 3b: $\mathfrak{P}^{(n)}$ nach Wegnahme der Tetraeder).

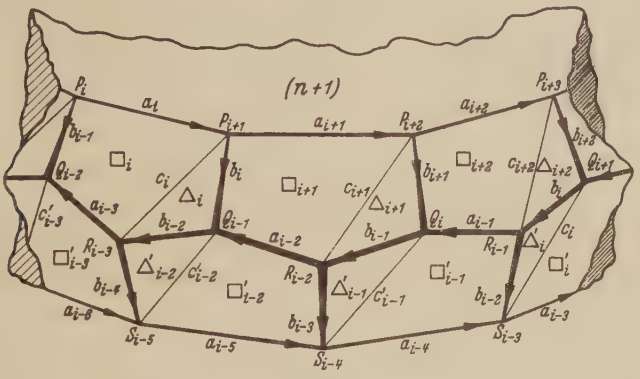


Fig. 3a.

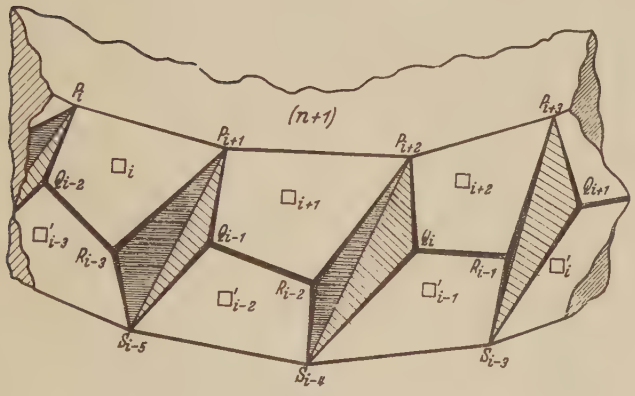


Fig. 3b.

Wir nehmen, im dreidimensionalen euklidischen Raum, n Tetraeder mit der Kante a (Fig. 4a), n gerade regelmäßige dreiseitige Prismen mit der Kante a und der Höhe a (Fig. 4b) und ein gerades regelmäßiges n-seitiges Prisma mit der Kante a und der Höhe a. Die Tetraeder und die Prismen fasern wir durch Strecken parallel den Kanten $P_{i+1}\ S_{i-5}$. Durch Zuordnung entsprechender Seiten stellen wir das Polyeder $\mathfrak{P}^{(n)}$ her; die zu identifizierenden Seiten sind kon-

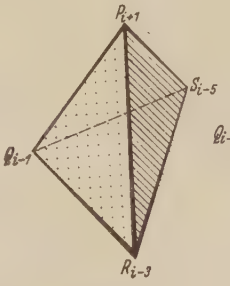


Fig. 4a.

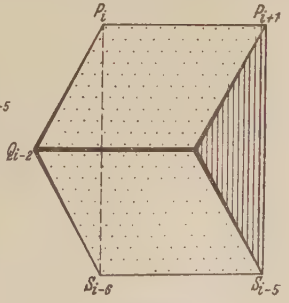


Fig. 4b.

gruent und in gleicher Weise gefasert. Wir können also die Zuordnung durch Aufeinanderlegen fasertreu bewirken. Um zu $\mathfrak{M}^{(n)}$ zu kommen, müssen wir noch die unter sich kongruenten $\triangle$ und $\square$ paarweise einander zuordnen; diese Zuordnung ist durch die ursprüngliche Zuordnung der Fünfecke schon festgelegt und kann durch Aufeinanderlegen kongruenter Flächen bewirkt werden. Wir behaupten: Die Faserstücke von $\mathfrak{T}^{(n)}$ bilden eine Faserung von $\mathfrak{M}^{(n)}$. Wir müssen also zeigen, daß die Faseraxiome erfüllt sind; diese lauten:

a) *Durch jeden Punkt geht genau eine Faser hindurch.*

b) *Die Fasern, auf die sich die Punkte der Mannigfaltigkeit verteilen, sind geschlossene Kurven.*

c) *Zu jeder Faser H gibt es eine Faserumgebung* [H. Seifert [7])].

a) Durch jeden Punkt von $\mathfrak{M}^{(n)}$ geht eine Faser; klar.

b) Die Fasern von $\mathfrak{M}^{(n)}$ sind geschlossen. Wir nennen die Kante $R_{i-3}P_{i+1}$, die das Fünfeck (i) zerlegt, c_i und entsprechend $S_{i-3}Q_{i+1}$ c_i'; die Mitte von $\triangle_i$ $(\square_i)$ nennen wir M_i (N_i), die Mitte von $\triangle_i'$ $(\square_i')$ M_i' (N_i'). Die Verbindungen von M_i (N_i) mit den Ecken von $\triangle_i$ $(\square_i)$ nennen wir $t_i^{1,2,3}$ $(s_i^{1,2,3,4})$ und entsprechend $t_{i'}^{1,2,3}$ $(s_{i'}^{1,2,3,4})$; (Fig. 5a und 5b.) Wir betrachten:

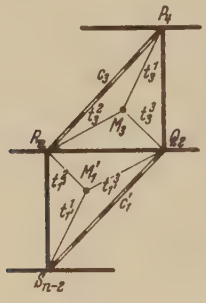


Fig. 5a.

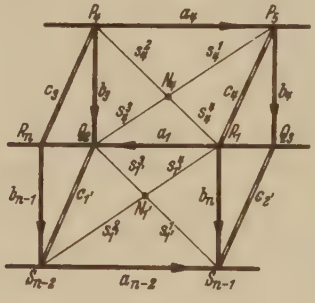


Fig. 5b.

1. Die Faser, die durch M_3 geht. Sie setzt sich zusammen aus den Faserstücken $M_1'M_3 + M_3'M_5 + M_5'M_7 + \ldots$; die Kongruenz $1 + 2x \equiv 1 \bmod (6k \pm 1)$ hat die kleinste positive Lösung (> 0): $x = 6k \pm 1$; die betrachtete Faser „fädelt" also alle $\triangle_i$ auf: $(6k \pm 1)$ Faserstücke von $\mathfrak{T}^{(n)}$ setzen sich zu einer geschlossenen Faser von $\mathfrak{M}^{(n)}$ zusammen.

2. Die Fasern, die durch t_1^1 laufen. Sie durchsetzen $\triangle_3$ in t_3^1 und laufen weiter in $\triangle_3'$ durch t_3^2; sie haben sich also um $\frac{2\pi}{3}$ gedreht. Nach $n = 6k \pm 1$ Schritten kommen sie zurück nach $\triangle_1'$, haben sich aber dann gedreht um $\frac{2\pi}{3} \cdot (6k \pm 1) = \pm \frac{2\pi}{3}$ modulo 2π, gehen also durch t_1^2 (bzw. t_1^3), d. h. die

[7]) l. c. [6]), S. 150.

Fasern sind noch nicht geschlossen, bis auf die Faser durch M_1'; sie schließen sich, wenn wir noch zweimal $6k \pm 1$ Faserstücke ansetzen. Damit ist gleichzeitig erwiesen, daß die Faser durch M_1' eine *dreifache Ausnahmefaser* ist.

3. Die Fasern, die durch ein Teildreieck von $\triangle_1'$ hindurchlaufen. Wieder setzen sich je $3 \cdot (6k \pm 1)$ Faserstücke von $\mathfrak{T}^{(n)}$ aneinander zu einer geschlossenen Faser von $\mathfrak{M}^{(n)}$.

4. Die Fasern, die durch $\square_1'$ laufen. Die gleichen Betrachtungen wie unter 1. bis 3. zeigen, daß sich je $2 \cdot (6k \pm 1)$ Faserstücke von $\mathfrak{T}^{(n)}$ aneinandersetzen zu einer geschlossenen Faser von $\mathfrak{M}^{(n)}$ und daß die Faser durch N_1' eine *zweifache Ausnahmefaser* ist.

5. Die Fasern, die durch $(n+1)'$ laufen. Wir teilen $(n+1)$ und $(n+1)'$ in je n Teildreiecke; an der Kante a_i liegen die Teildreiecke D_i und D_i'. Die Fasern, die durch D_i' gehen, laufen durch D_{i+6} (Index modulo $6k \pm 1$); nun hat die Kongruenz $1 + 6x \equiv 1 \mod (6k \pm 1)$ die kleinste positive Lösung (> 0): $x = 6k \pm 1$, d. h. es setzen sich je $6k \pm 1$ Faserstücke von $\mathfrak{T}^{(n)}$ aneinander zu einer geschlossenen Faser von $\mathfrak{M}^{(n)}$ und die Faser durch die Mitte von $(n+1)'$ ist eine *n-fache Ausnahmefaser*.

Damit sind alle Fasern von $\mathfrak{M}^{(n)}$ erschöpft: Alle Fasern von $\mathfrak{M}^{(n)}$ sind geschlossen.

c) Es ist noch zu zeigen, daß zu jeder Faser von $\mathfrak{M}^{(n)}$ eine Faserumgebung gehört. Das ist klar für alle Fasern durch innere Punkte von $\triangle_i$, $\square_i$, $(n+1)$. Eine besondere Betrachtung verlangen nur die Fasern, die durch die Kanten von $\mathfrak{P}^{(n)}$ laufen.

Wir betrachten:

1. Die Faser F durch einen Punkt der Kante a_i, der kein Eckpunkt von $\mathfrak{P}^{(n)}$ ist. (F fädelt alle Kanten a_i auf, Beweis nach b, 5.) F setzt sich zusammen aus $n = 6k \pm 1$ Faserstücken von $\mathfrak{T}^{(n)}$; wir wollen das Faserstück zwischen a_1 und a_7 betrachten: Dieses Faserstück hat in $\mathfrak{P}^{(n)}$ eine Faserteilumgebung U (= gefaserter Zylinder), die sich zusammensetzt aus zwei Halbzylindern $\mathfrak{H}_\alpha$ und $\mathfrak{H}_\beta$; $\mathfrak{H}_\alpha$ enthält alle Faserstücke von $\mathfrak{T}^{(n)}$ aus U, die durch $(n+1)'$ laufen, $\mathfrak{H}_\beta$ alle Faserstücke, die durch $\square_4'$ laufen (Fig. 6a). Diese beiden Halbzylinder sind noch zu ergänzen durch die „anschließenden" Faserstücke, zwischen (10) und (7)'. Fig. 6a zeigt einen Achsenschnitt dieses Zylinders (schematisch), von dem sich gerade $n = 6k \pm 1$ Exemplare zu einer Faserumgebung der Faser F aneinandersetzen.

2. Die Faser F durch einen Punkt der Kante b_1 in (2)', der kein Eckpunkt von $\mathfrak{P}^{(n)}$ ist. F setzt sich zusammen aus $2 \cdot (6k \pm 1)$ Faserstücken von $\mathfrak{T}^{(n)}$ und fädelt alle Kanten b_i und c_i auf. Wir betrachten das Faserstück zwischen b_1 in $(2)' - c_5 = c_5' - b_7$ in (8). In $\mathfrak{P}^{(n)}$ haben diese Faserstücke eine Faserteilumgebung U, die sich zusammensetzt aus zwei Halbzylindern

$\mathfrak{H}_\alpha$ und $\mathfrak{H}_\beta$; $\mathfrak{H}_\alpha$ enthält alle Faserstücke von $\mathfrak{T}^{(n)}$ aus U, die durch $\square_2'$ laufen, $\mathfrak{H}_\beta$ alle Faserstücke, die durch $\triangle_3'$ laufen, wobei diese Faserstücke noch zu ergänzen sind durch die anschließenden Faserstücke zwischen (5)′ und (8), (5)′ und (7), (7)′ und (9). Einen Achsenschnitt (schematisch) zeigt Fig. 6b.

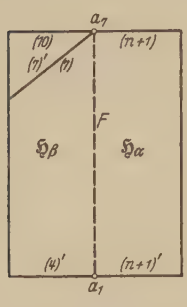


Fig. 6a.

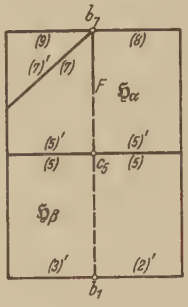


Fig. 6b.

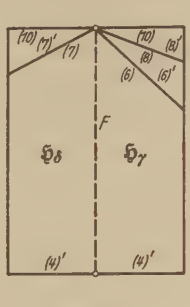


Fig. 6c.

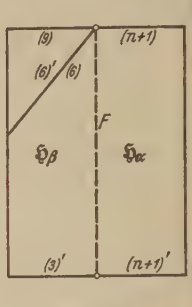


Fig. 6d.

Je $6k \pm 1$ solcher Doppelzylinder setzen sich zusammen zu einer Faserumgebung von F.

3. Die Faser F durch einen Eckpunkt von $\mathfrak{P}^{(n)}$. F setzt sich zusammen aus $6k \pm 1$ Faserstücken von $\mathfrak{T}^{(n)}$, die in $\mathfrak{P}^{(n)}$ je eine Faserteilumgebung U haben; diese Faserteilumgebungen setzen sich zusammen aus je vier Viertelzylindern $\mathfrak{V}_{\alpha-\delta}$. Betrachten wir das Faserstück zwischen S_1 und P_7: $\mathfrak{V}_\alpha$ enthält alle Faserstücke von $\mathfrak{T}^{(n)}$ aus U, die durch $(n+1)'$ laufen, $\mathfrak{V}_\beta$ enthält alle Faserstücke, die durch $\square_3'$ laufen, $\mathfrak{V}_\gamma$ alle Faserstücke durch $\triangle_4'$, $\mathfrak{V}_\delta$ alle Faserstücke durch $\square_4'$; diese Viertelzylinder sind noch zu ergänzen durch die anschließenden Faserstücke (siehe Fig. 6c, schematisch). $6k \pm 1$ solcher Zylinder setzen sich zusammen zu einer Faserumgebung von F.

Wir haben also gezeigt:

Unsere Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{(n)}$ läßt sich fasern; sie hat drei Ausnahmefasern der Vielfachheiten 2, 3, $6k \pm 1$. Unsere Poincaréschen Räume sind also homöomorph den Poincaréschen Räumen, die man aus dem Torusknoten (2, 3) gewinnen kann.

§ 4.

Weitere Verallgemeinerung (Beispiele).

Die Seiten des Polyeder $\mathfrak{P}^{(n)}$ lassen sich noch nach einigen anderen Gesichtspunkten so identifizieren, daß Mannigfaltigkeiten entstehen. Eine dieser Verallgemeinerungen soll im folgenden dargestellt werden.

a) Konstruktion.

Wir nehmen wieder das Polyeder $\mathfrak{P}^{(n)}$ (Fig. 2) und identifizieren die Seiten wie folgt, nachdem wir die Fünfecke um $\frac{\pi}{5}$ gleichsinnig gegeneinander verschraubt haben:

1. $(n+1) \to (n+1)'$ und $1 \to 2'$, $2 \to 3'$, und entsprechend;
2. $(n+1) \to (n+1)'$ und $1 \to 3'$, $2 \to 4'$, und entsprechend;
3. $(n+1) \to (n+1)'$ und $1 \to 4'$, $2 \to 5'$, und entsprechend;

usw.

Allgemein entsteht der Komplex $\mathfrak{K}_\nu^{(n)}$ *), indem wir identifizieren:

$$(n+1) \to (n+1)' \quad \text{und} \quad 1 \to (1+\nu)', \quad \text{und entsprechend;}$$
$$\nu = 1, 2, 3, \ldots, \overline{n-1}.$$

($\nu = 0$ ist der in § 2 behandelte Fall.)

In allen Fällen ist die Eulersche Charakteristik:

$$N_\nu = -(n, \nu) + [n + (n, \nu)] - [n+1] + 1 = 0,$$

die Komplexe $\mathfrak{K}_\nu^{(n)}$ sind also Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}_\nu^{(n)}$ [3]).

b) Numerische Invarianten.

1. Sei n eine Primzahl, also $(n, \nu) = 1$.

Wir betrachten die Inzidenzmatrix der Dimension 0 von $\mathfrak{M}_\nu^{(n)}$; da $(n, \nu) = 1$ $(= {}^{(0)}\alpha_\nu^{(n)})$, so ist der Rang von ${}^{(0)}\mathsf{E}_\nu^{(n)} : {}^{(0)}\gamma_\nu^{(n)} = 0$. Die Inzidenzmatrix der Dimension 1 hat $(n+1)$ Zeilen und $(n+1)$ Spalten und ist von der Form:

$$ {}^{(1)}\mathsf{E}_\nu^{(n)} = \begin{array}{c} \left.\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & . & . & 1 & . & . & . & . & 1 \\ 1 & 1 & & & & 1 & & 0 & & \\ . & & 1 & & & & . & & & \\ . & & & . & & 0 & & . & & \\ . & & & & . & & & & . & \\ . & & & & & . & & & 1 & \\ . & 1 & & 0 & & & . & & & \\ . & & . & & & & & . & & \\ . & 0 & & . & & & & & . & \\ 1 & & & & 1 & & & & & 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1 \\ k \\ n-k \end{array} \\ \begin{array}{cccccccccc} \leftrightarrow & \multicolumn{3}{c}{n-k} & \rightarrow & & \multicolumn{2}{c}{k} & & \rightarrow \end{array} \end{array} $$

$k = \nu + 3$ modulo n,
$\nu = 1, 2, 3, \ldots, \overline{n-1}$;
$\neq \overline{n-3}$.

Wir schließen den Fall $\nu = \overline{n-3}$ zunächst aus; um in den übrigen Fällen ${}^{(1)}\mathsf{E}_\nu^{(n)}$ auf die Normalform zu bringen, schließen wir wie folgt: Wir gehen

*) (n) ist ein Index, nicht die Dimension des Komplexes.

zur Determinante über, addieren alle Spalten zur ersten und entwickeln dann nach den Elementen der ersten Spalte:

$$\left|{}^{(1)}\mathsf{E}^{(n)}_{\nu}\right| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & . & 1 & . & . & 1 \\ 1 & 1 & & & 1 & & \\ 1 & & . & & & . & \\ . & & & . & & & 1 \\ . & 1 & & & . & & \\ . & & . & & & . & \\ 1 & & & 1 & & & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n & 1 & . & 1 & . & . & 1 \\ 3 & 1 & & & 1 & & \\ 3 & & . & & & . & \\ . & & & . & & & 1 \\ . & 1 & & & . & & \\ . & & . & & & . & \\ 3 & & & 1 & & & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot \left|{}^{(1)}\mathsf{E}^{(n)}_{\nu}\right| + n \cdot \begin{vmatrix} 1 & & & 1 & \\ & 1 & & & . \\ & & 1 & & 1 \\ 1 & & & . & \\ & . & & & . \\ & & 1 & & 1 \end{vmatrix}$$

also

$$-2 \cdot \left|{}^{(1)}\mathsf{E}^{(n)}_{\nu}\right| = n \cdot \begin{vmatrix} 1 & & & 1 & \\ & 1 & & & . \\ & & . & & 1 \\ 1 & & & . & \\ & . & & & . \\ & & 1 & & 1 \end{vmatrix},$$

die Determinante rechts bezeichnen wir zur Abkürzung mit $|\mathfrak{B}|$. Wir entwickeln $|\mathfrak{B}|$; $|\mathfrak{B}| = \Sigma \pm b_{11} b_{22} b_{33} \ldots b_{nn}$ [8]). Von diesen Summanden sind ungleich Null nur die beiden:

$$\begin{aligned} s_1 &= b_{11} b_{22} b_{33} \ldots b_{n\,n} = +1, \\ s_2 &= b_{k,1} b_{\overline{k+1},2} b_{\overline{k+2},3} \cdots b_{n,\overline{n-k+1}} b_{1,\overline{n-k+2}} \cdots b_{\overline{k-1},n} \\ &= (-1)^{(k-1)\cdot(n-k+1)} \cdot 1 = +1; \end{aligned}$$

also $|\mathfrak{B}| = +2$ und es wird: $|{}^{(1)}\mathsf{E}^{(n)}_{\nu}| = -n$; da n prim, ist die Normalform von ${}^{(1)}\mathsf{E}^{(n)}_{\nu}$:

$${}^{(1)}\mathsf{H}^{(n)}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & . & & \\ & & & . & \\ & & & & . \\ & 0 & & 1 & \\ & & & & n \end{pmatrix} \text{ vom Range } {}^{(1)}\gamma^{(n)}_{\nu} = n+1.$$

Es gibt also einen Torsionskoeffizienten der Dimension 1 vom Werte n und die Bettische Zahl der Dimension 1 ist:

$${}^{(1)}p^{(n)}_{\nu} = {}^{(1)}\alpha^{(n)}_{\nu} - {}^{(1)}\gamma^{(n)}_{\nu} - {}^{(0)}\gamma^{(n)}_{\nu} = [n + (n,\nu)] - (n+1) - 0,$$

$${}^{(1)}p^{(n)}_{\nu} = 0.$$

[8]) P. B. Fischer, Determinanten, Samml. Göschen.

Für $\nu = n - 3$ bestimmen sich die numerischen Invarianten zu: $(n-2)$ Torsionskoeffizienten vom Werte 2, ein Torsionskoeffizient vom Werte $2 \cdot n$, Bettische Zahl $= 0$.

2. Ist n nicht prim, so sind einige Fälle zu unterscheiden. Wichtig scheinen mir nur die Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}_\nu^{(n)}$, für die $(n, \nu) = 1$ und $(n, \nu + 3) = 1$. In diesen Fällen ergeben sich die numerischen Invarianten zu:

$$^{(1)}p_\nu^{(n)} = 0, \quad ^{(1)}\tau_\nu^{(n)} = n.$$

Es treten also in 1. und 2. Mannigfaltigkeiten auf, die dieselben numerischen Invarianten haben wie die Linsenräume. Wir wollen zeigen: Für n prim sind diese Mannigfaltigkeiten nicht homöomorph einem der Linsenräume mit denselben numerischen Invarianten. Wir betrachten die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_\nu^{(n)}$ (n prim) für $\nu = n - 2$ und untersuchen die Fundamentalgruppe. Da $^{(0)}\alpha_\nu^{(n)} = (n, \nu) = 1$, fehlen die Relationen erster Art. Die Relationen zweiter Art werden:

$$\left.\begin{array}{ll} 1 = A_1 & B^{-1} A_2 B^2 \\ 1 = A_2 & B^{-1} A_3 B^2 \\ 1 = A_3 & B^{-1} A_4 B^2 \\ \vdots & \\ 1 = A_{n-1} & B^{-1} A_n B^2 \\ 1 = A_n & B^{-1} A_1 B^2 \\ 1 = \prod_{\nu=1}^{n} & A_\nu \end{array}\right\} \text{ oder: } \begin{array}{l} A_1^{-1} = B^{\frac{3n+1}{2}} \cdot A_1 \cdot B^{-\frac{3n-1}{2}}, \\ 1 = (A_1 B^{-2} A_1^{-1} B^{-2})^{\frac{n-1}{2}} \cdot A_1 \cdot B^{3 \cdot \frac{n-1}{2}}. \end{array}$$

Die Fundamentalgruppe ist also die Gruppe von zwei Erzeugenden A und B mit den Relationen:

$$\mathfrak{F}: \quad A^{-1} = B^{\frac{3n+1}{2}} \cdot A \cdot B^{\frac{-3n+1}{2}}; \quad (A B^{-2} A^{-1} B^{-2})^{\frac{n-1}{2}} \cdot A \cdot B^{3 \cdot \frac{n-1}{2}} = 1.$$

Behauptung: $\mathfrak{F}$ ist nicht zyklisch.

Beweis: Wir nehmen die Zusatzrelation $B^3 = 1$. Dadurch erhalten wir eine Faktorgruppe $\mathfrak{F}'$ von $\mathfrak{F}$ mit den Relationen:

$$\mathfrak{F}': \qquad B^3 = 1; \quad A^{-1} = B^{-1} A B^2; \quad A^n = 1$$

oder

$$\mathfrak{F}': \qquad B^3 = (A B)^2 = A^n = 1 \text{ nicht zyklisch;}$$

also ist erst recht $\mathfrak{F}$ nicht zyklisch. Die Fundamentalgruppen der Linsenräume sind aber zyklisch, also ist $\mathfrak{M}_{n-2}^{(n)}$ nicht homöomorph einem Linsenraum (n, q) mit denselben numerischen Invarianten. In den übrigen Fällen ist das Aufstellen der zweiten Relation der Fundamentalgruppe $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{M}_\nu^{(n)}$ etwas

umständlicher; man findet: $\mathfrak{F}$ ist die Gruppe von zwei Erzeugenden A und B mit den Relationen:

$$\mathfrak{F}: \qquad A^{-1} = B^{\frac{3n+1}{2}} \cdot A \cdot B^{\frac{-3n+1}{2}}; \quad (A B^{-3\cdot\alpha})^n = B^{-3\cdot\alpha\cdot n},$$

wobei α eine ganze (positive oder negative) Zahl kleiner als n ist, die in gewisser Weise mit der Lösung einer Kongruenz modulo n zusammenhängt. Nimmt man wieder die Zusatzrelation $B^3 = 1$ hinzu, so erhält man die Faktorgruppe $\mathfrak{F}'$ von $\mathfrak{F}$:

$$\mathfrak{F}': \qquad B^3 = (A B)^2 = A^n = 1 \text{ nicht zyklisch,}$$

also erst recht $\mathfrak{F}$ nicht zyklisch, d. h. die Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}_\nu^{(n)}$ mit den numerischen Invarianten ${}^{(1)}p_\nu^{(n)} = 0$, ${}^{(1)}\tau_\nu^{(n)} = n$ sind nicht homöomorph den Linsenräumen (n, q) mit denselben numerischen Invarianten.

Zum Schluß bemerken wir noch, daß sich dieses Verallgemeinerungsprinzip auch bei der Konstruktion einiger anderer Mannigfaltigkeiten aus Polyedern anwenden läßt. So z. B. bei dem hyperbolischen Dodekaederraum [1]), beim Würfelraum (Quaternionenraum) [9]) und beim „abgestumpften Würfelraum“ [10]).

---

[9]) W. Threlfall und H. Seifert, Topologische Untersuchung der Diskontinuitätsbereiche endlicher Bewegungsgruppen des dreidimensionalen sphärischen Raumes, Math. Annalen **104** (1930), S. 60.

[10]) l. c. [9]), S. 63.

(Eingegangen am 22. Februar 1939.)

Über die Guichardschen Strahlensysteme.

Von

O. Pylarinos in Thessaloniki (Griechenland).

Wenn die abwickelbaren Flächen eines zweiparametrigen Strahlensystems beide Mäntel seiner Brennfläche nach ihren Krümmungslinien schneiden, so heißen diese Mäntel Guichardsche Flächen und das zugehörige Strahlensystem ein Guichardsches Strahlensystem [1]). Die Brennflächenmäntel des Strahlensystems sind in diesem Falle derart aufeinander punktweise zugeordnet, daß ihre Krümmungslinien einander entsprechen, wobei natürlich unter „entsprechenden Punkten" die Punkte, in denen ein Strahl des Systems diese Flächen berührt, zu verstehen sind.

Wir werden im folgenden einige der wichtigsten Eigenschaften der Guichardschen Strahlensysteme und Flächen, ohne Benutzung der allgemeinen Theorie der Strahlensysteme, angeben und weiter die spezielle Klasse Guichardscher Strahlensysteme untersuchen, von denen jedes eine flächentreue Abbildung der Mäntel seiner Brennfläche aufeinander herstellt.

1. Sei

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v) \tag{1.1}$$

die Vektorgleichung einer auf ihre Krümmungslinien als Parameterkurven bezogenen Fläche S.

Bezeichnet man mit $\frac{1}{\varrho_{1g}}, \frac{1}{\varrho_{2g}}$ bzw. $\frac{1}{\varrho_{1n}}, \frac{1}{\varrho_{2n}}$ die geodätischen bzw. normalen Krümmungen der Parameterkurven $v =$ konst. $u =$ konst. in einem Punkte $P(u, v)$ der Fläche, so gilt bekanntlich

$$\begin{cases} \frac{1}{\varrho_{1g}} = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}, \qquad \frac{1}{\varrho_{2g}} = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}, \\ \frac{1}{\varrho_{1n}} = \frac{L}{E}, \qquad \frac{1}{\varrho_{2n}} = \frac{N}{G}, \end{cases} \tag{1,2}$$

wobei E, F, G und L, M, N die Fundamentalgrößen erster bzw. zweiter Ordnung darstellen und $F = M = 0$ sind, da nach Voraussetzung die Krümmungslinien als Parameterkurven auf S gewählt sind.

Somit erhalten die Mainardischen Gleichungen für diese Fläche die Form

$$\frac{\partial L}{\partial v} = H \frac{\partial E}{\partial v}, \qquad \frac{\partial N}{\partial u} = H \frac{\partial G}{\partial u}, \tag{1,3}$$

[1]) Vgl. L. Bianchi, Lezioni di geometria differenziale, t. I_2, S. 491–493 (1927); V. und K. Kommerell, Theorie der Raumkurven und krummen Flächen, Bd. II., S. 159–164 (1931).

und die Gaußsche Gleichung lautet

$$K\sqrt{EG} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{\varrho_{2g}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{\varrho_{1g}}\right), \tag{1,4}$$

wo $K = \frac{1}{\varrho_{1n}\,\varrho_{2n}}$ die Gaußsche und $H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_{1n}} + \frac{1}{\varrho_{2n}}\right)$ die mittlere Krümmung der Fläche sind.

Bezeichnet man weiter mit $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ die Einheitsvektoren der Tangenten an die Parameterkurven und mit $\bar{l}$ den Einheitsvektor der Flächennormale in P, so ist

$$\bar{e}_1 = \frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}}{\sqrt{E}}, \qquad \bar{e}_2 = \frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}}{\sqrt{G}}, \qquad \bar{l} = \bar{e}_1 \times \bar{e}_2 \tag{1,5}$$

und für die partiellen Ableitungen dieser Vektoren nach den Variablen u, v gelten die bekannten Formeln [2])

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial u} = \left(\frac{\bar{e}_2}{\varrho_{1g}} + \frac{\bar{l}}{\varrho_{1n}}\right)\sqrt{E}, & \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial u} = -\frac{\bar{e}_1}{\varrho_{1g}}\sqrt{E}, & \frac{\partial \bar{l}}{\partial u} = -\frac{\bar{e}_1}{\varrho_{1n}}\sqrt{E}, \\ \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v} = -\frac{\bar{e}_2}{\varrho_{2g}}\sqrt{G}, & \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial v} = \left(\frac{\bar{e}_1}{\varrho_{2g}} + \frac{\bar{l}}{\varrho_{2n}}\right)\sqrt{G}, & \frac{\partial \bar{l}}{\partial v} = -\frac{\bar{e}_2}{\varrho_{2n}}\sqrt{G}, \end{cases} \tag{1,6}$$

da, wegen der obigen Voraussetzung, die geodätischen Windungen der Parameterkurven überall auf S verschwinden.

2. Die Gleichung des Strahlensystems, welches von den Tangenten an die Kurven $v = \text{konst.}$ der Fläche S gebildet wird, lautet

$$\bar{r}_1 = \bar{r}(u,v) + t\,\bar{e}_1(u,v). \tag{2,1}$$

Dabei bedeutet t die Abszisse (PP_1) des beliebigen Punktes P_1 eines Systemstrahles vom entsprechenden Punkt $P(u,v)$ der Leitfläche S. Letztere bildet gleichzeitig den ersten Mantel der Brennfläche des Systems. Da nun die Kurven $u = \text{konst.}$, $v = \text{konst.}$ die Krümmungslinien der Fläche S sind, so wird, nach einem bekannten Satz von Beltrami [3]) der Abstand der Brennpunkte eines Systemstrahles dem geodätischen Krümmungsradius ϱ_{2g} der Kurve $u = \text{konst.}$ im entsprechenden Punkt der Fläche S gleich; die Gleichung des zweiten Mantels S' der Brennfläche des betrachteten Strahlensystems ist also

$$\bar{r}' = \bar{r}(u,v) + \varrho_{2g}\,\bar{e}_1(u,v). \tag{2,2}$$

Durch partielle Differentiation von (2, 2) nach u, v erhält man mit Beachtung von (1, 6)

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{r}'}{\partial u} = \left(\sqrt{E} + \frac{\partial \varrho_{2g}}{\partial u}\right)\bar{e}_1 + \varrho_{2g}\left(\frac{\bar{e}_2}{\varrho_{1g}} + \frac{\bar{l}}{\varrho_{1n}}\right)\sqrt{E} \\ \frac{\partial \bar{r}'}{\partial v} = \frac{\partial \varrho_{2g}}{\partial v}\,\bar{e}_1; \end{cases} \tag{2,3}$$

[2]) Vgl. M. Lagally, Vektor-Rechnung, S. 90 (1934).

[3]) Vgl. G. Darboux, Léçons sur la theorie générale des surfaces, t. III., S. 121.

hieraus ergibt sich, als die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Parameterkurven auf S' ein orthogonales System bilden

$$\frac{\partial \bar{r}'}{\partial u} \cdot \frac{\partial \bar{r}'}{\partial v} = \frac{\partial \varrho_{2g}}{\partial v}\left(\sqrt{E} + \frac{\partial \varrho_{2g}}{\partial u}\right) = 0$$

und daher

$$\frac{\partial \varrho_{2g}}{\partial u} = -\sqrt{E}, \tag{2, 4}$$

da sonst $\frac{\partial \bar{r}'}{\partial v} = 0$ wäre und dann für die Kurven $u = \text{konst.}$ von S' $ds = 0$ folgen würde.

Wenn aber die Kurven $u = \text{konst.}$, $v = \text{konst.}$ auf S' sich überall orthogonal schneiden, so sind diese Kurven die Krümmungslinien der Fläche und das Strahlensystem (2, 1) ein Guichardsches Strahlensystem. Denn die Parameterkurven auf S' sind die Schnittlinien dieser Fläche mit den abwickelbaren Flächen des Strahlensystems und deswegen bilden sie bekanntlich ein konjugiertes Kurvensystem.

Die Gleichung (2, 4) *ist also, unter der Voraussetzung, daß die Fläche S auf ihre Krümmungslinien als Parameterkurven bezogen ist, die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Gleichung* (2, 1) *ein Guichardsches Strahlensystem darstellt.*

Die Gleichungen (2, 3) reduzieren sich in diesem Falle wegen (2, 4) auf die Folgenden

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{r}'}{\partial u} = \varrho_{2g}\sqrt{E}\left(\dfrac{\bar{e}_3}{\varrho_{1g}} + \dfrac{\bar{l}}{\varrho_{1n}}\right) = \varrho_{2g}\dfrac{\partial \bar{e}_1}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial \bar{r}'}{\partial v} = \dfrac{\partial \varrho_{2g}}{\partial v}\bar{e}_1 \end{cases} \tag{2, 5}$$

und die Integrabilitätsbedingung für dieses System lautet

$$\varrho_{2g}\frac{\partial^2 \bar{e}_1}{\partial v\,\partial u} = \frac{\partial \varrho_{2g}}{\partial u\,\partial v}\bar{e}_1. \tag{2, 6}$$

Daher erhält man leicht mit Benutzung der Gleichungen (1, 6) folgende Beziehungen

$$\frac{\partial^2 \varrho_{2g}}{\partial u\,\partial v} = \frac{\sqrt{EG}}{\varrho_{1g}}, \quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{\varrho_{1g}}\right) = \frac{\sqrt{EG}}{\varrho_{1n}\varrho_{2n}}, \quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{\varrho_{1n}}\right) = -\frac{\sqrt{EG}}{\varrho_{1g}\varrho_{2n}}. \tag{2, 7}$$

Die erste Gleichung (2, 7) ist eine unmittelbare Folge der Gleichung (2, 4).

Multipliziert man ferner die zweite und die dritte Gleichung (2, 7) mit $\frac{\sqrt{E}}{\varrho_{1g}}$ bzw. mit $\frac{\sqrt{E}}{\varrho_{1n}}$ und addiert, so folgt

$$\frac{\partial}{\partial v}\left\{E\left(\frac{1}{\varrho_{1g}^2} + \frac{1}{\varrho_{1n}^2}\right)\right\} = 0$$

und daher

$$E\left\{\frac{1}{\varrho_{1g}^2} + \frac{1}{\varrho_{1n}^2}\right\} = \frac{E}{\varrho_1^2} = \sigma_1^2(u);$$

wobei $\frac{1}{\varrho_1}$ die Krümmung der Kurven $v = \text{konst.}$ auf S ist. Dabei erhält man aus der Gaußschen Gleichung (1, 4) mit Rücksicht auf die zweite Gleichung (2, 7)

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{\varrho_{2g}}\right) = 0$$

und daher

$$\frac{G}{\varrho_{2g}^2} = \sigma_2^2(v). \tag{2, 9}$$

Somit erhält das Linienelement der Fläche die Form

$$ds^2 = \varrho_1^2 \sigma_1^2(u)\, du^2 + \varrho_{2g}^2 \sigma_2^2(v)\, dv^2.$$

Führt man nun

$$\int \sigma_1(u)\, du, \qquad \int \sigma_2(v)\, dv \tag{2, 10}$$

als neue Parameter ein, die der Einfachheit halber wieder mit u und v bezeichnet seien, so bleiben die Krümmungslinien Parameterkurven auf S und das Linienelement der Fläche erhält die Form

$$ds^2 = \varrho_1^2\, du^2 + \varrho_{2g}^2\, dv^2; \tag{2, 11}$$

weiter folgt für das Flächenelement der Fläche

$$dJ = \varrho_1\, \varrho_{2g}\, du\, dv. \tag{2, 12}$$

Ebenso lautet die Gleichung (2, 4) für die neuen Parameter allein

$$\frac{\partial \varrho_{2g}}{\partial u} = -\varrho_1 \tag{2, 13}$$

und die erste Gleichung (2, 7)

$$\frac{\partial^2 \varrho_{2g}}{\partial u\, \partial v} = \frac{\varrho_1 \varrho_{2g}}{\varrho_{1g}} = \varrho_{2g} \cdot \sin\theta, \tag{2, 14}$$

wo θ den Winkel zwischen der Hauptnormale der Kurve $v = \text{konst.}$ und der Flächennormale an S bezeichnet, oder

$$\frac{\partial^2 \varrho_{2g}}{\partial u\, \partial v} = \varrho_{2g} \cos\Omega, \tag{2, 15}$$

wenn Ω den Winkel der Brennebenen des Strahlensystems (2, 1) bedeutet; denn die Schmiegungsebene der Kurve $v = \text{konst.}$ ist die erste und die Tangentialebene an S die zweite Brennebene des Systems [4]).

Zunächst kann man leicht die Gaußsche und die mittlere Krümmung der Fläche S durch die Größen ϱ_{2g} und Ω und ihre partiellen Ableitungen nach u, v ausdrücken.

---

[4]) Vgl. V. und K. Kommerell, loc. cit., Bd. II., S. 142.

Es ergibt sich nämlich für die Gaußsche Krümmung K der Fläche aus der zweiten Gleichung (2, 7) mit Beachtung von (2, 11) und (2, 13)

$$K = -2\frac{\frac{\partial \cos\Omega}{\partial v}}{\frac{\partial \varrho_{2g}^2}{\partial u}}; \tag{2, 16}$$

und für die mittlere Krümmung H aus der ersten Gleichung (1, 3) mit Rücksicht auf (2, 11), (2, 13) und (2, 15)

$$H = \frac{\frac{\partial}{\partial v}(\varrho_1 \sin\Omega)}{\cos\Omega \cdot \frac{\partial \varrho_{2g}^2}{\partial u}}. \tag{2,17}$$

3. Ähnliche Formeln gelten auch für den zweiten Mantel der Brennfläche des betrachteten Guichardschen Strahlensystems.

Das Linienelement der Fläche S' läßt sich wegen (2, 5) in den neuen Parametern (2, 10) folgendermaßen ausdrücken:

$$ds'^2 = \varrho_{2g}^2 du^2 + \left(\frac{\partial \varrho_{2g}}{\partial v}\right)^2 dv^2. \tag{3, 1}$$

Bezeichnet man ferner mit $\frac{1}{\varrho_2'}$ die Krümmung der Kurven $u = \text{konst.}$ auf S', so müssen ϱ_{2g} und ϱ_2' der Gleichung

$$\frac{\partial \varrho_{2g}}{\partial v} = -\varrho_2' \tag{3, 2}$$

genügen, da die Fläche S' den zweiten Brennflächenmantel des Guichardschen Strahlensystems bildet und die Strahlen des Systems die Tangenten an die Kurven $u = \text{konst.}$ auf dieser Fläche sind.

Danach erhält das Linienelement (3, 1) die Form

$$ds'^2 = \varrho_{2g}^2 du^2 + \varrho_2'^2 dv^2 \tag{3, 3}$$

und das Flächenelement der Fläche wird

$$dJ' = \varrho_{2g}\varrho_2' du\, dv. \tag{3, 4}$$

Aus den Gleichungen (1, 4) und (3, 2) ergibt sich für die Gaußsche Krümmung K' der Fläche S' mit Berücksichtigung der Tatsache, daß die Tangentialebene an S' in einem Punkt P' die erste und die Schmiegungsebene der durch P' hindurchgehenden Kurve $u = \text{konst.}$ die zweite Brennebene des Strahlensystems sind,

$$K' = -2\frac{\frac{\partial \cos\Omega}{\partial u}}{\frac{\partial \varrho_{2g}^2}{\partial v}}; \tag{3, 5}$$

und aus der Gleichung (1, 3) für die mittlere Krümmung H' mit Beachtung von (3, 2) (3, 3) und (2, 15)

$$H' = \frac{\frac{\partial}{\partial u}(\varrho_2' \sin \Omega)}{\cos \Omega \cdot \frac{\partial \varrho_{2g}^2}{\partial v}}. \tag{3, 6}$$

Endlich folgt aus (2, 12) und (3, 4) die von H. Carathéodory angegebene Formel

$$\frac{dJ}{dJ'} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2'} = \frac{\varrho_{1g}}{\varrho_{2g}'}^{5}), \tag{3, 7}$$

wo $\frac{1}{\varrho_{2g}'}$ die geodätische Krümmung der Kurven u = konst. auf S' darstellt.

4. Nehmen wir jetzt an, daß in entsprechenden Punkten der Brennflächenmäntel des betrachteten Strahlensystems

$$\varrho_1 = \varrho_2'$$

ist, so folgt nach (3, 7), daß die Flächenelemente in entsprechenden Punkten der Flächen S, S' identisch sind, also diese Flächen sich mit Hilfe der Geraden des zugehörigen Strahlensystems aufeinander flächentreu abbilden.

Weiter ergibt sich aus (2, 13) und (3, 2)

$$\frac{\partial \varrho_{2g}}{\partial u} = \frac{\partial \varrho_{2g}}{\partial v},$$

woraus unmittelbar folgt, daß der Brennpunktabstand ϱ_{2g} des Strahlensystems in diesem Falle eine Funktion von $u + v$ allein sein muß; deswegen muß nach (2, 15) der Winkel Ω auch eine Funktion von $u + v$ sein. Es ergibt sich daher, mit Rücksicht auf die Formeln (2, 16), (3, 5) und (2, 17), (3, 6), daß die Flächen S und S' dieselbe Gaußsche und dieselbe mittlere Krümmung in entsprechenden Punkten besitzen.

Da andererseits die Gaußsche und die mittlere Krümmung jeder der Flächen S und S' Funktionen von $u + v$ allein sind, so sind die Hauptkrümmungsradien für jede Fläche durch eine Relation verbunden; infolgedessen sind in diesem Falle beide Brennflächenmäntel des Strahlensystems W-Flächen.

Man hat daher folgenden Satz:

Ist der Brennpunktabstand eines auf die Parameter (2, 10) *bezogenen Guichardschen Strahlensystems eine reine Funktion der Summe dieser Parameter, so sind die Mäntel seiner Brennflächen W-Flächen, die sich mit Hilfe der Strahlen des Systems aufeinander flächentreu abbilden und in entsprechenden Punkten dieselbe Gaußsche und dieselbe mittlere Krümmung besitzen.*

---

[5]) Vgl. C. Carathéodory, Bemerkungen zu den Strahlenabbildungen der geometrischen Optik, Math. Annalen 144 (1937), S. 187–193.

5. Sei nun S_1 eine auf ihre Asymptotenlinien bezogene pseudosphärische Fläche.

Das Linienelement dieser Fläche erhält durch geeignete Wahl der Parameter u, v die Form

$$ds_1^2 = du^2 + 2\cos 2\omega\, du\, dv + dv^2, \tag{5, 1}$$

wo 2ω, der Winkel der Asymptotenlinien der Fläche, die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 2\omega}{\partial u\, \partial v} = \sin 2\omega \tag{5, 2}$$

befriedigt[6]).

Zu jeder Lösung der Differentialgleichung (5, 2) entspricht eine bis auf ihre Lage im Raum vollständig bestimmte pseudosphärische Fläche, da ihre sechs Fundamentalgrößen als Funktionen von 2ω bestimmt werden können.

Die Gleichungen der Krümmungslinien der Fläche S_1 lauten in der obigen Parameterdarstellung

$$u + v = \text{konst.}, \quad u - v = \text{konst}^7);$$

hieraus folgt, daß, wenn man

$$u' = u + v, \quad v' = u - v$$

als neue Parameter einführt, die Krümmungslinien Parameterkurven auf S_1 werden; ihr Linienelement erhält dann die Form

$$ds_1^2 = \tfrac{1}{2}\{(1 + \cos 2\omega)\, du'^2 + (1 - \cos 2\omega)\, dv'^2\}. \tag{5, 3}$$

Nach einem bekannten Satz[8]) entspricht aber zu jeder Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \varrho_{2\sigma}}{\partial u\, \partial v} = \varrho_{2\sigma} \cos 2\omega, \tag{5, 4}$$

wo 2ω eine Funktion von u, v ist, welche der Differentialgleichung (5, 2) genügt, Guichardsche Strahlensysteme, für welche das sphärische Bild der abwickelbaren Flächen mit dem der Asymptotenlinien der zugehörigen pseudosphärischen Fläche zusammenfällt. Dabei gilt nach (2, 15) und (5, 4)

$$\cos 2\omega = \cos \Omega$$

und daher

$$2\omega = \pm \Omega. \tag{5, 5}$$

Gehört nun das Guichardsche Strahlensystem zu der im vorigen Paragraphen betrachteten speziellen Klasse, so wird Ω und nach (5, 5), 2ω eine Funktion

[6]) Vgl. V. und K. Kommerell, loc. cit., Bd. II., S. 22.
[7]) Vgl. L. Bianchi, loc. cit., Bd. I_2, S. 672.
[8]) Vgl. V. und K. Kommerell, l. c., Bd. II, S. 161.

von $u + v$ allein. Es folgt daher, daß der Koeffizient von du'^2 in (5, 3) eine reine Funktion von u' ist und infolgedessen die Krümmungslinien der Schar $v' =$ konst. geodätische Linien der pseudosphärischen Fläche S_1 sind.

Sind umgekehrt die Krümmungslinien der Schar $v' =$ konst. geodätische Linien der Fläche S_1, so muß 2ω nach (5, 3) eine reine Funktion von $u' = u + v$ sein und die den partikularen Lösungen der Differenzialgleichung (5, 4), welche gleichzeitig die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \varrho_{2v}}{du'^2} = \varrho_{2v} \cdot \cos 2\omega(u') \tag{5, 6}$$

befriedigen, entsprechenden Guichardschen Strahlensysteme müssen zu der oben erwähnten speziellen Klasse gehören.

Man kann also folgenden Satz formulieren:

Wenn die eine der Scharen der Krümmungslinien einer pseudosphärischen Fläche aus geodätischen Linien besteht, so sind die Brennflächenmäntel jedes zu dieser Fläche entsprechenden Guichardschen Strahlensystems, für welches der Brennpunktabstand eine Lösung der Differentialgleichung (5, 4) *ist, die der gewöhnlichen Differentialgleichung* (5, 6) *genügt, W-Flächen, die sich mit Hilfe der Strahlen des Systems aufeinander flächentreu abbilden und in entsprechenden Punkten dieselbe Gaußsche und dieselbe mittlere Krümmung besitzen.*

Es ist zu bemerken, daß in diesem Falle der Winkel 2ω der Asymptotenlinien der zugehörigen pseudosphärischen Fläche die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d^2 2\omega}{du'^2} = \sin 2\omega \tag{5, 7}$$

befriedigen muß, wo $u' = u + v$ ist; daraus folgt, daß in diesem Falle 2ω, im allgemeinen, eine elliptische Funktion von $u + v$ ist.

6. Schließlich kann man leicht die Hauptkrümmungsradien ϱ_{1n}, ϱ_{2n} jedes Brennflächenmantels eines solchen Guichardschen Strahlensystems als Funktionen eines Hilfsparameters ausdrücken.

Das Linienelement einer auf ihre Krümmungslinien als Parameterkurven bezogenen W-Fläche kann nämlich in die Form

$$ds^2 = du^2 f_1^2(u)\, \varrho_{1n}^2\, e^{2\int \frac{d\varrho_{1n}}{\varrho_{2n} - \varrho_{1n}}} + dv^2 f_2^2(v)\, \varrho_{2n}^2 \cdot e^{2\int \frac{d\varrho_{2n}}{\varrho_{1n} - \varrho_{2n}}} \tag{6, 1}$$

gebracht werden [9]), wo ϱ_{2n} als Funktion von ϱ_{1n} betrachtet ist.

Bildet nun die Fläche (1, 1) den ersten Brennflächenmantel eines zu der oben erwähnten Klasse gehörigen Guichardschen Strahlensystems, so erhält ihr Linienelement nach geeigneter Wahl der Parameter u, v die Form (2, 11);

[9]) Vgl. V. und K. Kommerell, loc. cit., Bd. II., S. 60.

dann gilt nach (6, 1)

$$(6,2)\qquad \begin{cases} \varrho_1 = \varrho_{1n} f_1(u)\, e^{\int \frac{d\varrho_{2n}}{\varrho_{2n}-\varrho_{1n}}}, \\ \varrho_{2g} = \varrho_{2n} f_2(v)\, e^{\int \frac{d\varrho_{2n}}{\varrho_{1n}-\varrho_{2n}}}. \end{cases}$$

Da aber in diesem Falle ϱ_1, θ und ϱ_{2g} Funktionen von $u+v$ allein sind und zudem ϱ_{2n} eine Funktion von ϱ_{1n} ist, so werden ϱ_{1n} und ϱ_{2n} Funktionen von $u+v$; und aus (6, 2) ergibt sich unmittelbar, daß

$$f_1(u) = c_1, \qquad f_2(v) = c_2$$

sein müssen; somit erhält man aus der ersten Gleichung (6, 2) die Beziehung

$$(6,3)\qquad \cos\theta = c_1 e^{\int \frac{d\varrho_{1n}}{\varrho_{2n}-\varrho_{1n}}}.$$

Führt man ferner den Hilfsparameter $w = e^{\int \frac{d\varrho_{1n}}{\varrho_{2n}-\varrho_{1n}}}$ ein, so können bekanntlich die Hauptkrümmungsradien der Fläche in der Form

$$\varrho_{1n} = \varphi(w)$$
$$\varrho_{2n} = \varphi(w) - w\,\dot{\varphi}(w)\ ^{10})$$

geschrieben werden, und somit erhält das Linienelement der Fläche die Form

$$ds^2 = c_1^2 \left\{\frac{\varphi(w)}{w}\right\}^2 du^2 + c_2^2 \left\{\frac{\varphi(w) - w\,\dot{\varphi}(w)}{\dot{\varphi}(w)}\right\}^2 dv^2.\ ^{11})$$

Dabei müssen nach (2, 13) die Größen $c_1 \cdot \frac{\varphi(w)}{w}$ und $c_2 \cdot \frac{\varphi(w) - w\,\dot{\varphi}(w)}{\dot{\varphi}(w)}$ die Differentialgleichung

$$(6,4)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\varphi(w) - w\dot{\varphi}(w)}{\dot{\varphi}(w)}\right\} = -\frac{c_1}{c_2}\frac{\varphi(w)}{w}$$

befriedigen.

Da aber w nach (6, 3) eine Funktion von $u' = u + v$ allein ist, so wird

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\varphi(w) - w\,\dot{\varphi}(w)}{\dot{\varphi}(w)}\right\} = \frac{d}{du'}\left\{\frac{\varphi(w) - w\,\dot{\varphi}(w)}{\dot{\varphi}(w)}\right\} = \varphi(w)\frac{d}{dw}\left(\frac{1}{\dot{\varphi}(w)}\right)\frac{dw}{du'}$$

und die Gleichung (6, 4) läßt sich jetzt in der Form

$$(6,5)\qquad \frac{d}{dw}\left(\frac{1}{\dot{\varphi}(w)}\right)\frac{dw}{du'} = -\frac{c_1}{c_2}\frac{1}{w}$$

schreiben.

Andererseits gilt nach (5, 5) und (5, 7)

$$\frac{d^2\theta}{du'^2} = -\cos\theta$$

---

10) Punkte bedeuten Ableitungen nach w.

11) Vgl. V. und K. Kommerell, loc. cit. Bd. II, S. 61.

und daraus nach einmaliger Integration

$$\left(\frac{d\theta}{du'}\right)^2 = c - 2\sin\theta. \tag{6,6}$$

Differenziert man ferner (6, 3) nach u', so hat man

$$c_1 \frac{dw}{du'} = -\sin\theta \cdot \frac{d\theta}{du'},$$

oder nach (6, 6)

$$c_1 \frac{dw}{du'} = \mp \sin\theta \sqrt{c - 2\sin\theta}. \tag{6,7}$$

Setzt man nun $\sin^2\theta = 1 - c_1^2 w^2 = p^2$ und beachtet, daß

$$dw = -\frac{p\,dp}{w\,c_1^2}$$

ist, so folgt aus (6, 7)

$$c_1 \frac{dw}{du'} = \pm p\sqrt{c - 2p},$$

und somit läßt sich die Gleichung (6, 5) in die Form

$$d\left(\frac{1}{\dot\varphi}\right) = \pm \frac{c_1^2\,dp}{c_2(1-p^2)\sqrt{c-2p}}$$

bringen.

Daraus, durch Integration, entnimmt man $\dot\varphi$ als Funktion von p, folglich auch von w; eine neue Quadratur liefert dann φ als Funktion von w.

Die Berechnung der Hauptkrümmungsradien der Brennflächenmäntel des Strahlensystems als Funktionen des Hilfsparameters w kann also in diesem Fall auf Quadraturen zurückgeführt werden.

Eingegangen am 10. Juli 1939.)

Über stützbare Flächen und ihre Entwicklung nach Kugelfunktionen.

Von

H. Gericke, Freiburg i. Br.

Eine Reihe von Eigenschaften ebener stützbarer Kurven, die mit der Fourier-Entwicklung der Stützfunktion zusammenhängen, sind von Hurwitz [1]), Geppert [2]), Görtler [3]), Kubota [4]) u. A. auf stützbare Flächen im Raume (und im R_n) und die Entwicklung ihrer Stützfunktion nach Kugelfunktionen übertragen worden. Hier sollen einige weitere derartige Eigenschaften angegeben werden, und zwar handelt es sich hauptsächlich um eine von Görtler [5]) angegebene Kennzeichnung der Basisbereiche durch eine Extremaleigenschaft und um die Frage, die in der Ebene zu den *Su*-Ovalen führte, nämlich die Kennzeichnung derjenigen Flächen, deren Trägheitsachsen beim Übergang zu einer Parallelfläche ungeändert bleiben, durch das Verschwinden gewisser Koeffizienten in der Entwicklung der Stützfunktion nach Kugelfunktionen.

1. Benutzte Formeln. Der Einheitsvektor der Normalen einer stützbaren Fläche sei

$$\xi = (\sin\vartheta\cos\varphi,\ \sin\vartheta\sin\varphi,\ \cos\vartheta),$$

also ϑ der Polabstand, φ die geographische Länge des sphärischen Bildes. Für die Entwicklung der Stützfunktion $h(\vartheta, \varphi)$ nach Kugelfunktionen wird je nach Zweckmäßigkeit eine der folgenden Formen benutzt:

(I) $$h(\vartheta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(a_{nm}\cos m\varphi + b_{nm}\sin m\varphi)\cdot P_n^m(\cos\vartheta)$$

oder zusammengefaßt zu

(Ia) $$h(\vartheta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(a_{nm}C_n^m + b_{nm}S_n^m),$$

(II) $$h(\vartheta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X_n.$$

---

[1]) Ann. Ecole norm. (3) 19 (1902), S. 357.
[2]) Math. Zeitschr. 42 (1937), S. 248.
[3]) Deutsche Mathematik, 3. Jahrg. (1938), S. 197.
[4]) Tôh. Sci. Rep. 14 (1925), S. 85 und 399.
[5]) Deutsche Mathematik, 2. Jahrg. (1937), S. 456.

Definition und Normierung der P_n^m s. Jahnke-Emde [6]); die X_n seien so normiert, daß

$$(1) \qquad \int X_m X_n \, d\omega = \begin{cases} 1 & \text{für } m = n, \\ 0 & \text{für } m \neq n \end{cases}$$

ist. $d\omega$ bedeutet das Flächenelement der Einheitskugel, das Integral ist hier stets über die ganze Einheitskugel zu erstrecken. Bekanntlich genügen X_n, P_n^m, C_n^m, S_n^m der Differentialgleichung

$$(2) \qquad \Delta X_n = -n(n+1) \cdot X_n.$$

Δ ist der zweite Beltramische Differentiator bezüglich der ersten Grundform des sphärischen Bildes.

Ferner benutzen wir die Orthogonalitätsrelationen, von denen noch die folgenden notiert seien

$$(3) \qquad \begin{aligned} &\int (C_n^m)^2 \, d\omega = \int (S_n^m)^2 \, d\omega = \frac{2\pi}{2n+1} \cdot \frac{(n+m)!}{(n-m)!} && \text{für } m \neq 0, \\ &\int (C_n^0)^2 \, d\omega = \frac{4\pi}{2n+1}. \end{aligned}$$

Den Vektor $\mathfrak{x}$ vom Nullpunkt zum Flächenpunkt berechnet man folgendermaßen: Man bezeichne (*nur* an dieser Stelle!) durch die Indizes 1, 2 die Ableitungen nach ϑ, φ und setze

$$\xi_i \xi_k = c_{ik}, \quad c_{ik} c^{km} = \delta_i^m.$$

Nach Definition der Stützfunktion ist

$$\mathfrak{x} \xi = h, \quad \mathfrak{x} \xi_i = h_i.$$

Man setze

$$\mathfrak{x} = A \xi + B^i \xi_i$$

und bestimme A und B^i durch Multiplikation mit ξ und $\xi_i c^{ik}$; man erhält

$$(4) \qquad \mathfrak{x} = h \xi + \nabla (h, \xi),$$

wobei ∇ der erste Beltramische Differentiator ist.

Die Oberfläche ist bekanntlich

$$O = \tfrac{1}{2} \int (R_1 + R_2) \, h \, d\omega.$$

R_1, R_2 sind die Hauptkrümmungsradien. Es ist

$$R_1 + R_2 = \Delta h + 2h,$$

also nach (1) und (2)

$$(5) \qquad O = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{n(n+1)}{2}\right) a_n^2.$$

---

[6]) Funktionentafeln, 2. Aufl., S. 176.

2. Aus (5) bzw. entsprechenden Gleichungen für die Darstellung I und für die gemischte Oberfläche läßt sich leicht ableiten:

a) Zwischen der Oberfläche $O(h)$ und der Oberfläche $O(m)$ des Vektorbereichs

$$m(\vartheta, \varphi) = h(\vartheta, \varphi) + h(\pi - \vartheta, \varphi + \pi) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} X_{2n}$$

besteht die Ungleichung

$$O(m) \geqq 4\, O(h);$$

das Gleichheitszeichen gilt nur für Mittelpunktskörper [s. W. Süß [7])]; diese sind durch $a_{2n+1} = 0$ gekennzeichnet [s. z. B. Görtler [3])].

b) a_{nm}, b_{nm} in I, a_n in II sind bis auf Zahlenfaktoren die gemischten Oberflächen der Fläche (h) mit den Flächen der Stützfunktionen C_n^m, S_n^m bzw. X_n.

3. Entsprechend dem ebenen Falle [s. Görtler [5])] sind die Basisbereiche $h_n = X_n$ durch folgende Extremaleigenschaft gekennzeichnet:

a) Die gemischte Oberfläche zweier verschiedener Flächen $(h_m), (h_n)$ verschwindet.

b) Unter den stützbaren Flächen (h), deren gemischte Oberfläche mit $(h_0), \ldots, (h_{m-1})$ verschwindet, liefert h_m das Minimum des Verhältnisses

$$v = \frac{O(h)}{\int h^2 \, d\omega}.$$

Beweis. Damit die gemischte Oberfläche von h und $h_0, \ldots, h_{m-1}$ verschwindet, muß h die Form haben

$$h = \sum_{n=m}^{\infty} a_n X_n.$$

Wegen (5) und $\int h^2 \, d\omega = \Sigma a_n^2$ ist

$$v(h) = 1 - \frac{\Sigma n(n+1) a_n^2}{2 \Sigma a_n^2} \qquad \text{(zu summieren von } n = m \text{ bis } \infty\text{)},$$

$$v(h_m) = 1 - \tfrac{1}{2} m(m+1),$$

also

$$v(h_m) - v(h) = \frac{1}{2 \Sigma a_n^2} \Sigma [n(n+1) - m(m+1)] a_n^2 \geqq 0$$

und nur dann gleich Null, wenn $a_n = 0$ ist für $n > m$, w. z. b. w.

4. Die Koeffizienten a_{10}, a_{11}, b_{11} bestimmen den *Krümmungsschwerpunkt*. Das läßt sich so nachrechnen: Der Vektor zum Krümmungsschwerpunkt ist, wenn K die Gaußsche Krümmung, do das Oberflächenelement der Fläche ist,

$$\mathfrak{s} = \frac{\int \mathfrak{x} K \, do}{\int K \, do} = \frac{1}{4\pi} \int \mathfrak{x} \, d\omega = \frac{1}{4\pi} \int [h + \nabla(h, \xi)] \, d\omega.$$

---

[7]) Math. Annalen **101** (1929), S. 256, Fußnote 7a.

Nach der Greenschen Formel ist

$$\int \nabla (h, \xi)\, d\omega = -\int h\, \Delta\, \xi\, d\omega.$$

Nun sind die Komponenten von ξ gerade

(6) $$C_1^1,\ S_1^1,\ C_1^0,$$

also ist nach (2)

$$\Delta\, \xi = -2\, \xi,$$

somit

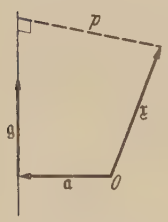
$$\mathfrak{s} = \frac{3}{4\pi} \int h\, \xi\, d\omega.$$

Mittels (Ia), (6) und (3) erhält man

$$s_1 = a_{11}, \quad s_2 = b_{11}, \quad s_3 = a_{10}.$$

5. Wir denken die Fläche mit Masse belegt, deren Dichte in jedem Punkte gleich der Gaußschen Krümmung ist, und untersuchen das *Trägheitsmoment* bezüglich der Geraden, die durch die Gleichung

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{a} + t\mathfrak{g}$$



gegeben ist; dabei sei $\mathfrak{a}\mathfrak{g} = 0$, $\mathfrak{g}^2 = 1$. Der Abstand des Punktes $\mathfrak{x}$ von dieser Geraden ist

$$p = |(\mathfrak{x} - \mathfrak{a}) \times \mathfrak{g}|,$$

also ist das Trägheitsmoment

$$T = \int p^2\, K\, do = \int p^2\, d\omega = \int (\mathfrak{x}^2 - (\mathfrak{x}\mathfrak{g})^2 + \mathfrak{a}^2 - 2\,\mathfrak{x}\mathfrak{a})\, d\omega.$$

Als Nullpunkt sei der Krümmungsschwerpunkt gewählt; dann ist

$$\int (\mathfrak{x}\mathfrak{a})\, d\omega = \mathfrak{a} \int \mathfrak{x}\, d\omega = 0,$$

also

$$T = \int [\mathfrak{x}^2 - (\mathfrak{x}\mathfrak{g})^2]\, d\omega + 4\,\pi\,\mathfrak{a}^2.$$

Daraus liest man ab: Unter allen Achsen einer festen Richtung $\mathfrak{g}$ liefert die durch den Krümmungsschwerpunkt gehende das kleinste Trägheitsmoment T_0. Hat die Achse den Abstand r vom Krümmungsschwerpunkt, so addiert sich zu T_0 die Oberfläche der Kugel vom Radius r.

6. Der Krümmungsschwerpunkt sei Nullpunkt. Diejenigen durch ihn gehenden Achsen, für die das Trägheitsmoment einen Extremwert annimmt, heißen Trägheitsachsen. *Wir fragen nach solchen Flächen, für die die Trägheitsachsen beim Übergang zu beliebigen Parallelflächen ungeändert bleiben.*

Um die Trägheitsachsen zu finden, haben wir die Komponenten von $\mathfrak{g}: g_1, g_2, g_3$ so zu bestimmen, daß

$$\int \sum_{i,k} (x_i g_i)(x_k g_k)\, d\omega$$

einen Extremwert annimmt unter der Nebenbedingung

$$\sum_i g_i g_i - 1 = 0.$$

Setzen wir zur Abkürzung $\int x_i x_k \, d\omega = B_{ik}$, so erhalten wir zur Bestimmung der g_i die Gleichungen

$$\begin{aligned} &(B_{11} + t)\, g_1 + B_{12}\, g_2 + B_{13}\, g_3 = 0, \\ &B_{21}\, g_1 + (B_{22} + t)\, g_2 + B_{23}\, g_3 = 0, \\ &B_{31}\, g_1 + B_{32}\, g_2 + (B_{33} + t)\, g_3 = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Damit dies Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung hat, muß t so bestimmt werden, daß

$$||B_{ik} + t\, \delta_{ik}|| = 0$$

wird. Es gibt im allgemeinen drei Lösungen dieser Gleichung und somit drei Trägheitsachsen.

Wir wollen das Koordinatensystem so drehen, daß

$$B_{12} = B_{23} = B_{31} = 0$$

wird; dann ist wegen der Symmetrie auch $B_{21} = B_{32} = B_{13} = 0$. Daß das möglich ist, kann man etwa so sehen: Die Gleichung für t ist vom dritten Grade, hat somit mindestens eine reelle Wurzel. Also gibt es mindestens eine reelle Trägheitsachse. Wir wählen sie als x_3-Achse. Zu ihr möge $t = t_1$ gehören. Dann erfüllen die Werte

$$t = t_1, \quad g_1 = g_2 = 0, \quad g_3 = 1$$

die Gleichungen (7), und daraus folgt $B_{13} = B_{23} = 0$. Um noch B_{12} zu Null zu machen, drehe man um die x_3-Achse:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \cos\psi \cdot x_1 - \sin\psi \cdot x_2, \\ \bar{x}_2 &= \sin\psi \cdot x_1 + \cos\psi \cdot x_2. \end{aligned}$$

Dann wird

$$\bar{B}_{12} = \tfrac{1}{2} \sin 2\psi\, (B_{11} - B_{22}) + \cos 2\psi \cdot B_{12}$$

und man hat nur ψ aus der Gleichung

$$\operatorname{ctg} 2\psi = \frac{B_{22} - B_{11}}{2 \cdot B_{12}}$$

zu bestimmen.

In diesem Koordinatensystem wird aus (7)

$$\begin{aligned} (B_{11} + t)\, g_1 &= 0, \\ (B_{22} + t)\, g_2 &= 0, \\ (B_{33} + t)\, g_3 &= 0. \end{aligned}$$

Die drei Lösungen sind $t_i = -B_{ii}$, die Trägheitsachsen sind die Koordinatenachsen. Ausnahmefälle treten ein, wenn $B_{11} = B_{22}$ oder $B_{11} = B_{22} = B_{33}$ ist. Im ersten Falle ist jede Gerade der $x_1 x_2$-Ebene durch O Trägheitsachse, im zweiten Falle überhaupt jede Gerade durch O. Der erste Fall tritt z. B. bei Drehflächen, der zweite bei der Kugel ein.

Wir haben nun das Verhalten von B_{12}, B_{13}, B_{23} beim Übergang zu Parallelflächen zu untersuchen. Die Parallelfläche η habe die Stützfunktion $k = h + r$, $r = \text{const}$; es sei $C_{ik} = \int y_i y_k \, d\omega$. Ich nehme das Ergebnis der Rechnung vorweg: Es ist

$$C_{12} - B_{12} = \frac{64}{5} \pi \cdot r \cdot b_{22},$$
$$C_{13} - B_{13} = \frac{32}{5} \pi \cdot r \cdot a_{21},$$
$$C_{23} - B_{23} = \frac{32}{5} \pi \cdot r \cdot b_{21}.$$

Ist also $a_{21} = b_{21} = b_{22} = 0$, so sind wieder die Koordinatenachsen Trägheitsachsen, ist $a_{21} = b_{21} = 0$, $b_{22} \neq 0$, so bleibt die x_3-Achse Trägheitsachse, während die beiden anderen Trägheitsachsen gegen die ursprünglichen gedreht sind.

Es bleibt die Berechnung der $C_{ik} - B_{ik}$ durchzuführen.

$$C_{ik} - B_{ik} = \int [(x_i + r\,\xi_i)(x_k + r\,\xi_k) - x_i x_k] \, d\omega$$
$$= r^2 \int \xi_i \, \xi_k \, d\omega + r \int (x_i \, \xi_k + x_k \, \xi_i) \, d\omega.$$

Nun ist

$$\xi_1 \xi_2 = \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \, \sin 2\varphi = \frac{1}{6} S_2^2,$$
$$\xi_1 \xi_3 = \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi = \frac{1}{3} C_2^1, \tag{8}$$
$$\xi_2 \xi_3 = \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi = \frac{1}{3} S_2^1.$$

Zunächst folgt hieraus und aus

$$\int S_2^2 \, d\omega = \int S_2^2 \, C_0^0 \, d\omega = 0$$

und entsprechenden Gleichungen das Verschwinden des Faktors von r^2.

In den Faktor von r tragen wir x_i aus (4) ein und erhalten

$$x_i \, \xi_k + x_k \, \xi_i = 2\,h \, \xi_i \, \xi_k + \nabla \, (h, \, \xi_i \, \xi_k).$$

Nach der Greenschen Formel und weil nach (8) die $\xi_i \, \xi_k$ Kugelfunktionen zweiter Ordnung sind, ist

$$\int \nabla \, (h, \, \xi_i \, \xi_k) \, d\omega = -\int h \, \Delta \, (\xi_i \, \xi_k) \, d\omega = 6 \int h \, \xi_i \, \xi_k \, d\omega,$$

also

$$\int (x_i\,\xi_k + x_k\,\xi_i)\,d\omega = 8\int h\,\xi_i\,\xi_k\,d\omega.$$

Einsetzen von (8) und (Ia) ergibt die behaupteten Gleichungen.

Bemerkung. Daß der Koeffizient b_{22} eine Rolle spielt, a_{22} aber nicht, hängt damit zusammen, daß $B_{12} = \int x_1\,x_2\,d\omega$ sowohl bei Spiegelung an der x_1x_3-Ebene wie an der x_2x_3-Ebene sein Vorzeichen ändert. Das gleiche gilt für C_{12}. Also gilt, wenn die zur gespiegelten Fläche gehörigen Größen durch Überstreichen bezeichnet werden, in beiden Fällen

$$\bar{C}_{12} - \bar{B}_{12} = -\,(C_{12} - B_{12}). \tag{9}$$

Andererseits ist die Stützfunktion der gespiegelten Fläche

$$\bar{h}(\vartheta,\varphi) = \sum (\bar{a}_{n\,m}\cos m\,\varphi + \bar{b}_{n\,m}\sin m\,\varphi)\,P_n^m = h(\vartheta,-\varphi) \text{ bzw. } h(\vartheta,\pi-\varphi).$$

In beiden Fällen erhält man

$$\bar{a}_{22} = a_{22}, \quad \bar{b}_{22} = -\,b_{22}.$$

Gerade die zweite dieser Beziehungen ist mit (9) im Einklang.

Geometrisch läßt sich das noch so deuten: Sei $a_{21} = b_{21} = 0$, also die x_3-Achse Trägheitsachse, die beim Übergang zur Parallelfläche ungeändert bleibt. Dann ist der Winkel, um den die beiden anderen Achsen der Parallelfläche gegenüber denen der Ausgangsfläche gedreht sind, gegeben durch $\operatorname{ctg} 2\,\psi = \frac{C_{11} - C_{12}}{2\,C_{13}}$. Bei den beiden genannten Spiegelungen ändert ψ sein Vorzeichen, wie es ja auch sein muß.

(Eingegangen am 20. Juli 1939.)

Bemerkungen über Laplacesche Integrale, deren Wachstum von Exponentialcharakter ist. I.

Von

Vojislav G. Avakumović in Beograd.

Das Interesse für Sätze Tauberscher Art des Abel-Laplaceschen Verfahrens

$$J(s) = \int_0^\infty e^{-su}\, d\,\{A(u)\},$$

die sich auf eine Asymptotik der Form $J(s) \sim A \exp[F(s)]$, $s \to 0$ (wo $F(s) \to \infty$, $s \to 0$) beziehen, wurde hauptsächlich durch die G. H. Hardyschen und S. Ramanujanschen Arbeiten [1]) über „partitio numerorum" erweckt. Der allgemeinste Satz in dieser Richtung stammt von W. T. Martin und N. Wiener [2]), für dessen Wortlaut ich auf die Einleitung ihrer Abhandlung verweise.

Um das Wesentliche hervortreten zu lassen, beschränke ich mich in dieser Note auf den Fall $F(t) = 1/t$, d. h.

$$J(s) \sim A \exp[1/s], \quad s \to 0. \tag{1}$$

In diesem Falle ergibt der Satz von W. T. Martin und N. Wiener schon bekannte Sätze von H. T. Vijayaraghavan und N. Wiener [3]), H. R. Pitt [4]) und J. Karamata [5]). Bei allen diesen Sätzen ist die „Konvergenzbedingung" durch

$$A(u) \text{ nicht abnehmend} \tag{2}$$

gegeben und aus (1) gewinnt man dann die Abschätzung

$$\exp[2\sqrt{u} - o(u^{\frac{1}{4}})] < A(u) < o\{\exp[2\sqrt{u}]\}.$$

Ersetzt man aber die Bedingung (2) durch die schärfere

$$e^{-2\sqrt{u}} A(u) \text{ nicht abnehmend},$$

---

[1]) G. H. Hardy und S. Ramanujan, Asymptotic formulae in combinatory analisys, Proc. London Math. Soc. **17** (1918), S. 75—115.

[2]) W. T. Martin und N. Wiener, Taylor's series of functions of smooth growth in the unit circle, Duke Math. Journ. **4** (1938), S. 384—392.

[3]) W. T. Martin und N. Wiener, loc. cit., S. 385.

[4]) W. T. Martin und N. Wiener, loc. cit., S. 386.

[5]) J. Karamata, Quelques théorèmes sur les intégrales de Laplace-Abel [2. Congr. Interbalkan. des Math., Bucarest, 12—IX—1937], Bull. Mat. Soc. Roum. Sci. **40**, Nr. 1/2 (1938), S. 107—108.

so folgt aus (1) das asymptotische Verhalten der Funktion $A(u)$ selbst, d. h.

$$A(u) \sim \frac{A}{2\sqrt{\pi}}\, u^{-\frac{1}{4}} e^{2\sqrt{u}}, \quad u \to \infty \text{ [6]}. \tag{3}$$

Diese zwei extremen Fälle verbinde ich durch folgenden

Satz I. *Sei* $\frac{1}{4} \leqq \alpha \leqq \frac{1}{2}$, $a > 0$ *für* $\frac{1}{4} < \alpha \leqq \frac{1}{2}$ *und* $\geqq 0$ *für* $\alpha = \frac{1}{4}$, *und*

$$C(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha = \frac{1}{4}, \\ 0 & \text{für } \frac{1}{4} < \alpha \leqq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Die Funktion $A(u)$ *sei von beschränkter Schwankung in jedem endlichen Intervall,*

$$\exp[a u^{\alpha} - 2\sqrt{u}]\, A(u) \text{ nicht abnehmend} \tag{4}$$

und das Integral

$$J(s) = \int_0^{\infty} e^{-s u}\, d\{A(u)\} \text{ konvergent für } s > 0.$$

Aus

$$J(s) \sim A \exp[1/s], \quad s \to 0 \tag{5}$$

folgt dann

$$\frac{A}{2\sqrt{\pi}}\, u^{\frac{2\alpha-1}{2}} \exp\left[2\sqrt{u} - o\left(u^{\frac{4\alpha-1}{4}}\right)\right] < A(u) < \left\{\frac{A}{2\sqrt{\pi}} C(\alpha) + o(1)\right\} u^{\frac{2\alpha-1}{2}} \exp[2\sqrt{u}].$$

Will man aber unter der geringeren Annahme (2) die asymptotische Formel (3) doch erhalten, so muß die Bedingung (1) durch die viel schärfere:

$$J(s) - A \exp[1/s], \quad s = \delta + t^2 + i\lambda t, \quad \lambda = \text{const} \tag{6}$$

ist bei $\delta \to 0$ *gleichmäßig in* t *beschränkt*, ersetzt werden [7].

Dieser Satz ist vom Typus derjenigen Sätze, die zu einer neuen Beweismethode bei einigen Sätzen der „partitio numerorum" führen [8].

---

[6]) Vgl. diesbezüglich: V. G. Avakumović und J. Karamata, Über einige Taubersche Sätze, deren Asymptotik von Exponentialcharakter ist. I, Math. Zeitschr. 41 (1936), S. 345–356.

[7]) V. G. Avakumović, Über das Verhalten Laplacescher Integrale an der Konvergenzgrenze mit neuem Beweis eines Satzes von Hardy-Ramanujan über das asymptotische Verhalten der Zerfällungskoeffizienten [2. Congr. Interbalkan. des Math., Bucarest, 12–IX–1937], Bull. Math. Soc. Roum. Sci 40, Nr. 1/2 (1938), S. 101–106.

[8]) Eine unwesentliche Verallgemeinerung dieses Satzes ergibt z. B. die Hardy-Ramanujansche Formel

$$p(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}\, n} \exp\left[2\sqrt{\frac{\pi^2}{6} n}\right], \quad n \to \infty.$$

In diesem Falle ist sogar der Beweis im gewissen Sinne elementar da dann die der Bedingung (6) entsprechende Formel für jedes λ erfüllt ist. Vgl. diesbezüglich: V. G. Avakumovic, Neuer Beweis eines Satzes von G. H. Hardy und S. Ramanujan über das asymptotische Verhalten der Zerfällungskoeffizienten, Acta Arith. (im Druck).

Hier gebe ich den Beweis des Satzes I und stütze mich dabei wesentlich auf den allgemeinen Satz Tauberscher Art von N. Wiener[9]).

Beweis des Satzes I: O. B. d. A. sei $A(0) = 0$. Dann ist

$$J(1/x) = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-s/u} A(u)\,du, \quad x < \infty.$$

Es werde zur Abkürzung

$$B(t) = \begin{cases} t^{\frac{1-2\alpha}{2}} \exp[-2\sqrt{t}]\,A(t) & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gesetzt, so daß (5) mit

$$(7)\quad e^{-x} J(1/x) = \frac{1}{x}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-(\sqrt{u/x} - \sqrt{x})^2]\, B(u)\, u^{\frac{2\alpha-1}{2}}\, du \to A, \quad x \to \infty$$

gleichbedeutend ist. Da nach der Voraussetzung $\exp[au^\alpha - 2\sqrt{u}]\,A(u)$ nicht abnehmend ist, so ist um so mehr

(8) $\exp[au^\alpha]\,B(u)$ nicht abnehmend.

Also ist

$$e^{-x} J(1/x) > \frac{1}{x}\int_{x^2}^\infty \exp[-(\sqrt{u/x} - \sqrt{x})^2]\,\{\exp[au^\alpha]\,B(u)\}\,\exp[-au^\alpha]\,u^{\frac{2\alpha-1}{2}}\,du$$
$$> B(x^2)\,I(x),$$

wo

$$I(x) = x^{-1}\exp[a\,x^{2\alpha}]\int_{x^2}^\infty \exp[-(\sqrt{u/x} - \sqrt{x})^2 - a\,u^\alpha]\,u^{\frac{2\alpha-1}{2}}\,du$$

gesetzt wurde. Nun ist (Substitution $u = tx^2$)

$$I(x) > x^{2\alpha}\int_1^{(1+x^{-2\alpha})^2} \exp[-x(\sqrt{t} - 1)^2 - a\,x^{2\alpha}(t^\alpha - 1)]\,t^{\frac{2\alpha-1}{2}}\,dt$$
$$> \exp[-x^{1-4\alpha} - 2a\alpha + O(x^{-2\alpha})]\,\{(2\alpha + 1) + O(x^{-2\alpha})\},$$

also

$$B(x) < C_0, \quad x \geqq 0.$$

Wird jetzt in (7) $u = (\sqrt{x} + \zeta)^4$ gesetzt, so ist

$$|e^{-x} J(1/x) - 4\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4\zeta^2}\, B\{(\sqrt{x} + \zeta)^4\}\,(\sqrt{x} + \zeta)^{4\alpha-1}\,d\zeta|$$
$$< 4C_0\, x^{2\alpha-1/2}\int_{-\sqrt{x}}^\infty e^{-4\zeta^2}\,|\exp[-4\zeta^2/\sqrt{x} - \zeta^4/x]\,(1 + \zeta/\sqrt{x})^{1-4\alpha} -$$
$$- (1 + \zeta/\sqrt{x})^{4\alpha-1}|\,d\zeta = o(1), \quad x \to \infty,$$

[9]) N. Wiener, Tauberian theorems. Ann. of Math. (2) **33** (1932), S. 1–100.

d. h. wegen (7)

$$(9)\qquad H(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} 4\exp[-4(y-t)^2]\,d\left\{\int_0^t B(u^4)\,u^{4\alpha-1}\,du\right\}$$

$$\to \frac{A}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} 4\exp[-4t^2]\,dt.$$

Daraus folgt, wenn man $B(u) > 0$ berücksichtigt:

$$H(y) > \int_y^{y+1} 4\exp[-(y-t)^2]\,d\left\{\int_0^t B(u^4)\,u^{4\alpha-1}\,du\right\}$$

$$> 4e^{-4}\int_y^{y+1} d\left\{\int_0^t B(u^4)\,u^{4\alpha-1}\,du\right\},$$

d. h.

$$(10)\qquad \int_y^{y+1} d\left\{\int_0^t B(u^4)\,u^{4\alpha-1}\,du\right\} < C_1 \quad \text{für} \quad y > y_0.$$

Nun können wir den allgemeinen Satz Tauberscher Art von N. Wiener (loc. cit., S. 27—28) anwenden, denn die Fourier-Transformierte von $\exp[-4t^2]$ ist, gleich $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\exp[-(x/4)^2]$. Aus (9) und (10) ergibt sich dann

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(y-t)\,d\left\{\int_0^t B(u^4)\,u^{4\alpha-1}\,du\right\} \to \frac{A}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} K(t)\,dt, \qquad y\to\infty,$$

wo für $K(t)$ die durch

$$K(t) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \leqq -t < \varepsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definierte Funktion gesetzt werden kann.

Also ist

$$\int_y^{y+\varepsilon} B(u^4)\,u^{4\alpha-1}\,du = \frac{A\varepsilon}{2\sqrt{\pi}} + o(1) \quad \text{bei} \quad y\to\infty, \text{ für jedes } \varepsilon > 0.$$

Jetzt folgt leicht der Beweis des Satzes.

1. Wegen (8) ist

$$h_\varepsilon(y) = \int_y^{y+\varepsilon} \{B(u^4)\exp[a\,u^\alpha]\}\exp[-a\,u^\alpha]\,u^{4\alpha-1}\,du$$

$$> B(y^4)\frac{1}{4a\alpha}\{1-\exp[-a((y+\varepsilon)^{4\alpha}-y^{4\alpha})]\},$$

also

$$\limsup_{y=\infty} B(y^4) < \frac{A}{2\sqrt{\pi}}\,C(\alpha,\varepsilon)$$

mit

$$C(\alpha,\varepsilon)=\lim_{y=\infty}\frac{4\,a\,\alpha\,\varepsilon}{\{1-\exp[-a\,((y+\varepsilon)^{4\alpha}-y^{4\alpha})]\}}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{a\,\varepsilon}{1-\exp[-a\,\varepsilon]} & \text{für } \alpha=\frac{1}{4}\\ 4\,a\,\alpha\,\varepsilon & \text{für } \frac{1}{4}<\alpha\leqq\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\to C(\alpha) \text{ bei } \varepsilon\to 0.$$

2. Wegen (8) ist

$$h_\varepsilon(y-\varepsilon)=\int_{y-\varepsilon}^{y}\{B(u^4)\exp[a\,u^{4\alpha}]\}\exp[-a\,u^{4\alpha}]\,u^{4\alpha-1}\,du$$

$$<B(y^4)\frac{1}{4\,a\,\alpha}\{\exp[a\,(y^{4\alpha}-(y-\varepsilon)^{4\alpha})]-1\}.$$

Wird jetzt

$$\Theta(\alpha,\varepsilon,y)=\frac{4\,a\,\alpha\,\varepsilon\,y^{4\alpha-1}-a\,\varepsilon^2\binom{4\alpha}{2}y^{4\alpha-2}+\log C(\alpha,\varepsilon)}{y^{4\alpha-1}}$$

gesetzt, so ist

$$B(y^4)\exp[\Theta(\alpha,\varepsilon,y)\,y^{4\alpha-1}]$$

$$>h_\varepsilon(y-\varepsilon)\frac{4\,a\,\alpha\exp[\Theta(\alpha,\varepsilon,y)\,y^{4\alpha-1}-a\,y^{4\alpha}+a\,(y-\varepsilon)^{4\alpha}]}{1-\exp[-a\,(y^{4\alpha}-(y-\varepsilon)^{4\alpha})]}$$

$$>\frac{A+o(1)}{2\sqrt{\pi}}\frac{\exp\left[\log 4\,a\,\alpha\,\varepsilon-\log C(\alpha,\varepsilon)+a\sum_{\nu=3}^{\infty}(-\varepsilon)^\nu\binom{4\alpha}{\nu}y^{4\alpha-\nu}\right]}{1-\exp\left[-4\,a\,\alpha\,\varepsilon\,y^{4\alpha-1}+a\,\varepsilon^2\binom{4\alpha}{2}y^{4\alpha-2}+o(1)\right]},$$

woraus sich die linke Seite der Behauptung ablesen läßt.

(Eingegangen am 25. Juli 1939.)

Bemerkungen über Laplacesche Integrale, deren Wachstum von Exponentialcharakter ist. II.

Von

Vojislav G. Avakumović in Beograd.

In dieser Note beweise ich möglichst kurz folgenden Tauberschen Satz funktionentheoretischer Art, der sich auf eine exponentielle Singularität bezieht und diesbezüglich ein Analogon zum Heilbronn-Landauschen Satz darstellt [1]).

Satz I. *Sei*

(1) $A(u)$ *nicht abnehmend,*

$$\int_0^\infty e^{-su}\, d\{A(u)\} \quad \textit{konvergent für } R(s) > 0$$

und

$$J(s) = \int_0^\infty e^{-su}\, d\{A(u)\} - A\, e^{\frac{1}{s}}, \quad A \neq 0$$

gleichmäßig beschränkt in einem konvexen Bereich, dessen Begrenzung im Punkte $s = 0$ eine Berührung erster Ordnung mit der imaginären Achse hat. Dann ist

$$A(u) \sim \frac{A}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{2\sqrt{u}}}{u^{\frac{1}{4}}}, \quad u \to \infty^2).$$

Beweis. O. B. d. A. sei $A(0) = 0$. Wird jetzt

$$Q(u) = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{\{\Gamma(n+1)\}^2}$$

und $C(u) = A(u) - Q(u)$ gesetzt, so ist

$$J(s) = s \int_0^\infty e^{-su}\, C(u)\, du.$$

Der Voraussetzung nach können wir annehmen, daß

(2) $J(\delta + t^2 + it)$, $i = \sqrt{-1}$ für jedes $\delta > 0$ gleichmäßig beschränkt also die Funktion

$$\frac{\sin yt}{t}\left(\frac{it}{\delta + t^2 + it}\right) J(\delta + t^2 + it)$$

[1]) H. Heilbronn und E. Landau, Bemerkungen zur vorstehenden Arbeit von Herrn Bochner, Math. Zeitschr. 37 (1937), S. 10—37.

[2]) Vgl. diesbezüglich die vorstehende Note des Verf.: Bemerkungen über Laplacesche Integrale, deren Wachstum von Exponentialcharakter ist. I.

für jedes $\delta > 0$ absolut integrierbar über das Intervall $(-\infty, \infty)$ ist. Daraus ergibt sich

$$(3)\qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin y t}{t} \left(\frac{i t}{\delta + t^2 + i t}\right) J(\delta + t^2 + i t)\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\delta u} C(u) \left\{ e^{\frac{(u-y)^2}{u}} - e^{-\frac{(u+y)^2}{u}} \right\} du.$$

Wegen (2) ist der Grenzübergang $\delta \to 0$ links und wegen

$$(4)\qquad |C(u)| < C_1 e^{\lambda u},\quad 0 < \lambda < 1,\quad C_1 = C_1(\lambda)$$

auch rechts durchführbar. Also

$$(5)\qquad \int_0^{\infty} C(u) \left\{ e^{\frac{(u-y)^2}{u}} - e^{-\frac{(u+y)^2}{u}} \right\} \frac{du}{\sqrt{u}} = 0(1),\quad y \to \infty.$$

Wegen (4) ist

$$\int_0^{\infty} C(u)\, e^{\frac{(u+y)^2}{u}} \frac{du}{\sqrt{u}} = o(1),\quad y \to \infty$$

und wegen

$$Q(u) \sim \frac{A}{2\sqrt{\pi}} u^{-\frac{1}{4}} \exp\,[2\sqrt{u}],\quad u \to \infty$$

ist

$$\int_0^{\infty} Q(u)\, e^{-\frac{(u-y)^2}{u}} \frac{du}{\sqrt{u}} \sim \frac{A}{2} y^{-\frac{1}{4}} \exp\left[2\sqrt{y} + \frac{1}{4}\right],\quad y \to \infty,$$

so daß aus (5) endlich

$$(6)\qquad H(y) = e^{-\frac{1}{4}} \int_0^{x} e^{-\frac{(u-y)^2}{u}} A(u) \frac{du}{\sqrt{u}} \sim \frac{A}{2} \frac{e^{2\sqrt{y}}}{y^{\frac{1}{4}}},\quad y \to \infty$$

folgt.

Nun ist wegen (1),

$$y^{\frac{1}{4}} e^{-2\sqrt{y}} e^{\frac{1}{4}} H(y) > A(y)\, e^{-2\sqrt{y}}\, y^{\frac{1}{4}} \int_y^{\infty} e^{\frac{(u-y)^2}{u}} \frac{du}{\sqrt{u}},$$

d. h. wegen (6),

$$(7)\qquad A(y)\, e^{-2\sqrt{y}}\, y^{\frac{1}{4}} < C_2,\ y \geqq 0.$$

Also ist, wenn in $H(y)$, $u = (\sqrt{y} + t + \frac{1}{4})^2$ und

$$B(t) = \begin{cases} e^{-2\sqrt{t}}\, t^{\frac{1}{4}} A(t) & \text{für } t \geqq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gesetzt wird

$$\left| y^{\frac{1}{4}} e^{-2\sqrt{y}} H(y) - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4t^2} B\{(\sqrt{y} + t + \tfrac{1}{4})^2\} dt \right|$$

$$< 2C_2 \int_{-\sqrt{y}-\frac{1}{4}}^{\infty} e^{-4t^2} \left| \exp\left[- \left(\frac{2t + \frac{t^2}{\sqrt{y}} + \frac{1}{2} + \frac{t}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{16\sqrt{y}}}{1 + \frac{t}{\sqrt{y}} + \frac{1}{4\sqrt{y}}} \right)^2 \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{4} + 2t + 4t^2 \right] \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{\sqrt{y}} + \frac{1}{4\sqrt{y}}\right)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right| dt = o(1), \quad y \to \infty.$$

d. h. wegen (6)

$$(8) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} 2e^{-4(y-t)^2} B(t^2)\, dt \to \frac{A}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} 2e^{-4t^2} dt, \quad y \to \infty.$$

Nun können wir den allgemeinen Satz Tauberscher Art von N. Wiener [3]) anwenden, denn die Fourier-Transformierte von $\exp[-4t^2]$ ist gleich $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\exp[-(x/4)^2]$ [4]). Aus (7) und (8) ergibt sich dann

$$\int_{y}^{y+\varepsilon} B(t^2)\, dt = \frac{A\varepsilon}{2\sqrt{\pi}} + o(1) \quad y \to \infty$$

für jedes $\varepsilon > 0$. Nun ist wegen (1), $e^{2t} B(t^2)$ nicht abnehmend, also

$$\frac{A\varepsilon}{2\sqrt{\pi}} + o(1) < B\{(y+\varepsilon)^2\} e^{2(y+\varepsilon)} \int_{y}^{y+\varepsilon} e^{-2t} dt,$$

d. h.

$$(9) \qquad \liminf_{y=\infty} B\{(y+\varepsilon)^2\} > \frac{A}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{2\varepsilon}{e^{2\varepsilon} - 1} \right) \to \frac{A}{2\sqrt{\pi}}, \quad \varepsilon \to 0.$$

Ebenso sieht man, daß

$$\limsup_{y=\infty} B(y^2) < \frac{A}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{2\varepsilon}{1 - e^{-2\varepsilon}} \right) \to \frac{A}{2\sqrt{\pi}}, \quad \varepsilon \to 0,$$

was zusammen mit (9) die Behauptung ergibt.

---

[3]) N. Wiener, Tauberian theorems, Ann. of Math. (2) **33** (1932), S. 1–100.
[4]) V. G. Avakumović, loc. cit.

(Eingegangen am 25. Juli 1939.)

Über das Umordnungsproblem im Hilbertschen Raum.

Von

H. Hadwiger in Bern.

1. Der abstrakte reelle *Hilbertsche Raum* $\mathfrak{H}$ kann nach J. v. Neumann[1]) durch fünf Eigenschaften gekennzeichnet werden. Sie sollen hier aufgeführt werden, um in zweckmäßiger Weise über Bezeichnungen zu orientieren, die in dieser Arbeit Verwendung finden werden.

A. $\mathfrak{H}$ *ist ein linearer Raum*, d. h. es gibt in $\mathfrak{H}$ eine Addition $a + b$ und eine skalare Multiplikation λa (a, b Elemente von $\mathfrak{H}$, λ eine reelle Zahl) sowie ein Element 0.

Für diese Operationen gelten die Regeln der Vektoralgebra. Die auf diesen Eigenschaften basierenden Begriffe der *linearen Abhängigkeit* sowie der *linearen Mannigfaltigkeit* sind bekannt.

B. In $\mathfrak{H}$ ist ein *inneres Produkt* (a, b) definiert (a, b Elemente von $\mathfrak{H}$, (a, b) eine reelle Zahl), das eine Metrik erzeugt. Es gilt:

1. $(\lambda a, b) = \lambda (a, b)$.
2. $(a + b, c) = (a, c) + (b, c)$.
3. $(a, b) = (b, a)$.
4. $(a, a) \begin{cases} = 0 & a = 0 \\ > 0 & a \neq 0. \end{cases}$

Durch $|a| = \sqrt{(a, a)}$ wird der Betrag von a und durch $|a - b|$ die Metrik definiert. Der sich auf diese Metrik stützende Begriff des *Häufungspunktes* einer Teilmenge von $\mathfrak{H}$, sowie die Begriffe der *Konvergenz* einer Folge aus $\mathfrak{H}$ wird wieder als bekannt angenommen.

C. $\mathfrak{H}$ *ist separabel*, das heißt es gibt abzählbare, in $\mathfrak{H}$ überall dichte Teilmengen.

D. $\mathfrak{H}$ besitzt *beliebig viele linear unabhängige Elemente*.

E. $\mathfrak{H}$ ist *vollständig*.

Im Zusammenhang mit den zu behandelnden Fragen werden wir uns vergleichsweise den Verhältnissen zuwenden, die sich im m-dimensionalen Vektorraum $\mathfrak{H}_m$ bieten. Für den $\mathfrak{H}_m$ hat an Stelle von D

D^0. Es gibt im $\mathfrak{H}_m$ m, *aber nicht* $m + 1$ *linear unabhängige Elemente*, zu treten.

---

[1]) J. v. Neumann, Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, Math. Annalen **102** (1930). Auf S. 63—70 erfolgt die bekannte Charakterisierung des abstrakten komplexen Hilbertschen Raumes.

Um bei der Behandlung der folgenden Probleme schwerfällige Darstellungen zu vermeiden, erweist es sich als zweckmäßig, folgende Bezeichnungen und Abkürzungen einzuführen:

Mit $\mathfrak{A}$ bezeichnen wir einen *geordneten* Komplex

$$\mathfrak{A} = \{a_1, a_2, \ldots\}$$

von endlich oder abzählbar vielen Elementen aus $\mathfrak{H}$ oder aus $\mathfrak{H}_m$. Bei einem unendlichen Komplex sprechen wir auch von einer Folge. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ geordnete Komplexe, so bedeute $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, daß alle Elemente von $\mathfrak{A}$ mit mindestens gleich hoher Vielfachheit in $\mathfrak{B}$ vorkommen, ohne daß die Anordnung bei dieser Feststellung eine Rolle spielt. Gilt gleichzeitig $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, so heißt $\mathfrak{B}$ eine *Umordnung* von $\mathfrak{A}$. Ist $\mathfrak{A}$ ein endlicher Komplex, so bezeichnen wir mit $[\mathfrak{A}]$ die Summe der in $\mathfrak{A}$ enthaltenen Elemente.

2. Es sei nun

$$\mathfrak{A} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \tag{1}$$

eine *Nullfolge* von Elementen aus $\mathfrak{H}$ oder aus $\mathfrak{H}_n$. Es gilt also

$$\lim_{r \to \infty} a_r = 0. \tag{2}$$

Mit $\mathfrak{A}_n$ bezeichnen wir den n-ten geordneten Partialkomplex von $\mathfrak{A}$, also

$$\mathfrak{A}_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}. \tag{3}$$

Ein Punkt x heißt *Summenhäufungspunkt* der Folge $\mathfrak{A}$, wenn x Häufungspunkt der Folge der Partialkomplexsummen

$$[\mathfrak{A}_n], \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{4}$$

ist.

Verfasser übernimmt die hier verwendete Terminologie von A. Wald [2]). Die Menge aller Summenhäufungspunkte, die zur Folge $\mathfrak{A}$ und zu allen aus $\mathfrak{A}$ durch Umordnung hervorgehenden Folgen gehören, nennen wir *Summenhäufungsmenge* und bezeichnen sie mit $\mathfrak{S}$.

$\mathfrak{S}$ ist also eine Menge, die der abzählbaren, nicht notwendig geordneten Menge der in $\mathfrak{A}$ enthaltenen Elemente zugeordnet ist.

In der vorliegenden Arbeit soll festgestellt werden, wieweit sich über die Struktur der Summenhäufungsmenge $\mathfrak{S}$ allgemeine Aussagen machen lassen. Zunächst werden kurz folgende bekannten Eigenschaften nachgewiesen:

I. $\mathfrak{S}$ *ist abgeschlossen.*

II. $\mathfrak{S}$ *ist ein Modul,* d. h. wenn u, v, w zu $\mathfrak{S}$ gehören, so gehört auch $u + v - w$ zu $\mathfrak{S}$.

Die Moduleigenschaft der Summenhäufungsmenge hat A. Wald allgemein für Folgen in Abelschen topologischen Gruppen festgestellt. Um auf die

[2]) A. Wald, Reihen in topologischen Gruppen, Ergebnisse eines math. Koll. Wien. 59. u. 60. Koll. 1933.

Beziehung, die zwischen der Strukturfrage für $\mathfrak{S}$ und dem Steinitzschen *Umordnungsproblem* besteht, eintreten zu können, muß noch die *Umordnungssummenmenge* $\mathfrak{U}$ definiert werden, die ebenfalls der Menge der in $\mathfrak{A}$ enthaltenen Elemente zugeordnet ist. Ein Punkt u gehört zu $\mathfrak{U}$, falls es eine Umordnung $\mathfrak{A}'$ der Folge $\mathfrak{A}$ gibt, so daß die Folge der Partialkomplexsummen $[\mathfrak{A}'_n]$ gegen u konvergieren. Eine solche Umordnung liefert dann eine konvergente Reihe mit der Summe u. $\mathfrak{U}$ kann gegebenenfalls die leere Menge sein. Aus der Definition folgt unmittelbar, daß $\mathfrak{U}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{S}$ ist. Nun ist es eine geläufige Tatsache geworden, daß diese beiden Mengen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{S}$ im endlichdimensionalen Vektorraum $\mathfrak{H}_m$ zusammenfallen. Wegen $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{S}$ muß nur noch $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{U}$ nachgewiesen werden, d. h. es muß gezeigt werden, daß jeder Summenhäufungspunkt ein Umordnungssummenpunkt ist. Dies gelingt, nur ungefähr beschrieben, so, daß man die Elemente, um die sich zwei aufeinanderfolgende Partialkomplexe der zu x gehörenden Partialkomplexteilfolge unterscheiden, so anordnet, daß alle Summen der dazwischenliegenden Partialkomplexe in der Nähe von x bleiben. So wird eine Folge hergestellt, deren Partialkomplexsummen gegen x konvergieren. Die Möglichkeit der erwähnten Anordnung der Elemente ergibt sich aus Hilfssätzen von W. Groß [3]) und V. Bergström [4]) über passend gewählte Anordnungen der Vektoren eines geschlossenen Polygons, die eine Zusammenpackung des Polygons auf möglichst kleinen Raum erwirken. Nach den erwähnten Sätzen gibt es für Polygone von Vektoren, deren Beträge 1 nicht übersteigen, eine nur von der Dimension des Vektorraumes, nicht aber von der Vektoranzahl des Polygons abhängige obere Schranke für den Radius der minimalen Hüllkugel des Polygons [5]).

Mit Rücksicht auf die Identität $\mathfrak{U} \equiv \mathfrak{S}$ im $\mathfrak{H}_m$ kann der bekannte Umordnungssatz von E. Steinitz[6]) für den m-dimensionalen Vektorraum wie folgt ausgesprochen werden:

III. $\mathfrak{S}$ *ist eine lineare Mannigfaltigkeit.*

---

[3]) W. Groß, Bedingt konvergente Reihen, Monatshefte Math. u. Physik **28** (1917), S. 221–237.

[4]) V. Bergström, Ein neuer Beweis eines Satzes von E. Steinitz, Abh. math. Seminars Hamburg **8** (1931), S. 148–152. Zwei Sätze über ebene Vektorpolygone, ebenda **8** (1931), S. 206–214.

[5]) Die genaue obere Schranke ist für $n > 2$, soweit Verf. bekannt, noch nicht bestimmt worden. Für $n = 2$ erhält V. Bergström den Wert $\sqrt{\frac{5}{4}}$. [Vgl. die in Fußnote [4]) an zweiter Stelle genannte Arbeit.] Dagegen ist die entgegengesetzt orientierte Frage nach der unteren Schranke des Radius der maximalen Hüllkugel für Polygone fester Gesamtlänge durch A. E. Mayer [Comment. Math. Helv. **10** (1938), S. 288–301] vollständig beantwortet worden.

[6]) E. Steinitz, Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme, Journ. reine u. angew. Math. **143** (1913), S. 128–175.

Man beachte besonders, daß für die Gültigkeit von III die Voraussetzung wesentlich wird, daß die Folge $\mathfrak{A}$ eine Nullfolge ist, während diese Voraussetzung beim Nachweis von I und II nicht gebraucht wird.

Es ist anzunehmen, daß verschiedentlich versucht wurde, den Satz III, der eine Verschärfung von Satz II darstellt, auf den Hilbertschen Raum $\mathfrak{H}$ zu übertragen. Das Hauptziel dieser Arbeit ist es, den Nachweis zu erbringen, daß III in $\mathfrak{H}$ *nicht* mehr gilt, so daß also II in diesem Sinne die maximale Aussage über die Struktur der Summenhäufungsmenge im Hilbertschen Raum darstellt. Es muß jedoch darauf hingewiesen werden, daß, wie wir ebenfalls zeigen werden, in $\mathfrak{H}$ die Identität $\mathfrak{U} \equiv \mathfrak{S}$ auch nicht mehr gilt[7]), so daß die Strukturfrage für die Teilmenge $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{S}$ noch offen bleibt. Selbstverständlich ist $\mathfrak{S}$ auch im Hilbertschen Raume in vielen Fällen eine lineare Mannigfaltigkeit. Trivial ist die Angabe eines Beispiels, wo $\mathfrak{S}$ leer ist. Daß auch der entgegengesetzt extreme Fall, wo $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{H}$ zusammenfällt, eintreten kann, werden wir am Schluß noch zeigen.

3. Wir beweisen zunächst, daß $\mathfrak{S}$ abgeschlossen ist. Es sei x ein Häufungspunkt von $\mathfrak{S}$. Es gibt dann in $\mathfrak{S}$ eine Folge $\{x_n\}$, $(n = 1, 2, \ldots)$, so daß

$$|x_n - x| < \frac{1}{2n} \tag{1}$$

ausfällt. Für jedes n gibt es eine Umordnung $\mathfrak{A}^{[n]}$ von $\mathfrak{A}$, so daß x_n Summenhäufungspunkt von $\mathfrak{A}^{[n]}$ ist. Demzufolge kann eine Folge von geordneten Komplexen $\{\mathfrak{K}_n\}$, $(n = 1, 2, \ldots)$ von folgender Art gebildet werden:

(2) $\mathfrak{K}_n$ ist Partialkomplex von $\mathfrak{A}^{[n]}$,

(3) $\mathfrak{K}_n \supset \mathfrak{K}_{n-1}$ für $n \geqq 2$,

(4) $\mathfrak{K}_n \supset \mathfrak{A}_n$ ($\mathfrak{A}_n$ bedeutet den n-ten Partialkomplex von $\mathfrak{A}$),

$$|[\mathfrak{K}_n] - x_n| < \frac{1}{2n}. \tag{5}$$

Wegen (3) kann eine Folge $\mathfrak{K}$ so hergestellt werden, daß $\mathfrak{K}_n$ Partialkomplex von $\mathfrak{K}$ ist. Mit Rücksicht auf (4) ist jedes Element von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{K}$ enthalten, und wegen (2) umgekehrt jedes Element von $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{A}$, so daß also $\mathfrak{K}$ eine Umordnung von $\mathfrak{A}$ darstellt. Aus (1) und (5) folgt

$$|[\mathfrak{K}_n] - x| < \frac{1}{n}, \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

---

[7]) Die früher erwähnten Hilfssätze von W. Groß und V. Bergström, auf die sich der Identitätsnachweis im endlich-dimensionalen Vektorraum stützt, können nicht auf den Hilbertschen Raum übertragen werden. Die Größe der minimalen Hüllkugel eines Vektorpolygons ist von der Vektoranzahl abhängig. Über die genaue Schranke vgl. H. Hadwiger, Ein Satz über geschlossene Vektorpolygone des Hilbertschen Raumes, Math. Zeitschr. **41** (1936), S. 732—738.

Damit ist gezeigt, daß x Summenhäufungspunkt von $\mathfrak{K}$ ist und infolgedessen zu $\mathfrak{S}$ gehört. Damit ist die Aussage I bewiesen.

Wir zeigen nun, daß $\mathfrak{S}$ ein Modul ist. Die drei Summenhäufungspunkte u, v, w sollen zu den drei Umordnungen $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ von $\mathfrak{A}$ gehören. Wir konstruieren nun eine Folge von geordneten Komplexen $\{\mathfrak{K}_n\}$, $(n = 1, 2, \ldots)$ auf folgende Weise:

Es gibt einen Partialkomplex $\mathfrak{U}_n$ von $\mathfrak{U}$, so daß

$$|[\mathfrak{U}_n] - u| < \frac{1}{3n} \tag{7}$$

und

$$\mathfrak{U}_n \supset \mathfrak{K}_{n-1}, \tag{8}$$

falls $n \geqq 2$ ist.

Ferner kann ein Partialkomplex $\mathfrak{W}_n$ von $\mathfrak{W}$ so gewählt werden, daß

$$|[\mathfrak{W}_n] - w| < \frac{1}{3n} \tag{9}$$

und

$$\mathfrak{W}_n \supset \mathfrak{U}_n \tag{10}$$

gilt. Endlich wähle man einen Partialkomplex $\mathfrak{V}_n$ von $\mathfrak{V}$, so daß

$$|[\mathfrak{V}_n] - v| < \frac{1}{3n} \tag{11}$$

und

$$\mathfrak{V}_n \supset \mathfrak{W}_n \tag{12}$$

gilt. Nun setzen wir

$$\mathfrak{K}_n = \mathfrak{U}_n + \mathfrak{V}_n - \mathfrak{W}_n. \tag{13}$$

Wegen (10) und (12) ist mit (13) ein Elementenkomplex von $\mathfrak{A}$ dargestellt, der ein Element höchstens einmal enthält. Wegen (8) gilt offenbar

$$\mathfrak{K}_n \supset \mathfrak{K}_{n-1} \tag{14}$$

für $n \geqq 2$, so daß eine Folge $\mathfrak{K}$ gebildet werden kann, die die Komplexe $\mathfrak{K}_n$ als Partialkomplexe besitzt. Da nun mit Rücksicht auf (7), (9) und (11)

$$|[\mathfrak{K}_n] - (u + v - w)| < \frac{1}{n}, \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{15}$$

ausfällt, ist $u + v - w$ Summenhäufungspunkt von $\mathfrak{K}$. Nun folgt aus $\mathfrak{K}_n \supset \mathfrak{U}_n$ die Relation $\mathfrak{K} \supset \mathfrak{U}$ und aus $\mathfrak{K}_n \subset \mathfrak{U}_{n+1}$ die Relation $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{U}$. $\mathfrak{K}$ ist somit Umordnung von $\mathfrak{U}$, also auch Umordnung von $\mathfrak{A}$. Damit ist Satz II bewiesen.

4. Wir beweisen nun durch Konstruktion eines besonderen Beispiels einer Folge, daß sich Satz III nicht auf $\mathfrak{H}$ übertragen läßt.

In geläufiger Weise folgert man aus Eigenschaft D des Hilbertschen Raumes die Existenz einer nicht abbrechenden Folge orthogonaler und normierter Elemente in $\mathfrak{H}$:

(1) $$e_0, e_1, e_2, \ldots,$$

(2) $$(e_i, e_k) = \begin{cases} 0 & i \gtrless k \\ 1 & i = k. \end{cases}$$

Wir fassen die Elemente dieser Folge in einer für unsere Zwecke geeigneten Weise zu Gruppen zusammen, nämlich so:

$$\begin{array}{lllll} e_0, & e_{11} & & & e'_{11} \\ & e_{21} & e_{22} & & e'_{21} \quad e'_{22} \\ & e_{31} & e_{32} & e_{33} & e'_{31} \quad e'_{32} \quad e'_{33} \\ & \cdot & & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ & \cdot & & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ & n1 & \cdot \cdot \cdot & e_{nn} & e'_{n1} \cdot \cdot \cdot e'_{nn} \\ & \cdot & & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ & \cdot & & \cdot & \cdot \quad \cdot \end{array}$$

Eine eindeutige Vorschrift für die Bildung der e_{ik} und e'_{ik} aus den e_n liefert etwa die Formel:

$$e_{ik} = e_{i(i-1)+2k-1}, \qquad e'_{ik} = e_{i(i-1)+2k}.$$

Aus der Gruppe $\{e_{n1} \ldots e_{nn}\}$ bzw. $\{e'_{n1} \ldots e'_{nn}\}$ bilden wir eine neue Gruppe von $n+1$ Elementen

$$a_{n1} \ldots a_{nn+1} \quad \text{bzw.} \quad a'_{n1} \ldots a'_{nn+1}$$

nach der Vorschrift

(3)
$$a_{ni} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{n+1}\right)\sum_{\nu=1}^{n} e_{n\nu} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\, e_{ni},$$

$$a_{nn+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=1}^{n} e_{n\nu},$$

(3′)
$$a'_{ni} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{n+1}\right)\sum_{\nu=1}^{n} e'_{n\nu} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\, e'_{ni},$$

$$a'_{nn+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=1}^{n} e'_{n\nu}.$$

Es gelten dann folgende Relationen:

(4) $$(a_{ni}, a_{nk}) = \begin{cases} \dfrac{n}{(n+1)^2} & i = k, \\ -\dfrac{1}{(n+1)^2} & i \gtrless k, \end{cases}$$

(4′) $$(a'_{ni}, a'_{nk}) = \begin{cases} \dfrac{n}{(n+1)^2} & i = k, \\ -\dfrac{1}{(n+1)^2} & i \gtrless k. \end{cases}$$

Für $n \gtrless m$ gilt ferner

(5) $$(a_{ni}, a_{mk}) = 0,$$

(5′) $$(a'_{ni}, a'_{mk}) = 0$$

und für alle n

(6) $$(e_0, a_{nk}) = 0,$$

(6′) $$(e_0, a'_{nk}) = 0.$$

Für alle n, m, i, k gilt noch

(7) $$(a_{ni}, a'_{mk}) = 0.$$

Aus (4) und (4′) rechnet man aus, daß für $1 \leqq \lambda \leqq n+1$

(8) $$(a_{n1} + a_{n2} + \ldots + a_{n\lambda})^2 = \frac{\lambda(n+1-\lambda)}{(n+1)^2},$$

(8′) $$(a'_{n1} + a'_{n2} + \ldots + a'_{n\lambda})^2 = \frac{\lambda(n+1-\lambda)}{(n+1)^2}$$

ist. Besonders beachte man, daß sich für das Quadrat der Summe einer beliebigen Auswahl von λ Elementen aus der Gruppe $\{a_{n1} \ldots a_{nn+1}\}$ bzw. $\{a'_{n1} \ldots a'_{nn+1}\}$ immer der gleiche Wert ergibt. Für $\lambda = n+1$ kommt insbesondere

(9) $$a_{n1} + \ldots + a_{nn+1} = 0,$$

(9′) $$a'_{n1} + \ldots + a'_{nn+1} = 0$$

heraus. Nun bilden wir zwei Folgen von geordneten Komplexen

$$\{\mathfrak{K}_n\}, \quad \{\mathfrak{K}'_n\}, \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

wo

(10) $$\mathfrak{K}_n = \left\{\frac{e_0}{n+1} + a_{n1}, \frac{e_0}{n+1} + a_{n2}, \ldots, \frac{e_0}{n+1} + a_{nn+1}\right\},$$

(10′) $$\mathfrak{K}'_n = \left\{\frac{-e_0}{n+1} + a'_{n1}, \frac{-e_0}{n+1} + a'_{n2}, \ldots, \frac{-e_0}{n+1} + a'_{nn+1}\right\}$$

ist. Durch die Komplexfolge

(11) $$\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}'_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}'_2, \mathfrak{K}_3, \mathfrak{K}'_3, \ldots$$

wird eine Folge $\mathfrak{K}$ definiert. Nach (4), (4′), (6), (6′) rechnet man aus, daß

(12) $$\left|\frac{e_0}{n+1} + a_{nk}\right| = \left|\frac{e_0}{n+1} + a'_{nk}\right| = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

ist, woraus folgt, daß $\mathfrak{K}$ eine Nullfolge ist, wie die Voraussetzung verlangt. Nun ist im Hinblick auf (10), (10′), (9), (9′)

(13) $$\begin{aligned}[\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}'_1 + \mathfrak{K}_2 + \mathfrak{K}'_2 + \ldots + \mathfrak{K}_n + \mathfrak{K}'_n] &= 0,\\ [\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}'_1 + \mathfrak{K}_2 + \mathfrak{K}'_2 + \ldots + \mathfrak{K}_n + \mathfrak{K}'_n + \mathfrak{K}_{n+1}] &= e_0.\end{aligned}$$

Da nach Konstruktion die oben dargestellten Komplexe Partialkomplexe der Folge $\mathfrak{K}$ sind, sind 0 und e_0 Summenhäufungspunkte von $\mathfrak{K}$. Wäre nun

die Summenhäufungsmenge $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{R}$ eine lineare Mannigfaltigkeit, so müßte jedenfalls auch $\frac{e_0}{2}$ zu $\mathfrak{S}$ gehören. Wir zeigen nun, daß dies nicht der Fall sein kann.

Es sei $\mathfrak{T}$ ein beliebiger endlicher Komplex von Elementen aus $\mathfrak{R}$. Es bezeichne dann λ_n bzw. λ_n' die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{T}$, die zu $\mathfrak{R}_n$ bzw. zu $\mathfrak{R}_n'$ gehören. Wegen der Endlichkeit von $\mathfrak{T}$ gibt es ein N, so daß für $n > N$ stets $\lambda_n = \lambda_n' = 0$ gilt.

Nach (10) und (10′) ergibt sich

$$[\mathfrak{T}] = \Big(\sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n - \lambda_n'}{n+1}\Big) e_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_{n\nu_1} + \ldots + a_{n\nu_{\lambda_n}}) + \sum_{n=1}^{N} (a'_{n\nu_1} + \ldots + a'_{n\nu'_{\lambda_n'}}),$$

und unter Verwendung der Relationen (6), (6′), (7), (8), (8′) rechnet man aus, daß

$$\Big|[\mathfrak{T}] - \frac{e_0}{2}\Big|^2 = \Big(\sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n - \lambda_n'}{n+1} - \frac{1}{2}\Big)^2 + \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n (n+1-\lambda_n)}{(n+1)^2} + \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n' (n+1-\lambda_n')}{(n+1)^2}$$

ist. Wenn wir abkürzend

$$\frac{\lambda_n}{n+1} = \alpha_n, \quad \frac{\lambda_n'}{n+1} = \alpha_n'$$

und

$$\Phi_N = \Big(\sum_{n=1}^{N} (\alpha_n - \alpha_n') - \tfrac{1}{2}\Big)^2 + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n (1 - \alpha_n) + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n' (1 - \alpha_n') \tag{14}$$

setzen, so ist

$$\Big|[\mathfrak{T}] - \frac{e_0}{2}\Big|^2 = \Phi_N.$$

Wir zeigen nun, daß im Würfel $0 \leqq \alpha_n \leqq 1$, $0 \leqq \alpha_n' \leqq 1$ stets

$$\Phi_N \geqq \tfrac{1}{4} \tag{15}$$

gilt.

Zunächst stellen wir fest, daß die Aussage für $N = 1$ richtig ist. Es ist

$$\Phi_1 = (\alpha_1 - \alpha_1' - \tfrac{1}{2})^2 + \alpha_1 (1 - \alpha_1) + \alpha_1' (1 - \alpha_1'),$$
$$\Phi_1 = \tfrac{1}{4} + \alpha_1 (1 - \alpha_1) + \alpha_1' (1 - \alpha_1') - (\alpha_1 - \alpha_1') [1 - (\alpha_1 - \alpha_1')].$$

Nun gilt aber

$$\alpha_1 (1 - \alpha_1) + \alpha_1' (1 - \alpha_1') \geqq (\alpha_1 - \alpha_1') [1 - (\alpha_1 - \alpha_1')], \tag{16}$$

eine Ungleichung, deren Richtigkeit man durch Ausrechnung sofort bestätigt, und die wir weiter unten noch verwenden werden. Ihr zufolge gilt tatsächlich

$$\Phi_1 \geqq \tfrac{1}{4}.$$

Es sei nun für $N \geqq 2$ bewiesen, daß $\Phi_{N-1} \geqq \frac{1}{4}$ ist. Es folgt dann, daß

$$\Phi_N \geqq \tfrac{1}{4},$$

und zwar so: Unter Berücksichtigung der Ungleichung (16) gewinnt man zunächst

$$\Phi_N \geqq (\sum_{n=1}^{N} (\alpha_n - \alpha_n') - \tfrac{1}{2})^2 + \sum_{n=1}^{N} (\alpha_n - \alpha_n')[1 - (\alpha_n - \alpha_n')]$$

oder

$$\Phi_N \geqq \tfrac{1}{4} + (\sum_{n=1}^{N} (\alpha_n - \alpha_n'))^2 - \sum_{n=1}^{N} (\alpha_n - \alpha_n')^2.$$

Hieraus folgt die Behauptung in den beiden Fällen

1. $\alpha_n - \alpha_n' \geqq 0, \quad (n = 1, 2, \ldots N),$
2. $\alpha_n - \alpha_n' \leqq 0, \quad (n = 1, 2, \ldots N).$

Es bleibt noch unerledigt

3. $\alpha_1 - \alpha_1' > 0, \quad \alpha_2 - \alpha_2' < 0.$

In diesem Falle schreiben wir unter nochmaliger Verwendung der Ungleichung (16)

$$\Phi_N \geqq (\sum_{n=3}^{N} (\alpha_n - \alpha_n') + (\alpha_1 - \alpha_1') - (\alpha_2' - \alpha_2))^2 + \sum_{n=3}^{N} \alpha_n (1 - \alpha_n)$$
$$+ \sum_{n=3}^{N} \alpha_n' (1 - \alpha_n') + (\alpha_1 - \alpha_1')[1 - (\alpha_1 - \alpha_1')] + (\alpha_2' - \alpha_2)[1 - (\alpha_2' - \alpha_2)].$$

Da $0 \leqq \alpha_1 - \alpha_1' \leqq 1$ und $0 \leqq \alpha_2' - \alpha_2 \leqq 1$ ist, kann die rechte Seite als eine Form Φ_{N-1} aufgefaßt werden, so daß nach der induktiven Voraussetzung auch in diesem Falle $\Phi_N \geqq \frac{1}{4}$ ausfällt. Die Ungleichung (15) ist somit für alle N nachgewiesen.

Es folgt jetzt, daß $\left| [\mathfrak{T}] - \frac{e_0}{2} \right| > \frac{1}{2}$ ist für jeden Komplex $\mathfrak{T}$ von Elementen aus $\mathfrak{K}$. Also kann $\frac{e_0}{2}$ nicht Häufungspunkt einer Folge von Komplexsummen sein, also auch nicht Summenhäufungspunkt der Folge $\mathfrak{K}$, womit alles bewiesen ist.

5. Wir zeigen nun noch, daß im Hilbertschen Raume die Identität $\mathfrak{U} \equiv \mathfrak{S}$ nicht mehr allgemein gilt. Zum Nachweis kann die im vorigen Abschnitt konstruierte Folge $\mathfrak{K}$ als Beispiel herangezogen werden. Wie gezeigt, gehört jedenfalls 0 zur Summenhäufungsmenge $\mathfrak{S}$. Es ist nun nicht schwierig zu beweisen, daß die Umordnungsmenge $\mathfrak{U}$ leer ist. In der Tat: Es sei $\mathfrak{B}$ eine Umordnung der Folge $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{B}_n$ der n-te Partialkomplex von $\mathfrak{B}$. Es gibt ein N, so daß $\mathfrak{B}_n$ noch keine Elemente von $\mathfrak{K}_{2N-1}$ enthält. Weiter kann dann ein $m > n$ so gewählt werden, daß $\mathfrak{B}_m$ N, aber nicht mehr, zu $\mathfrak{K}_{2N-1}$ gehörende Elemente enthält. Mit Berücksichtigung der Orthogonalitätsrelationen (5), (6), (7) und der Relation (8) des vorigen Abschnitts folgt

$$|\,[\mathfrak{B}_m] - [\mathfrak{B}_n]\,| \geqq \tfrac{1}{2},$$

so daß die Folge $[\mathfrak{B}_n]$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ nicht konvergieren kann. Es kann somit keinen Umordnungssummenpunkt geben.

6. Endlich konstruieren wir noch ein Beispiel für das Vorkommnis $\mathfrak{S} \equiv \mathfrak{H}$. Nach Eigenschaft C des Hilbertschen Raumes gibt es eine abzählbare, in $\mathfrak{H}$ überall dichte Teilmenge

$$\mathfrak{M} = \{a_1, a_2, \ldots\}. \tag{1}$$

Es kann dann eine Folge positiver ganzer Zahlen angegeben werden

$$\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots, \tag{2}$$

so daß

$$\left|\frac{a_n}{\nu_n}\right| \leqq \frac{1}{n}, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{3}$$

ausfällt. Wir bilden nun die Elementenkomplexe

$$\mathfrak{A}_n = \left\{\frac{a_n}{\nu_n}, \frac{a_n}{\nu_n}, \ldots \frac{a_n}{\nu_n}\right\}, \tag{4}$$

$$\mathfrak{A}'_n = \left\{-\frac{a_n}{\nu_n}, -\frac{a_n}{\nu_n}, \ldots -\frac{a_n}{\nu_n}\right\}, \tag{4'}$$

wo die Anzahl der im Komplex enthaltenen Elemente ν_n sein soll. Es wird dann

$$[\mathfrak{A}_n] = a_n \quad \text{und} \quad [\mathfrak{A}'_n] = -a_n.$$

Durch die Komplexfolge

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}'_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}'_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}'_3, \ldots \tag{5}$$

ist eine Elementenfolge $\mathfrak{A}$ definiert, die wegen (3) eine Nullfolge ist. Da nun

$$[\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}'_1 + \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}'_2 + \ldots + \mathfrak{A}_{n-1} + \mathfrak{A}'_{n-1} + \mathfrak{A}_n] = a_n$$

ist, ist jedes Element a_n der Menge $\mathfrak{M}$ Partialkomplexsumme der Folge $\mathfrak{A}$. Hieraus ergibt sich, daß jeder Punkt von $\mathfrak{H}$ Summenhäufungspunkt der Folge $\mathfrak{A}$ ist, was wir zeigen wollten.

(Eingegangen am 28. Juli 1939.)

Die Mittelpunktsverzerrung bei konvexen konformen Abbildungen.

Von

Georg Aumann in Frankfurt a. M.

In den folgenden Zeilen bestimme ich den genauen Schrankenbereich für das Urbild des Mittelpunktes bei einer konformen Abbildung eines einfach zusammenhängenden Gebietes auf ein konvexes, allgemeiner den genauen Schrankenbereich eines analytischen Mittels von zwei Veränderlichen.

1. Es seien G ein einfach zusammenhängendes Gebiet der z-Ebene mit mindestens einem endlichen Randpunkt und $z_1 \neq z_2$ zwei Punkte desselben. Ist $w = f(z)$ eine konforme Abbildung von G auf das konvexe Gebiet K, kurz eine *konvexe* Abbildung von G, so betrachte man den Urbildpunkt $m_f(z_1, z_2)$ des Mittelpunktes der Bilder von z_1 und z_2, d. h. den Punkt z von G, für welchen $2f(z) = f(z_1) + f(z_2)$ gilt. Wir stellen uns die Aufgabe, bei festen G, z_1, z_2 den genauen Wertebereich $M_G(z_1, z_2)$ von $m_f(z_1, z_2)$ zu bestimmen, wenn f alle möglichen konvexen Abbildungen von G durchläuft. Wir können unser Problem zurückführen auf den Fall, daß G das Innere E des Einheitskreises der s-Ebene, $|s| < 1$, ist, und z_1, z_2 die Punkte $s_0, -s_0$ in demselben. Es gibt nämlich eine konforme Abbildung $z = g(s)$ von E auf G, bei welcher den z_1, z_2 diametrale Punkte $s_0, -s_0$ entsprechen; dabei ist $|s_0|$ durch z_1 und z_2 eindeutig festgelegt. Da dann $f(g(s))$ eine konvexe Abbildung von E ist, so lautet jetzt die Aufgabe:

Es sei s_0 ein fester Punkt von E. Der konvexen Abbildung $h(s)$ von E wird zugeordnet der Punkt m, erklärt durch

$$2h(m) = h(s_0) + h(-s_0).$$

Es ist der genaue Wertebereich $M_E(s_0, -s_0)$ von m zu ermitteln. Wir behaupten:

$$M_E(s_0, -s_0) \text{ ist genau der Bereich } |m| \leqq |s_0|^2.$$

Daß diese Schranke wirklich nicht verbessert werden kann, sieht man an den Abbildungen $\frac{1}{s+a}$ mit $|a| \geqq 1$; für diese ist nämlich $m = \frac{s_0^2}{-a}$.

$M_G(z_1, z_2)$ erhält man aus $M_E(s_0, -s_0)$ durch Rückabbildung [vgl. Fig. 1, in welcher $M = M_E(s_1, s_2)$ für nicht diametrale Punkte dargestellt ist].

2. Die durch $2h(m) = h(s_1) + h(s_2)$ erklärte Funktion $m = m(s_1, s_2)$ hat folgende Eigenschaften: Sie ist für $|s_1| < 1$, $|s_2| < 1$ eine in s_1, s_2 analytische und symmetrische Funktion mit $m(s, s) = s$ und $|m| < 1$. Allgemein nennt man eine Funktion von zwei Veränderlichen mit diesen Eigenschaften ein analytisches Mittel von zwei Veränderlichen in E, kurz ein Kreismittel[1]). Wir beweisen nun den

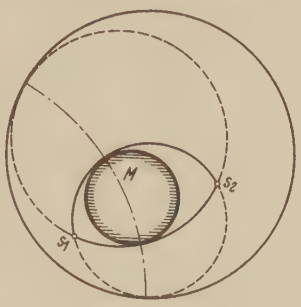


Fig. 1.

Satz. *Ist $m(s_1, s_2)$ ein analytisches Mittel in E, so gilt*

$$|m(s, -s)| \leqq |s|^2.$$

Die verallgemeinerten harmonischen Mittel $m = \frac{2s_1 s_2 + a(s_1 + s_2)}{s_1 + s_2 + 2a}$ *mit* $|a| \geqq 1$ *füllen diesen Schrankenbereich bereits voll aus.*

Unsere Behauptung in 1 ist dieser Satz, ausgesprochen für die quasiarithmetischen Mittel $h_{-1}\left(\frac{h(s_1) + h(s_2)}{2}\right)$ im Einheitskreis.

3. Zum Beweis unseres Satzes benutzen wir das Schwarzsche Lemma in folgender verallgemeinerter Form:

Es sei $f(z)$ in $|z| < r$ regulär; ferner sei $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 0$, $n \geqq 0$, und $|f(z)| \leqq p$ in $|z| < r$. Dann ist

$$|f(z)| \leqq p \frac{|z|^{n+1}}{r^{n+1}},$$

und das Gleichheitszeichen kann für ein z mit $|z| < r$ nur stehen, wenn $f(z) = \frac{p e^{i\varphi}}{r^{n+1}} z^{n+1}$, φ reell und konstant. Beweis wie üblich[2]) oder durch vollständige Induktion.

Wir setzen $m(s, -s) = t(s)$. Dann ist $t(0) = 0$, $t'(0) = 0$, da $t'(0) = \frac{\partial m}{\partial s_1} - \frac{\partial m}{\partial s_2}\Big|_{s_1 = s_2 = 0}$ und diese partiellen Ableitungen auf Grund der Symmetrie an der Stelle $s_1 = s_2 = 0$ einander gleich sind, und $|t(s)| < 1$ für $|s| < 1$. Das Schwarzsche Lemma liefert sodann $|t(s)| \leqq |s|^2$, w. z. b. w.

---

[1]) G. Aumann, Grundlegung der Theorie der analytischen Mittelwerte, Sitz.-Ber. Bayer. Akademie 1934, S. 45–81; oder Aufbau von Mittelwerten mehrerer Argumente. II. (Analytische Mittelwerte), Math. Annalen 111 (1935), S. 713–730.

[2]) Vgl. etwa L. Bieberbach, Funktionentheorie II (1927), S. 2.

4. Da man alle in einem eigentlichen Grundgebiet G analytischen Mittel durch Abbildung der Kreismittel erhält, ist durch obige Überlegungen auch der genaue Schrankenbereich $M_G(z_1, z_2)$ für die in G analytischen Mittel von zwei Argumenten bestimmt; vgl. Schlußbemerkung in 1.

Man kann sich die weitere Aufgabe stellen, bei konvexen konformen Abbildungen die Verzerrung des Schwerpunktes von mehr als zwei Punkten, allgemeiner den Variabilitätsbereich für analytische Mittel von mehr als zwei Argumenten genauer zu untersuchen; neben dem bereits bekannten Ergebnis[3]), daß nämlich bei einem Kreismittel der Punkt $m(s_1, \ldots, s_n)$ enthalten ist im Durchschnitt aller die Punkte $s_1, \ldots, s_n$ enthaltenden Hypozykelscheiben (für $n = 2$ vgl. in Figur das Kreiszweieck mit den Ecken s_1, s_2), wird sich hier wohl kaum eine einfache und zugleich bessere Schranke erzielen lassen.

---

[3]) Siehe in erster unter [1]) genannten Arbeit, S. 63—64.

(Eingegangen am 9. August 1939.)

Nachtrag (5. Oktober 1939).

Eine in ähnlicher Weise mit dem Schwarzschen Lemma beweisbare Verallgemeinerung des Satzes in 2. ist folgender

Satz. *Ist* $m(s_1, \ldots, s_n)$ *ein analytisches Mittel in* $|s| < 1$ *und ist* $s_1 + \ldots + s_n = 0$, *dann gilt*

$$|m(s_1, \ldots, s_n)| \leqq \operatorname*{Max}_{\nu = 1, \ldots, n} |s_\nu|^2.$$

Durch Selbstabbildungen von $|s| < 1$ läßt sich diese Aussage wieder von der Bedingung $s_1 + \ldots + s_n = 0$ befreien. Der Durchschnitt der so erhaltenen Schranke für $m(s_1, \ldots, s_n)$ mit der in 4. genannten liefert wieder eine verbesserte Schranke.

Über einen geometrischen Satz.

Von

L. Fejes in Budapest.

Wir beweisen im folgenden den Satz: *Es sei* $\mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3, \ldots, \mathfrak{S}_n, \ldots$ *eine Folge von Punktsystemen, die beziehentlich aus* $2, 3, \ldots, n, \ldots$ *Punkten bestehen und die sämtlich in einem Gebiet mit dem Flächeninhalt* T *liegen. Dann läßt sich von jedem* $\mathfrak{S}_n$ *ein Punktpaar mit dem Abstand* d_n *derart herausgreifen, daß* $\overline{\lim_{n \to \infty}} n d_n^2 \leqq \frac{2\sqrt{3}}{3} T$ *ausfällt.* Die Konstante $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ läßt sich dabei durch keine kleinere ersetzen[1]).

Zum Beweis unseres Satzes greifen wir aus $\mathfrak{S}_n$ das Punktpaar mit dem kleinsten Abstand d_n heraus und legen um jeden einzelnen Punkt des Systems $\mathfrak{S}_n$ als Mittelpunkt eine Kreisscheibe $\mathfrak{K}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ mit dem gemeinsamen Radius $\varrho_n = \frac{\sqrt{3}}{3} d_n$[2]). Es leuchtet ein, daß kein einziger Punkt der Ebene von mehr als zwei Kreisscheiben bedeckt werden kann. Der Flächeninhalt von $T_n = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{K}_i$, d. h. des von den Kreisscheiben bedeckten Teiles der Ebene, ist demnach $T_n = \sum_{i=1}^{n} (t_i^1 + \frac{1}{2} t_i^2)$, wobei t_i^1 den Flächeninhalt des einfach, t_i^2 den Flächeninhalt des zweifach bedeckten Teiles des von $\mathfrak{K}_i$ bedeckten Teiles der Ebene bedeutet[3]).

---

[1]) Man fasse von einem in einem Kreise oder in einem Quadrat liegenden Punktsystem mit gegebener Anzahl von Punkten das Punktpaar mit dem kleinsten Abstand ins Auge. Auf das Problem der Bestimmung derjenigen Punktkonfiguration, bei welcher dieser Abstand sein Maximum erreicht, hat Herr D. Lázár meine Aufmerksamkeit gerichtet.

[2]) Betrachtet man ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge d_n, so ist $\varrho_n = \frac{\sqrt{3}}{3} d_n$ der Radius des Umkreises.

[3]) Es sei $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_k$ ganz allgemein eine endliche Anzahl von beliebigen einander teilweise oder völlig deckenden Gebieten, so ist das Inhaltsmaß des Vereinigungsgebietes:

$$T = \sum_{i=1}^{k} \left(t_i^1 + \frac{1}{2} t_i^2 + \ldots + \frac{1}{k} t_i^k \right),$$

wobei t_i^l das l-fach bedeckte Teilgebiet von $\mathfrak{G}_i$ bezeichnet.

Es gilt aber für ein jedes i: $t_i^1 + \frac{1}{2} t_i^2 \geqq \frac{3\sqrt{3}}{2} \varrho_n^2$. Dies folgt aus der Tatsache, daß t^2 sein Maximum erreicht, falls in $\mathfrak{K}_i$ sechs andere Kreise hineingreifen, deren Mittelpunkte in den Ecken eines mit $\mathfrak{K}_i$ konzentrischen regulären Sechsecks mit der Seitenlänge d_n liegen[4]) (s. Fig. 1). Wir erhalten mithin $T_n \geqq \frac{3\sqrt{3}}{2} n \varrho_n^2$, woraus sich wegen $T \geqq \overline{\lim_{n \to \infty}} T_n$ die Ungleichung $T \geqq \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{\lim_{n \to \infty}} n d_n^2$ ergibt, w. z. b. w.

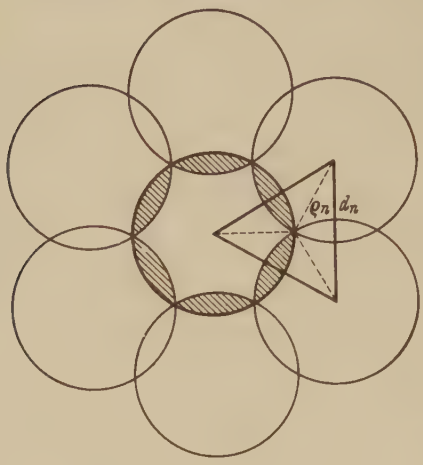


Fig. 1.

Wollen wir demnach n Punkte in einem Gebiet derart verteilen, daß jeder Punkt von den anderen möglichst weit liegen soll, so „pflastere" man das Gebiet mit kongruenten gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenlänge $d_n \sim \sqrt{\frac{2\sqrt{3}\,T}{3\,n}}$ aus und lege die Punkte in die Eckpunkte der Dreiecke.

Es ist sehr wahrscheinlich, daß der die Punkte verbindende kürzeste Streckenzug sein Maximum bei derselben asymptotischen Verteilung erreicht. Es läßt sich daher folgende (den vorigen Satz als Korollarium enthaltende) Vermutung aussprechen: Liegen in einem Gebiet mit dem Flächeninhalt T n Punkte, so lassen sich diese durch einen Linienzug mit der Länge $L_n \sim \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3} n\,T}$ verbinden.

---

[4]) $\mathfrak{K}_i$ kann auch mit 7 Kreisscheiben gemeinsame Punkte besitzen. Diese können aber nur einen überaus kleinen Teil von $\mathfrak{K}_i$ decken. Um dies einzusehen, bezeichnen wir die Mittelpunkte von $\mathfrak{K}_i$ bzw. der 7 anstoßenden Kreisscheiben mit $O, O_1, O_2, \ldots, O_7$. Es gilt $d_n = \sqrt{3}\,\varrho_n \leqq \overline{OO_l} \leqq 2\,\varrho_n$, $\overline{O_l O_{l+1}} \geqq \sqrt{3}\,\varrho_n$ $(l = 1, 2, \ldots, 7; O_8 \equiv O_1)$. Daraus folgt unmittelbar, daß das Siebeneck $O_1 O_2 \ldots O_7$ konvex ist. Die Strecke $\overline{OO_l}$ erreicht daher für ein beliebiges l sein Minimum, falls $O_1 O_2 \ldots O_7$ gleichseitig ist und für $k \neq l$ $\overline{OO_k} = 2\,\varrho_n$ ausfällt. Man erhält daher durch eine einfache Rechnung die Ungleichung $\overline{OO_l} \geqq [(4\cos^2 5\,\alpha - 1)^{\frac{1}{2}} - 2\cos 5\,\alpha]\,\varrho_n > 1 \cdot 97\,\varrho_n$; $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$, woraus sich leicht die ganz grobe Abschätzung $t_i^2 < \frac{1}{40}\varrho_n^2$ ergibt. Es leuchtet ferner ein, daß $\mathfrak{K}_i$ höchstens von 7 Kreisen berührt werden kann, denn in einem Kreisring, welcher von den konzentrischen Kreisen mit den Radien $\sqrt{3}\,\varrho_n$ bzw. $2\,\varrho_n$ begrenzt ist, können höchstens 7 Punkte mit dem kleinsten Abstand $\sqrt{3}\,\varrho_n$ liegen.

Auf die entsprechenden Aufgaben im Raume wollen wir nicht näher eingehen. Betrachten wir jedoch die obige Punktverteilung bzw. die Dreieckpflasterung und errichten über jedem Dreieck, welches aus einem bestimmten Dreieck durch eine Parallelverschiebung erhalten werden kann, ein reguläres Tetraeder. Greifen wir die außerhalb der ursprünglichen Ebene liegenden Ecken der Tetraeder heraus, so erhalten wir die ursprüngliche Punktverteilung. Man erhält, indem man so fortfährt, eine Punktverteilung im Raume und es ist zu erwarten, daß diese die bestmögliche asymptotische Verteilung bei dem entsprechenden Problem im Raume repräsentiert.

(Eingegangen am 14. August 1939.)

Über die Beziehungen zwischen den Hölderschen und Laplace-Abelschen Mittelbildungen und den Satz von O. Hölder.

Von

V. Garten.

Die Hölderschen Mittel einer Zahlenfolge (s_n)

$$h_n^{(k)} = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} h_\nu^{(k-1)}, \quad h_\nu^{(0)} = s_\nu, \quad (k = 1, 2, \ldots;\ n = 0, 1, 2, \ldots;\ n \to \infty)$$

und die Abelschen Mittel derselben Folge

$$a(x) = (1 - x) \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu x^\nu, \qquad (x \to 1 - 0)$$

wurden zum ersten Male im Hölderschen Satze miteinander in Beziehung gesetzt. In seiner berühmten Arbeit[1]), in der O. Hölder die nach ihm benannten Mittelbildungen einführte, bewies er nämlich zugleich den Satz, daß aus $h_n^{(k)} \to s$ stets $a(x) \to s$ folgt. Der Höldersche Beweis bleibt jedoch insofern etwas unbefriedigend, als er die vermittelnde Transformation, welche gerade die Hölderschen in die Abelschen Mittel überführt, gar nicht in Evidenz setzt. Obwohl man nun heutzutage mit Rücksicht auf den entsprechenden Satz für die Cesàroschen Mittel[2]) und den bekannten Äquivalenzsatz von Knopp und Schnee[3]) grundsätzlich keines direkten Beweises des Hölderschen Satzes mehr bedarf, soll dennoch aus dem oben hervorgehobenen Grunde im folgenden durch explizite Angabe der vermittelnden Transformation, welche sich als nicht „echt" erweist[4]), und den Nachweis ihrer Permanenzeigenschaft ein neuer direkter Beweis des Hölderschen Satzes gegeben werden. — In § 1 wird dies für die gewöhnlichen Hölderschen Mittel, in § 3 für die Integral-

[1]) O. Hölder, Grenzwerte von Reihen an der Konvergenzgrenze, Math. Annalen **20** (1882), S. 535—549.

[2]) Vgl. K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 3. Aufl., Berlin 1931, S. 507—508.

[3]) loc. cit. [2]), S. 498.

[4]) Die Bezeichnung *echte* Transformation bzw. *echte* Mittelbildung rührt von Herrn Knopp her (Zur Theorie der Limitierungsverfahren, 1. Mitteilung, Math. Zeitschr. **31** (1929), S. 97—127, insbesondere S. 105) und besagt, daß die Gewichte der Mittelbildung (bzw. die Elemente der Vermittlungsmatrix) nicht negativ ausfallen und bei Integralverfahren die Vermittlungsfunktion [in unserem Falle $\varphi^{(k)}(y, t)$] nicht negativ ist.

mittel durchgeführt. Aus dieser Darstellung ergibt sich weiter in § 4 eine dem Knoppschen Kernsatz[5]) entsprechende Aussage über den Vergleich der Schwankungsintervalle Laplacescher und Hölderscher Integralmittel. In § 2 werden Beziehungen zwischen den Hauptlimites gewöhnlicher Hölderscher und Cesàroscher Mittel von nicht negativen Folgen hergeleitet. Die ihnen entsprechenden Sätze bei Integralmittelbildungen sind unlängst in einer Mitteilung des Herrn Knopp und des Verf.[6]) bewiesen worden. Demgegenüber erfordert der Beweis der in § 2 mitgeteilten Ungleichungen für gewöhnliche Höldersche Mittel bei Beibehaltung derselben Methode einen erheblich größeren Aufwand an Einzelbetrachtungen. — Die an sich ganz parallel verlaufende Darstellung des Hölderschen Satzes, einmal für die gewöhnlichen Hölderschen Mittel, zum anderen für die Hölderschen Integralmittel, geschieht deswegen, weil sie die Grundlage für weitere Untersuchungen über die Beziehungen zwischen den Hölderschen und Abel-Laplaceschen Mittelbildungen bilden soll.

I.

Gewöhnliche Höldersche Mittelbildungen.

§ 1.

Beweis des Hölderschen Satzes.

Der Höldersche Satz lautet für gewöhnliche Höldersche Mittel

Satz 1. *Aus*

$$h_n^{(k)} = \frac{1}{n+1}\sum_0^n h_\nu^{(k-1)} \to s, \quad n \to \infty \quad (h_\nu^{(0)} = s_\nu;\ k = 1, 2, \ldots)$$

folgt stets

$$a(x) = a(x; s_\nu) = \sum_0^\infty a_\nu x^\nu = (1-x)\sum_0^\infty s_\nu x^\nu \to s, \qquad x \to 1-0.$$

Die Grundlage seines Beweises liefert der folgende Satz 2. Bildet man nämlich mit den rekursiv definierten Polynomen[7])

$$(1) \qquad \begin{cases} \varphi_\nu^{(k)}(x) = (\nu+1)\,[\varphi_\nu^{(k-1)}(x) - \varphi_{\nu+1}^{(k-1)}(x)], & k = 1, 2, \ldots \\ \varphi_\nu^{(0)}(x) = (1-x)\,x^\nu \end{cases}$$

---

[5]) Vgl. loc. cit. [4]), S. 115.

[6]) V. Garten und K. Knopp, Ungleichungen zwischen Mittelwerten von Zahlenfolgen und Funktionen, Math. Zeitschr. 42 (1937), S. 365—388, insbesondere S. 384 bis 385.

[7]) Das Bildungsgesetz der $\varphi_\nu^{(k)}(x)$ läßt sich offenbar bei Einführung der Differenzschreibweise $\Delta\,\varphi_\nu = \varphi_\nu - \varphi_{\nu+1}$ auch in der Form

$$(1a) \qquad \varphi_\nu^{(k)}(x) = ((\nu+1)\,\Delta)^k\ \Delta\,x^\nu, \ (k = 1, 2, \ldots), \ \varphi_\nu^{(0)}(x) = \Delta\,x^\nu$$

angeben.

zunächst rein formal die lineare Transformation

$$M_k(x) = M_k(x; s_\nu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu^{(k)}(x)\, s_\nu, \tag{2}$$

so gilt der folgende

Satz 2. *Sobald nur* $s_n = O(n^p)$ $(p > 0$ *beliebig*$)$ *ist, stellt die Transformation* $M_k(x)$ *erstens eine permanente Mittelbildung dar und führt zweitens die Hölderschen in die Abelschen Mittel über. Mit anderen Worten ist dann*

$$M_k(x; h_\nu^{(k)}) = a(x; s_\nu). \tag{3}$$

Aus Satz 2 ergibt sich der Satz 1 unmittelbar unter Berücksichtigung der Bemerkung, daß aus $h_n^{(k)} = O(1)$ stets $s_n = O(n^k)$ folgt. Letzteres ist aber ganz leicht zu zeigen; nach der Definition der H_k-Mittel ist nämlich

$$h_n^{(k-1)} = (n+1)\, h_n^{(k)} - n\, h_{n-1}^{(k)}$$

und darum für $h_n^{(k)} = O(1)$

$$h_\nu^{(k-1)} = O(n).$$

Durch wiederholte Schlußweise folgt allgemein

$$h_n^{(q)} = O(n^{k-q}) \qquad (q = 0, 1; \ldots, k).$$

Schreibt man jetzt die Polynome $\varphi_\nu^{(k)}(x)$ in der Form

$$\begin{aligned} \varphi_\nu^{(k)}(x) &= (1-x)\, x^\nu\, \mathfrak{P}_\nu^{(k)}(x) \\ &= (1-x)\, x^\nu \sum_{\lambda=0}^{k} c_\lambda^{(k)} (\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+\lambda)(1-x)^\lambda, \end{aligned} \tag{4}$$

so bestehen wegen (1) für die Koeffizienten die Rekursionsformeln

$$\begin{cases} c_\lambda^{(k)} = c_\lambda^{(k-1)} - \lambda\, c_\lambda^{(k-1)} & (\lambda = 1, 2, \ldots, k-1;\ k = 1, 2, \ldots), \\ c_k^{(k)} = 1;\ c_0^{(k)} = 0, & \text{für } k = 1, 2, \ldots, \\ c_0^{(0)} = 1. \end{cases} \tag{5}$$

Da diese Koeffizienten $c_\lambda^{(k)}$ von ν gar nicht mehr abhängen, lehrt die Abschätzung

$$|\mathfrak{P}_\nu^{(k)}(x)| \leqq \sum_{\lambda=0}^{k} |c_\lambda^{(k)}|\, (\nu+\lambda)^\lambda \leqq (\nu+k)^k \sum_{\lambda=0}^{k} |c_\lambda^{(k)}|$$

im Verein mit (4) und der Voraussetzung $0 < x < 1$, das für jedes feste $p \geqq 0$

$$\lim_{n\to\infty} n^p\, \varphi_n^{(k)}(x) = 0 \tag{6}$$

gilt. Insbesondere konvergiert hiernach die Reihe (2) für $s_n = O(n^p)$ und $0 < x < 1$. Es ist nämlich:

$$\Sigma\, |\varphi_\nu^{(k)}(x)\, s_\nu| \leqq C_k \Sigma\, \nu^p x^\nu\, |\mathfrak{P}_\nu^{(k)}(x)| \leqq C_k \Sigma\, x^\nu (\nu+k)^{k+p}, \quad (C_k \text{ konst.}).$$

Das vermittelnde M_k-Verfahren ist vom Perronschen Typ; daher genügt es zum *Beweis des Satzes* 2 zu zeigen, daß die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(7) $$\varphi_\nu^{(k)}(k) \to 0 \qquad \text{bei festem } \nu \text{ für } x \to 1-0,$$

(8) $$\sum_0^\infty \varphi_\nu^{(k)}(x) = 1,$$

(9) $$\sum_0^N |\varphi_\nu^{(k)}(x)| < \widetilde{M}_k \qquad \text{für alle } 0 < x < 1$$

wo $\widetilde{M}_k$ eine von N und x unabhängige Konstante bedeutet.

Die Bedingung (7) stellt eine unmittelbare Folge der Rekursionsformel (1) dar; denn erstens gilt $(1-x)\,x^\nu \to 0$ bei festem ν für $x \to 1-0$; strebt aber zweitens schon $\varphi_\nu^{(k-1)}(x) \to 0$ für jedes feste ν bei $x \to 1-0$, so tut es nach (1) auch $\varphi_\nu^{(k)}(x)$ selbst.

Partielle Summation gemäß (1) liefert

$$\sum_{\nu=0}^N \varphi_\nu^{(k)}(x) = \sum_{\nu=0}^N \varphi_\nu^{(k-1)}(x) - (N+1)\,\varphi_{N+1}^{(k-1)}(x),$$

woraus nach (6)

(10) $$\sum_{\nu=0}^\infty \varphi_\nu^{(k)}(x) = \sum_0^\infty \varphi_\nu^{(k-1)}(x) = \ldots = \sum_{\nu=0}^\infty \varphi_\nu^{(0)}(x) = (1-x)\sum_0^\infty x^\nu = 1$$

also (8) folgt.

Endlich liefert die Abschätzung

$$\sum_0^N |\varphi_\nu^{(k)}(x)| = \sum_{\nu=0}^N (1-x)\,x^\nu\,|\mathfrak{P}_\nu^{(k)}(x)|$$

$$\leqq \sum_{\nu=0}^N (1-x)\,x^\nu \sum_{\lambda=0}^k |c_\lambda^{(k)}|\,(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+\lambda)\,(1-x)^\lambda$$

$$\leqq \sum_{\lambda=0}^k |c_\lambda^{(k)}|\,(1-x)^{\lambda+1} \sum_{\nu=0}^N (\nu+1)\ldots(\nu+\lambda)\,x^\nu$$

wegen

$$(1-x)^{\lambda+1} \sum_{\nu=0}^N (\nu+1)\ldots(\nu+\lambda)\,x^\nu \leqq \lambda!$$

die Ungleichung

(11) $$\sum_0^N |\varphi_\nu^{(k)}| \leqq \sum_{\lambda=0}^k |c_\lambda^{(k)}|\,\lambda! = \widetilde{M}_k.$$

Da $\widetilde{M}_k$ von N nicht mehr abhängt, ist damit auch (9) bewiesen. Das M_k-Verfahren ist also permanent.

Es bleibt jetzt noch der Beweis der Beziehung (3) übrig. Dafür gewinnt man mittels partieller Summation die Beziehung

$$\sum_{\nu=0}^{N} \varphi_\nu^{(k)}(x)\, h_\nu^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{N} (\nu+1)\,[\varphi_\nu^{(k-1)}(x) - \varphi_{\nu+1}^{(k-1)}(x)]\, h_\nu^{(k)}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{N} \varphi_\nu^{(k-1)}[(\nu+1)\, h_\nu^{(k)} - \nu\, h_{\nu-1}^{(k)}] - (N+1)\, \varphi_{N+1}^{(k-1)}\, h_N^{(k)}.$$

Wegen der rekursiven Definitionsweise der H_k-Mittel

$$(\nu+1)\, h_\nu^{(k)} - \nu\, h_{\nu-1}^{(k)} = h_\nu^{(k-1)}$$

bedeutet dies aber

$$\sum_{0}^{N} \varphi_\nu^{(k)}(x)\, h_\nu^{(k)} = \sum_{0}^{N} \varphi_\nu^{(k-1)}(x)\, h_\nu^{(k-1)} - (N+1)\, \varphi_{N+1}^{(k-1)}\, h_N^{(k)}. \tag{12}$$

Mit $s_n = O(n^p)$ gilt ferner auch $h_n^{(k)} = O(n^p)$. Wegen (6) ergibt sich daher aus (12)

$$\sum_{\nu=0}^{N} \varphi_\nu^{(k)}(x)\, h_\nu^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu^{(k-1)}(x)\, h_\nu^{(k-1)} = \dots \tag{13}$$

$$= \sum \varphi_\nu^{(0)}(x)\, s_\nu = (1-x) \sum_{0}^{\infty} s_\nu x^\nu = a(x),$$

also der zweite Teil der Behauptung von Satz 2.

Mit dem Ergebnis, daß die Hölderschen Mittel in der Tat vermöge der permanenten Mittelbildung M_k in die Abelschen Mittel übergehen, ist zugleich der Höldersche Satz vollständig bewiesen [8]).

---

[8]) Um den Zusammenhang mit den nachfolgenden Ausführungen bei Integralmitteln herzustellen, wollen wir der sich aus (1) ergebenden Rekursionsformel

$$\mathfrak{P}_\nu^{(k)}(x) = (\nu+1)\{\mathfrak{P}_\nu^{(k-1)}(x) - x\, \mathfrak{P}_{\nu+1}^{(k-1)}(x)\} \tag{14}$$

für die in Formel (4) eingeführten Polynome eine etwas andere Gestalt geben.

Es bedeute (z_ν) irgendeine Folge positiver Zahlen mit $z_\nu \neq z_{\nu+1}$. Bei Einführung der abkürzenden Bezeichnung

$$\{z_\nu\}^\lambda = z_{\nu+1} \cdot z_{\nu+2} \cdots z_{\nu+\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \dots);\ \{z_\nu\}^0 = 1 \tag{15}$$

bilde man die polynomartigen Ausdrücke

$$P_k(z_\nu) = \sum_{\lambda=0}^{k} c_\lambda^{(k)} \{z_\nu\}^\lambda \qquad (k = 0, 1, 2, \dots) \tag{16}$$

gemäß der Rekursionsformel

$$\begin{cases} P_k(z_\nu) = z_{\nu+1}\left\{P_{k-1}(z_{\nu+1}) - \dfrac{P_{k-1}(z_{\nu+1}) - P_{k-1}(z_\nu)}{z_{\nu+1} - z_\nu}\right\} \\ P_0(z_\nu) = 1 \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \dots) \tag{17}$$

Dann erhält man für die Wahl $z_\nu = \nu(1-x)$ gerade die oben betrachteten Ausdrücke $\mathfrak{P}_\nu^{(k)}(x)$:

$$P_k(\nu(1-x)) = \mathfrak{P}_\nu^{(k)}(x). \tag{18}$$

§ 2.

Ungleichungen für die Hauptlimites Hölderscher Mittel von positiven Zahlenfolgen.

Mit dem Beweis der beiden folgenden Sätze wird zugleich eine Lücke geschlossen, die in der unter [6]) zitierten Arbeit verblieben war. Dort war die Vermutung ausgesprochen worden, daß die daselbst in § 4 lediglich für Integralmittel bewiesenen Sätze 1c und 1d in ihren Ergebnissen auch noch für die gewöhnlichen Hölderschen Mittel gültig bleiben. Dabei treten dann jedoch sinngemäß an die Stelle der Rieszschen Mittel einer Funktion $s(t)$ in 1d die Cesàroschen Mittel einer Folge (s_n)

$$c_n^{(k)} = \frac{1}{\binom{n+k}{n}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu+k-1}{n-\nu} s_\nu \quad (n = 0, 1, \ldots;\ k > 1).$$

Setzt man für ganzzahlige positive Werte von k zur Abkürzung

$$\overline{\lim_{n \to \infty}}\, c_n^{(k)} = C_k, \qquad \overline{\lim_{n \to \infty}}\, h_n^{(k)} = H_k,$$

so lauten die beiden Sätze, deren Beweis hier nachgeholt werden soll [9]):

Satz 3. *Für nichtnegative Folgen s_n besteht die Ungleichung*

$$H_k \leqq \frac{\eta_l}{\eta_k} H_l \qquad (l > k \geqq 1),$$

wobei

$$\eta_1 = 1 \quad \text{und} \quad \eta_k = \frac{\Gamma(k)}{(k-1)^{k-1}} e^{k-1} \qquad (k > 1)$$

gesetzt ist.

Satz 4. *Für nichtnegative Folgen s_n bestehen die Ungleichungen*

$$C_k \leqq \frac{\eta_k}{\gamma_k} H_k \qquad (k \geqq 1),$$

und allgemeiner für $l > k \geqq 1$

$$C_k \leqq \frac{\eta_l}{\gamma_k} H_l,$$

wobei

$$\gamma_1 = 1 \quad \text{und} \quad \gamma_k = \left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^{k-1} \qquad (k > 1)$$

gesetzt ist.

---

[9]) Diese Sätze sind vom Typ der Limitierungs*umkehrsätze* mit der Nebenbedingung $s_n \geq 0$. Das soll besagen, daß sie in einem Umkehrungsverhältnis zu den direkten (d. h. ohne Nebenbedingung gültigen) Aussagen $H_l \leqq H_k \leqq C_k$ stehen.

Die Beispielfolge

$$s_\nu = \begin{cases} \nu \text{ für } \nu = \mu!, \quad \mu = 1, 2, \ldots \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

lehrt, wie in § 2 und § 5 der genannten Arbeit ausführlich gezeigt ist, daß di in den Sätzen 3 und 4 auftretenden Konstanten auch wirklich angenommer werden.

Bezeichnet man analog mit A die obere Häufungsgrenze der Abelsche Mittel, $\overline{\lim}_{x \to 1-0} a(x) = A$, so ergeben sich wegen $A \leqq C_k$ aus Satz 4 fü nichtnegative Folgen s_n die (allerdings schwächeren) Ungleichungen

$$A \leqq \frac{\eta_k}{\gamma_k} H_k \leqq \frac{\eta_l}{\gamma_k} H_l.$$

Für den Beweis der Sätze schicken wir einige Bemerkungen voraus Es werde zunächst zur Abkürzung

$$\sum_{\lambda=\nu}^{\mu} \frac{1}{\lambda+1} = L\binom{\mu}{\nu}, \quad L\binom{\nu}{\nu} = \frac{1}{\nu+1}, \quad L\binom{\nu-1}{\nu} = 0,$$

$$\Delta L^p\binom{\mu}{\nu} = L^p\binom{\mu}{\nu} - L^p\binom{\mu-1}{\nu} \qquad (p = 1, 2, \ldots$$

gesetzt. Es ist also insbesondere

$$\Delta L\binom{\mu}{\nu} = \frac{1}{\mu+1}.$$

Auf Grund der Identität

$$a^{p+1} - b^{p+1} = (a-b) \sum_{\lambda=0}^{p} a^{p-\lambda} b^\lambda$$

ergeben sich die Ungleichungen

$$(19) \qquad L^p\binom{\mu-1}{\nu} \Delta L\binom{\mu}{\nu} \leqq \frac{1}{p+1} \Delta L^{p+1}\binom{\mu}{\nu} \leqq L^p\binom{\mu}{\nu} \Delta L\binom{\mu}{\nu}.$$

Aus der linken Ungleichung gewinnt man weiter wegen

$$L\binom{\mu}{\nu} \leqq L\binom{\mu-1}{\nu-1} \quad \text{und} \quad \Delta L\binom{\mu}{\nu} = \Delta L\binom{\mu}{\nu-1} \quad \text{für } \nu > 1$$

die Beziehung

$$(20) \quad L^p\binom{\mu}{\nu} \Delta L\binom{\mu}{\nu} \leqq L^p\binom{\mu-1}{\nu-1} \Delta L\binom{\mu}{\nu-1} \leqq \frac{1}{p+1} \Delta L^{p+1}\binom{\mu}{\nu-1}.$$

Aus (19) und (20) folgt daher die Abschätzung

$$(21) \quad \frac{1}{p+1} \Delta L^{p+1}\binom{\mu}{\nu} \leqq L^p\binom{\mu}{\nu} \Delta L\binom{\mu}{\nu} \leqq \frac{1}{p+1} \Delta L^{p+1}\binom{\mu}{\nu-1}.$$

Die Hölderschen Mittel lassen sich nun in der Form

$$h_n^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu}^{(k)} s_\nu$$

schreiben, wobei die Koeffizienten $a_{n\nu}^{(k)}$ der Rekursionsformel [10])

$$a_{n\nu}^{(k)} = \frac{1}{n+1} \sum_{\mu=\nu}^{n} a_{\mu\nu}^{(k-1)} \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n;\ n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{22}$$

genügen. Daraus ergeben sich leicht die folgenden Ungleichungen für die Koeffizienten $a_{n\nu}^{(k)}$. Zunächst hat man für $\nu = 0, 1, \ldots, n$ die etwas rohe Abschätzung [11])

$$a_{n\nu}^{(k)} \leqq \frac{1}{n+1} L^{(k-1)} \binom{n}{\nu}, \tag{23}$$

der wir noch die beiden, durch vollständige Induktion leicht nachprüfbaren [12]) genaueren Abschätzungen

$$a_{n\nu}^{(k)} \leqq \frac{1}{(k-1)!} \frac{1}{n+1} L^{k-1} \binom{n}{\nu-k+2} \qquad \text{für } \nu > k-2, \tag{24}$$

$$a_{n\nu}^{(k)} \geqq \frac{1}{(k-1)!} \frac{1}{n+1} L^{k-1} \binom{n}{\nu} \qquad \text{für } \nu = 0, 1, \ldots, n \tag{25}$$

---

[10]) Es ist insbesondere

$$a_{nn}^{(k)} = \frac{1}{n+1} a_{nn}^{(k-1)} = \ldots = \left(\frac{1}{n+1}\right)^k.$$

[11]) Die Rekursionsformel (22) gestattet ja auch die Schreibweise

$$a_{n\nu}^{(k+1)} = \left(\frac{1}{n+1} \sum_{\nu}^{n}\right)^k \frac{1}{\mu+1} = \left(\frac{1}{n+1} \sum_{\nu}^{n}\right)^{k-1} \frac{1}{\mu+1} \sum_{\lambda=\nu}^{\mu} \frac{1}{\lambda+1},$$

aus der bei Vergrößerung des oberen Summationsbuchstabens

$$a_{n\nu}^{(k+1)} \leqq \left(\frac{1}{n+1} \sum_{\nu}^{n}\right)^{k-1} \frac{1}{\mu+1} \sum_{\nu}^{n} \frac{1}{\lambda+1} \leqq \ldots \leqq \frac{1}{n+1} \left(\sum_{\nu}^{n} \frac{1}{\mu+1}\right)^k = \frac{1}{n+1} L^k \binom{n}{\nu}$$

folgt.

[12]) Wegen $a_{n\nu}^{(1)} = \frac{1}{n+1}$ liefert nämlich die Rekursionsformel (22)

$$a_{n\nu}^{(2)} = \frac{1}{n+1} \sum_{\mu=\nu}^{n} \frac{1}{\mu+1} = L\binom{n}{\nu} \cdot \Delta L\binom{n}{\nu}.$$

Unter der Annahme, daß die Ungleichungen (24), (25) bereits für einen Index $k = p$ zu Recht bestehen, folgt ferner einerseits aus (22) und (21)

$$a_{n\nu}^{(p+1)} \geqq \frac{1}{(p-1)!} \frac{1}{n+1} \sum_{\mu=\nu}^{n} \frac{1}{\mu+1} L^{p-1} \binom{\mu}{\nu},$$

$$\geqq \frac{1}{p!} \frac{1}{n+1} \sum_{\mu=\nu}^{n} \Delta L^p \binom{\mu}{\nu} = \frac{1}{p!} \frac{1}{n+1} L^p \binom{n}{\nu},$$

und andererseits für $\nu + 1 > p$

$$a_{n\nu}^{(p+1)} \leqq \frac{1}{(p-1)!} \frac{1}{n+1} \sum_{\mu=\nu}^{n} \frac{1}{\mu+1} L^{p-1} \binom{\mu}{\nu-p+2}$$

$$\leqq \frac{1}{p!} \frac{1}{n+1} \sum_{\mu=\nu}^{n} \Delta L^p \binom{\mu}{\nu-p+1}$$

$$\leqq \frac{1}{p!} \frac{1}{n+1} L^p \binom{n}{\nu-p+1}.$$

gegenüberstellen wollen. Mittels einfacher Integralabschätzungen [13]) gehen sie über in die folgenden Ungleichungen

$$a_{n\nu}^{(k)} \leqq \frac{1}{n+1}\left(\log\frac{n+1}{\nu}\right)^{k-1} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n) \tag{26}$$

$$a_{n\nu}^{(k)} \leqq \frac{1}{(k-1)!}\frac{1}{n+1}\left(\log\frac{n+1}{\nu+1}\right)^{k-1}\cdot\widetilde{\omega}_{\nu,n} \qquad (\nu > k-2) \tag{27}$$

$$a_{n\nu}^{(k)} \geqq \frac{1}{(k-1)!}\frac{1}{n+1}\left(\log\frac{n+1}{\nu+1}\right)^{k-1} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n) \tag{28}$$

wobei

$$\widetilde{\omega}_{\nu,n} = \left(1 - \frac{\log\left(1-\frac{k-1}{\nu+1}\right)}{\log\frac{n+1}{\nu+1}}\right)^{k-1}.$$

gesetzt ist.

Für den *Beweis des Satzes* 3 schreiben wir mit $p > n$, $l > k \geqq 1$

$$h_n^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu}^{(k)} s_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} a_{p\nu}^{(l)} s_\nu \cdot Q_\nu$$

$$\leqq M(n,p)\cdot\sum_{\nu=0}^{n} a_{p\nu}^{(l)} s_\nu \leqq M(n,p)\cdot h_p^{(l)},$$

wobei $M(n, p)$ eine obere Schranke des Quotienten

$$Q_\nu = \frac{a_{n\nu}^{(k)}}{a_{p\nu}^{(l)}} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n)$$

bedeutet, die hernach durch geeignete Wahl des Index $p = p(n)$ möglichst klein zu machen ist.

Es sei nun $\varepsilon > 0$ eine beliebig kleine vorgegebene Zahl und $\delta = \delta\left(\frac{p+1}{n+1};\ \varepsilon\right)$ so klein, daß sowohl

$$(l-1)!\,\frac{p+1}{n+1}\left(\frac{1}{\log\frac{1}{\delta}}\right)^{l-k} < \varepsilon \tag{29}$$

als auch

$$(l-1)!\,\frac{p+1}{n+1}\,\frac{\left(\log\frac{1}{1-\delta}\right)^{k-1}}{\left(\log\frac{p+1}{n+1}\right)^{l-1}} < \varepsilon \tag{30}$$

gilt.

---

[13]) Nämlich:

$$L\binom{n}{\nu} = \sum_{\mu=\nu}^{n}\frac{1}{\mu+1} \leqq \sum_{\mu=\nu}^{n}\int_{\mu}^{\mu+1}\frac{dt}{t} = \log\frac{n+1}{\nu},$$

$$L\binom{n}{\nu} \geqq \sum_{\mu=\nu}^{n}\int_{\mu+1}^{\mu+2}\frac{dt}{t} \geqq \log\frac{n+2}{\nu+1}.$$

Für die Bestimmung einer oberen Schranke $M(n, p)$ von Q_ν unterscheiden wir nun die folgenden drei Fälle:

$$\text{I. } \nu+1<\delta(n+1), \qquad \text{II. } \nu+1>(1-\delta)(n+1),$$
$$\text{III. } \delta(n+1)\leqq \nu+1\leqq(1-\delta)(n+1).$$

Im Fall I liefern die Beziehungen (23), (25) und (29) wegen $n<p$

$$Q_\nu \leqq (l-1)!\,\frac{p+1}{n+1}\,\frac{1}{L^{l-k}\left(\frac{p}{\nu}\right)} \leqq (l-1)!\,\frac{p+1}{n+1}\,\frac{1}{\left(\log\frac{n+1}{\nu+1}\right)^{l-k}}<\varepsilon.$$

Im Fall II erhält man aus (26), (28) und (30) wegen $n<p$

$$Q_\nu \leqq (l-1)!\,\frac{p+1}{n+1}\,\frac{\left(\log\frac{n+1}{\nu}\right)^{k-1}}{\left(\log\frac{p+1}{\nu+1}\right)^{l-1}} \leqq (l-1)!\,\frac{p+1}{n+1}\,\frac{\left(\log\frac{1}{1-\delta}\right)^{k-1}}{\left(\log\frac{p+1}{n+1}\right)^{l-1}}\,\widetilde{\omega}_n<\varepsilon\,\widetilde{\omega}_n,$$

mit $\widetilde{\omega}_n=\widetilde{\omega}_n(\delta)\to 1$ für $n\to\infty$ [14]).

Im Fall III sei n so groß, daß $n+1>\frac{k-1}{\delta}$ gilt. Dann wird wegen

$$\widetilde{\omega}_{\nu,n}\leqq\left(1+\frac{\log\left(1-\frac{k-1}{\delta(n+1)}\right)}{\log(1-\delta)}\right)=\omega_n,$$

wobei nun $\omega_n=\omega_n(\delta)$ unabhängig von ν gegen 1 strebt, wenn $n\to\infty$. Mithin folgt jetzt aus (27) und (28) die Abschätzung

$$Q_\nu \leqq \frac{(l-1)!\,p+1}{(k-1)!\,n+1}\,\frac{\left(\log\frac{n+1}{\nu+1}\right)^{k-1}}{\left(\log\frac{p+1}{\nu+1}\right)^{l-1}}\cdot\omega_n.$$

In der unter [6]) zitierten Arbeit wurde aber bereits gezeigt, daß die Funktion

$$\varphi(t)=\frac{(l-1)!\,p+1}{(k-1)!\,n+1}\,\frac{\left(\log\frac{n+1}{t}\right)^{k-1}}{\left(\log\frac{p+1}{t}\right)^{l-1}}$$

ihr Maximum bei $t=t^*=\left(\frac{(n+1)^{l-1}}{(p+1)^{k-1}}\right)^{\frac{1}{l-k}}$ annimmt und dieses Maximum den Wert

$$\varphi(t^*)=\frac{(l-1)!\,(k-1)^{k-1}}{(k-1)!\,(l-1)^{l-1}}(l-k)^{l-k}\cdot\frac{p+1}{n+1}\left(\log\frac{p+1}{n+1}\right)^{k-l}$$

---

[14]) Weil jetzt

$$\left(\log\frac{n+1}{\nu}\right)^{k-1}\leqq\left(\log\frac{1}{1-\delta}+\log\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\right)^{k-1}$$
$$\leqq\left(\log\frac{1}{1-\delta}\right)^{k-1}\left(1-\frac{O\left(\frac{1}{\nu}\right)}{\log(1-\delta)}\right)^{k-1}=\left(\log\frac{1}{1-\delta}\right)^{k-1}\widetilde{\omega}_n,$$

da ja $(1-\delta)(n+1)<\nu+1\leqq n+1$ gilt.

besitzt. Wir können demnach $M(n, p) = \varphi(t^*)\,\omega_n$ setzen. Ersetzen wir nun noch in $\varphi(t^*)$ die Größe $p+1$ durch y und betrachten den so erhaltenen Ausdruck $\psi(y)$ in seiner Abhängigkeit von y, so ist leicht zu sehen, daß $\psi(y)$ für $y^* = e^{l-k}(n+1)$ am kleinsten wird, und zwar $= \frac{\eta_l}{\eta_k}$. Setzen wir darum

$$p = [e^{l-k}(n-1)], \tag{31}$$

so wird bei dieser Wahl $y^* < p+1$ und

$$\varphi(t^*) \leqq \psi(y^*) \cdot \frac{p+1}{y^*} = \frac{\eta_l}{\eta_k}\left(1 + \frac{1}{p}\right) < \frac{\eta_l}{\eta_k}\,\omega_n'.$$

Es sei schließlich n_ν eine Folge, für die $h_{n_\nu}^{(k)} \to H_k$ gilt. Durchläuft jetzt p die nach (31) zugeordnete Folge, so ergibt sich aus

$$h_{n_\nu}^{(k)} \leqq \frac{\eta_l}{\eta_k}\,\omega_n \cdot h_{p_\nu}^{(l)}$$

die Behauptung des Satzes 3.

Der *Beweis des Satzes* 4 verläuft methodisch ebenso. Wir schreiben also

$$c_n^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{n} b_{n\nu}^{(k)} s_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} a_{p\nu}^{(k)} s_\nu \cdot \bar{Q}_\nu$$

und bestimmen wiederum zunächst eine möglichst günstige obere Schranke $\overline{M}(n, p)$ des Quotienten

$$\bar{Q}_\nu = \frac{b_{n\nu}^{(k)}}{a_{p\nu}^{(k)}} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n).$$

Wegen (28) und der Abschätzung [15])

$$b_{n\nu}^{(k)} = \frac{\binom{n-\nu+k-1}{n-\nu}}{\binom{n+k}{n}} \leqq \frac{k}{n+1}\left(1 - \frac{\nu+1}{n+1}\right)^{k-1} \omega_{n-\nu},$$

$$\omega_{n-\nu} = \left(1 + \frac{k-1}{n-\nu}\right)^{k-1} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$$

wird

$$Q_\nu \leqq k!\,\frac{p+1}{n+1}\left(\frac{1 - \frac{\nu+1}{n+1}}{\log\frac{p+1}{\nu+1}}\right)^{k-1} \omega_{n-\nu} \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1).$$

---

[15]) Es ist ja

$$b_{n\nu}^{(k)} = \frac{k}{n+1}\,\frac{[n+k-(\nu+1)]}{(n+k)}\,\frac{[n+k-1-(\nu+1)]}{(n+k-1)} \cdots \frac{[n+2-(\nu+1)]}{(n+2)}$$

$$\leqq \frac{k}{n+1}\left(1 - \frac{\nu+1}{n+k}\right)^{k-1} = \frac{k}{n+1}\left(1 - \frac{\nu+1}{n+1}\right)^{k-1}\left(\frac{1 - \frac{\nu+1}{n+k}}{1 - \frac{\nu+1}{n+1}}\right)^{k-1}$$

$$< \frac{k}{n+1}\left(1 - \frac{\nu+1}{n+k}\right)^{k-1}\left(1 + \frac{k-1}{n-\nu}\right)^{k-1}.$$

Nach Vorgabe einer willkürlich kleinen Zahl $\varepsilon > 0$ sei $\delta = \delta\left(\frac{p+1}{n+1}; \varepsilon\right)$ derart bestimmt, daß

$$k!\, k^{k-1} \frac{p+1}{n+1} \left(\frac{\delta}{\log \frac{p+1}{n+1}}\right)^{k-1} < \varepsilon$$

gilt. Wir unterscheiden jetzt die drei Fälle:

I. $\nu = n$, II. $(1-\delta)(n+1) \leqq \nu + 1 \leqq n$, III. $1 \leqq (\nu+1) \leqq (1-\delta)(n+1)$.

Im Fall I hat man wegen $\binom{n+k}{n} > \binom{n+2}{n}$

$$Q_n = \frac{(k-1)!}{\binom{n+k}{n}} \frac{p+1}{\left(\log \frac{p+1}{n+1}\right)^{k-1}} < \frac{(k-1)!}{\left(\log \frac{p+1}{n+1}\right)^{k-1}} \frac{p+1}{n+1} \cdot \frac{2}{n+2},$$

demnach bei festgehaltenem Wert von $\left(\frac{p+1}{n+1}\right)$ stets $Q_n = o(1)$.

Im Fall II wird $\omega_{n-\nu} < k^{k-1}$, weil $n - \nu \geqq 1$ ist. Wegen $\left(\frac{\nu+1}{n+1}\right) \geqq 1-\delta$ und $\nu \leqq n$ ergibt sich also

$$Q_\nu \leqq k!\, \frac{p+1}{n+1} \left(\frac{\delta}{\log \frac{p+1}{n+1}}\right)^{k-1} k^{k-1} < \varepsilon.$$

Im Fall III wird $n - \nu > \delta(n+1)$, also $\omega_{n-\nu} < \left(1 + \frac{k-1}{\delta(n+1)}\right)^{k-1} = \omega_n$, wobei nun $\omega_n = \omega_n(\delta)$ unabhängig von ν gegen 1 strebt für $n \to \infty$. Es gilt jetzt

$$Q_\nu \leqq k!\, \frac{p+1}{n+1} \left(\frac{1 - \frac{\nu+1}{n+1}}{\log \frac{p+1}{\nu+1}}\right)^{k-1} \omega_n \leqq k!\, \frac{p+1}{n+1}\, \omega_n \max_{0<t<n+1} f(t),$$

wenn

$$f(t) = \left(\frac{1 - \frac{t}{n+1}}{\log \frac{p+1}{t}}\right)^{k-1}$$

gesetzt wird. Diese Funktion wird aber am größten für die zwischen 0 und $n-1$ gelegene Lösung $t = t^*$ der Gleichung

$$t\, e^{\frac{n+1}{t}} = e(p+1).$$

Mithin ist

$$Q_\nu \leqq k!\, \frac{p+1}{n+1}\, \omega_n \left(\frac{1 - \frac{t^*}{n+1}}{\log \frac{p+1}{t^*}}\right)^{k-1}.$$

Bezeichnet nun y eine positive Zahl $< p+1$, so ist

$$(32) \qquad Q_\nu \leqq k!\, \frac{p+1}{y}\, \omega_n \cdot \frac{y}{n+1} \left(\frac{1 - \frac{t^*}{n+1}}{\log \frac{y}{t^*}}\right)^{k-1} = \frac{p+1}{y}\, \omega_n \cdot \psi(t^*).$$

Die Funktion $\psi(t^*) = \Psi\left(\frac{y}{n+1}\right)$ wird aber für $\frac{y}{n+1} = \frac{1}{k}e^{k-1}$ am kleinsten und hat dann den Wert $\frac{\eta_k}{\gamma_k}$. Wir wählen daher

$$p = \left[\frac{e^{k-1}}{k}(n+1)\right], \tag{33}$$

so daß in Übereinstimmung mit unserer obigen Annahme $p \leqq y^* < p+1$ gilt. Läßt man nun den Index n eine solche Folge n_ν durchlaufen, für welche $c_{n_\nu}^{(k)} \to C_k$ gilt, so ergibt sich, weil noch wegen der Verknüpfung von p mit n_ν gemäß (33) der Faktor $\frac{p+1}{y} < 1 + \frac{1}{p} \to 1$ strebt für $n \to \infty$, aus (32) die erste Behauptung des Satzes 4. Unter Anwendung des Satzes 3 folgt sodann auch der zweite Teil der Behauptung des Satzes 4.

II.

Höldersche Integralmittelbildungen.

§ 3.

Der Höldersche Satz für Integralmittel.

Als Grundlage für die folgenden Ausführungen beschäftigt uns jetzt die Beziehung der Hölderschen Integralmittel einer über jedes Intervall $(0, x)$ integrierbaren Funktion $s(t)$

$$h^{(k)}(x) = \frac{1}{x}\int_0^x h^{(k-1)}(t)\,dt \quad (k = 1, 2, \ldots;\ h^{(0)}(t) = s(t)) \tag{34}$$

zu ihren Laplaceschen Mitteln

$$L(y) = L(y; s(t)) = y\int_0^\infty e^{-ty}\, s(t)\,dt. \tag{35}$$

Ähnlich wie in § 1 gilt hier der

Satz 5. *Aus* $h^{(k)}(x) \to s$ *für* $x \to \infty$ *und* $s(t) = O(t^q)$ $(q > 0$, *beliebig*) *folgt stets* $L(y) \to s$ *für* $y \to +0$.

Ber Beweis dieses „Hölderschen Satzes" ergibt sich wiederum unmittelbar aus der Kenntnis derjenigen Mittelbildung, welche die Hölderschen in die Laplaceschen Mittel überführt.

Mit den durch die Rekursionsformel

$$\begin{aligned} P_k(x) &= x\left(P_{k-1}(x) - P'_{k-1}(x)\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots) \\ P_0(x) &= 1 \end{aligned} \tag{36}$$

erklärten Polynomen k-ten Grades bilde man die Vermittlungsfunktionen

$$\varphi_k(y, t) = y\, e^{-ty}\, P_k(ty), \tag{37}$$

die wegen (36) der Beziehung

$$\varphi_k(y,t) = -t\frac{\partial}{\partial t}\varphi_{k-1}(y,t) \qquad (k=1,2,\ldots) \tag{38}$$
$$\varphi_0(y,t) = y\,e^{-ty}$$

genügen. Über die hiermit gebildete Transformation

$$M_k(y) = M_k(y; s(t)) = \int_0^\infty \varphi_k(y,t)\,s(t)\,dt \qquad (y \to +0) \tag{39}$$

gilt dann der

Satz 6. *Die Mittelbildung $M_k(y)$ ist erstens permanent und führt zweitens, sobald nur $s(t) = O(t^q)$ (q beliebig > 0) ist, die Hölderschen in die Laplaceschen Mittel über, d. h. es ist*

$$M_k(y; h^{(k)}(t)) = L(y; s(t)). \tag{39a}$$

Zum Nachweis der Permanenz genügt es zu zeigen, daß die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind

$$\int_0^\infty \varphi_k(y,t)\,dt = 1, \tag{40}$$

$$\int_0^T |\varphi_k(y,t)|\,dt \to 0 \quad \text{für } y \to 0 \text{ bei beliebigem, aber festem } T > 0, \tag{41}$$

$$\int_0^\infty |\varphi_k(y,t)|\,dt \leqq \widehat{M}_k \quad \text{für alle } y > 0, \tag{42}$$

wobei $\widehat{M}_k$ von y nicht abhängt.

Zunächst sei bemerkt, daß für jedes feste $p > 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ und $y > 0$

$$\lim_{\omega \to \infty} \omega^p\,\varphi_k(y,\omega) = y \lim_{\omega \to \infty} \omega^p\,e^{-y\omega}\,P_k(\omega) = 0 \tag{43}$$

ist. Wird ferner

$$P_k(x) = \sum_{\lambda=0}^{k} c_\lambda^{(k)}\,x^\lambda \tag{44}$$

gesetzt, so gelten gemäß (36) für die Koeffizienten $c_\lambda^{(k)}$ die Rekursionsformeln

$$\begin{cases} c_0^{(k)} = 0 & \text{für alle } k = 1, 2\ldots, \\ c_k^{(k)} = c_{k-1}^{(k-1)} = \ldots = c_0^{(0)} = 1, \\ c_\lambda^{(k)} = c_{\lambda-1}^{(k-1)} - \lambda\,c_\lambda^{(k-1)} & \text{für } \lambda = 1, 2, \ldots, k-1, \end{cases} \tag{45}$$

also insbesondere

$$c_1^{(k)} = (-1)^{k+1}.$$

Nunmehr liefert partielle Integration nach (38)

$$\int_0^\omega \varphi_k(y,t)\,dt = -\omega\,\varphi_{k-1}(y,\omega) + \int_0^\omega \varphi_{k-1}(y,t)\,dt \tag{46}$$

und der Grenzübergang $\omega \to \infty$ wegen (43)

$$(47) \qquad \int_0^\infty \varphi_k(y,t)\,dt = \int_0^\infty \varphi_{k-1}(y,t)\,dt = \ldots = \int_0^\infty \varphi_0(y,t)\,dt = 1,$$

also ist (40) erfüllt. Ferner gilt nach (44)

$$(48) \qquad \int_0^T |\varphi_k(y,t)|\,dt = \int_0^{Ty} e^{-\alpha}|P_k(\alpha)|\,d\alpha \leqq \sum_{\lambda=1}^{k} |c_\lambda^{(k)}| \int_0^{Ty} e^{-\alpha}\alpha^\lambda\,d\alpha,$$

so daß in der Tat bei festem $T > 0$ und $y \to +0$ auch (41) folgt. Aus (48) folgt aber weiterhin für jedes beliebig große $\omega > 0$

$$(49) \qquad \int_0^\omega |\varphi_k(y,t)|\,dt \leqq \sum_{\lambda=1}^{k} |c_\lambda^{(k)}| \int_0^\infty e^{-\alpha}\alpha^\lambda\,d\alpha \leqq \sum_{\lambda=1}^{k} |c_\lambda^{(k)}| \cdot \Gamma(\lambda+1) = \widehat{M}_k,$$

mithin auch (42), weil die Konstante $\widehat{M}_k$ von ω gar nicht abhängt. Damit ist die Permanenz der Mittelbildung (39) erkannt.

Es bleibt noch der Beweis der Beziehung (39a). Mit der Voraussetzung $s(t) = O(t^q)$ gilt zugleich $h^{(j)}(t) = O(t^q)$ $(j = 0, 1, \ldots, k)$, also nach (43) für $p = q + 1$, $k = j - 1$

$$(50) \qquad \lim_{\omega \to \infty} \omega\, h^{(j)}(\omega)\, \varphi_{j-1}(y,\omega) = 0.$$

Partielle Integration ergibt wiederum wegen (38) und der Beziehung

$$\left(t\, h^{(j)}(t)\right)' = h^{(j-1)}(t)$$

die Rekursionsformel

$$(51) \qquad \int_0^\omega \varphi_j(y,t)\, h^{(j)}(t)\,dt = -\omega\, h^{(j)}(\omega)\, \varphi_{j-1}(y,\omega) + \int_0^\omega \varphi_{j-1}(y,t)\, h^{(j-1)}(t)\,dt,$$

woraus für $\omega \to \infty$ gemäß (50)

$$M_j(y; h^{(j)}(t)) = M_{j-1}(y; h^{(j-1)}(t)) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

und zufolge $M_0(y; h^{(0)}(t)) = L(y; s(t))$ die Behauptung (39a) folgt.

§ 4.

Vergleich der Schwankungsintervalle der Hölderschen und Laplaceschen Mittel.

Es werde jetzt

$$(52) \qquad \overline{\lim_{x \to \infty}}\, h(x) = \begin{cases} H_k \\ h_k \end{cases} \qquad \overline{\lim_{y \to +0}}\, L(y) = \begin{cases} L \\ l \end{cases}$$
$$H_k - h_k = \Omega(H_k), \qquad L - l = \Omega(L)$$

gesetzt. Für positive Vermittlungsfunktionen $\varphi_k(y,t)$ hätte man nach dem Knoppschen Kernsatz [16])

$$(a) \qquad h_k \leqq l \leqq L \leqq H_k, \qquad (b) \qquad \Omega(L) \leqq \Omega(H_k).$$

[16]) Vgl. die in Fußnote [4]) genannte Arbeit, S. 115.

Da indessen $\varphi_k(y,t)$ nur für $k=1$ (und $k=0$) durchweg nicht negativ ausfällt, gelten die Ungleichungen (a) und (b) lediglich für $k=1$, während sie für $k>1$ ihre allgemeine Gültigkeit (d. h. bei beliebiger Wahl von $s(t)$) einbüßen.

Satz 7. *An ihre Stelle treten dann, wenn wieder*

(53) $$s(t) = O(t^q) \qquad (q>0 \text{ beliebig})$$

vorausgesetzt wird, die folgenden Ungleichungen:

(54) $$h_k\beta_k - H_k\delta_k \leqq l \leqq L \leqq H_k\beta_k - h_k\delta_k,$$

(55) $$\Omega(L) \leqq \gamma_k \Omega(H_k),$$

wobei

(56) $$\begin{cases} \gamma_k = \int_0^\infty e^{-\alpha}|P_k(\alpha)|\,d\alpha, & \gamma_k = \beta_k + \delta_k, \\ \beta_k = \int_0^{\infty +} e^{-\alpha}|P_k(\alpha)|\,d\alpha, & \delta_k = \int_0^{\infty -} e^{-\alpha}|P_k(\alpha)|\,d\alpha \text{ [17]} \end{cases}$$

gesetzt ist und das Zeichen + andeutet, daß über alle positiven α mit nichtnegativem $P_k(\alpha)$ zu integrieren ist, während das Zeichen − die Integration über die komplementäre Punktmenge der rechten Halbachse anzeigt. Es ist überdies γ_k die beste Konstante.

Der vorstehende Satz, der die Schwankung der Laplaceschen Mittel einer Funktion durch die Schwankung ihrer Hölderschen Mittel abschätzt, stellt also in einem speziellen Fall ein Analogon des Knoppschen Kernsatzes für nicht echte Verfahren dar.

Beweis. Ist $\Omega(H_k)$ unendlich, so ist die Aussage trivial. Wenn aber $\Omega(H_k)$ endlich ist und die Voraussetzung (53) gilt, kann man nach (39a) $L(y)$ durch $h^{(k)}(t)$ ausdrücken:

(57) $$L(y; s(t)) = \int_0^\infty e^{-\alpha} P_k(\alpha)\, h^{(k)}\left(\frac{\alpha}{y}\right) d\alpha.$$

Es sei nun

(58) $$|h^{(k)}(t)| < M \text{ für alle } t \geqq 0$$

und

$$h_k - \varepsilon \leqq h^{(k)}(t) \leqq H_k + \varepsilon \text{ für } t > T,$$

folglich

(59) $$h_k - \varepsilon \leqq h^{(k)}\left(\frac{\alpha}{y}\right) \geqq H_k + \varepsilon \text{ für } \alpha > Ty$$

---

[17]) Es ist also

$$\left.\begin{matrix}\beta_k \\ \delta_k\end{matrix}\right\} = \int_0^\infty e^{-\alpha} \frac{|P_k(\alpha)| \pm P_k(\alpha)}{2}\, d\alpha.$$

Wir setzen noch zur Abkürzung

$$J^+ = \int_{Ty}^{\infty +} e^{-\alpha} |P_k(\alpha)| d\alpha, \qquad J^- = \int_{Ty}^{\infty -} e^{-\alpha} |P_k(\alpha)| d\alpha$$

$$J = J^+ + J^-$$

und

$$R^+ = \int_0^{Ty +} e^{-\alpha} |P_k(\alpha)| d\alpha, \qquad R^- = \int_0^{Ty -} e^{-\alpha} |P_k(\alpha)| d\alpha \tag{60}$$

$$R = R^+ + R^-.$$

Dann gilt nach (56)

$$R^+ + J^+ = \beta_k, \qquad R^- + J^- = \delta_k, \qquad R + J = \gamma_k, \tag{61}$$

und es ist nach (41) für $y \to +0$

$$R = o(1), \qquad R^+ = o(1), \qquad R^- = o(1). \tag{62}$$

Zum Beweis der Ungleichungen (54) und (55) zerlegen wir das Integral rechter Hand in (57)

$$L(y) = \int_0^{Ty} e^{-\alpha} P_k(\alpha) h^{(k)}\left(\frac{\alpha}{y}\right) d\alpha + \int_{Ty}^{\infty},$$

wobei nun nach (58) und (62) der erste Summand $= o(1)$ wird, während der zweite wegen (59) die folgende Abschätzung gestattet:

$$(h_k - \varepsilon) J^+ - (H_k + \varepsilon) J^- \leqq \int_{Ty}^{\infty +} e^{-\alpha} P_k(\alpha) h^{(k)}\left(\frac{\alpha}{y}\right) d\alpha$$

$$- \int_{Ty}^{\infty -} e^{-\alpha} |P_k(\alpha)| h^{(k)}\left(\frac{\alpha}{y}\right) d\alpha \leqq (H_k + \varepsilon) J^+ - (h_k - \varepsilon) J^-.$$

Diese Ungleichungen lassen sich aber nach (60), (61) und (62) in der Form

$$(h_k - \varepsilon)\beta_k - (H_k + \varepsilon)\delta_k \leqq L(y) + o(1) \leqq (H_k + \varepsilon)\beta_k - (h_k - \varepsilon)\delta_k$$

schreiben, aus der sich für $y \to +0$ und wegen der Willkürlichkeit von $\varepsilon > 0$ die Behauptung (54) ergibt. Die Ungleichung (55) ist dann eine unmittelbare Folgerung aus (54).

Das folgende Beispiel, das ich im wesentlichen Herrn Karamata verdanke, zeigt, daß sich die Konstante γ_k in (55) nicht verbessern läßt. Es sei

$$h^{(k)}(t) = \begin{cases} sg\, P_k(t) & \text{in } e^{-m} \leqq t < e^m \\ -sg\, P_k(t) & \text{in } e^m \leqq t < e^{3m} \end{cases} \tag{63}$$

und dabei $m > 0$ so groß gewählt, daß alle positiven Stellen, an denen ein Vorzeichenwechsel des Polynoms $P(t)$ stattfindet, im Innern des Intervalls (e^{-m}, e^{3m}) liegen und bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$

$$(64) \qquad \int_0^{e^{-m}} e^{-\alpha} |P_k(\alpha)| \, d\alpha < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad \int_{e^m}^{\infty} e^{-\alpha} |P_k(\alpha)| \, d\alpha < \frac{\varepsilon}{4}$$

ist. Außerhalb des Grundintervalls (e^{-m}, e^{3m}) sei $h^{(k)}(t)$ über die positive Halbachse gemäß

$$h^{(k)}(t) = h^{(k)}(e^{-4m} t) = h^{(k)}(e^{4\lambda m} t) \quad (\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

periodisch fortgesetzt. Durch diese Festsetzungen ist wegen $h^{(k-1)}(t) = (t\, h^{(k)}(t))'$ unsere Beispielfunktion $s(t)$ bis auf ihre Werte in den Sprungstellen von $h^{(k)}(t)$ eindeutig bestimmt. Wir wollen ihr dort überall und in $t = 0$ den Wert 0 erteilen. Es ist nun offenbar $H_k = 1$, $h_k = -1$ und daher nach (63) und (64)

$$L(e^{-4\lambda m}) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha} P_k(\alpha) h^{(k)}(\alpha e^{4\lambda m}) \, d\alpha$$

$$\geqq \int_{e^{-m}}^{e^m} e^{-\alpha} |P_k(\alpha)| \, d\alpha - \frac{\varepsilon}{2} = \gamma_k - \varepsilon,$$

woraus für $\lambda = 1, 2, \ldots, \to \infty$, da die rechte Seite dieser Ungleichung nicht mehr von λ abhängt,

$$L \geqq \gamma_k - \varepsilon$$

folgt. Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, ist $L \geqq \gamma_k$. Mit $H_k = 1$, $h_k = -1$ ergibt aber (54) $L \leqq \gamma_k$. Es muß also $L = \gamma_k$ sein.

Da sich ganz entsprechend zeigen läßt, daß bei demselben Beispiel $l \leqq -\gamma_k$ ist, und andererseits nach (54) $-\gamma_k \leqq l$ gilt, muß auch $l = -\gamma_k$ sein.

Daher ist für unsere Folge

$$\Omega(L) = 2\gamma_k, \qquad \Omega(H_k) = 2,$$

also γ_k die beste Konstante in (55).

(Eingegangen am 17. August 1939.)

Über Approximation regulärer Funktionen eines komplexen Argumentes durch rationale Funktionen.

Von

Ernst Lammel in Prag.

$\mathfrak{B}$ sei ein beschränkter offener Bereich, dessen Berandung von einer geschlossenen Jordankurve C gebildet wird. a sei eine Stelle aus $\mathfrak{B}$ und $\{b_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$ eine Folge von Punkten auf C.

Jeder in $\mathfrak{B}$ regulären Funktion $f(z)$ lassen sich die rationalen Funktionen

$$(1) \qquad s_n(z) = \begin{cases} A_0 \text{ für } n = 0 \quad \text{und} \\ A_0 + \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{z-a}{z-b_\mu} \text{ für } n \geqq 1 \end{cases}$$

dadurch eindeutig zuordnen, daß $s_n(z)$ mit $f(z)$ an der Stelle $z = a$ im Funktionswert und den Ableitungen bis zur n-ten Ordnung übereinstimmen soll. Die rationalen Funktionen $s_n(z)$ sind die Partialsummen der Reihe

$$(2) \qquad A_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{z-a}{z-b_\mu}.$$

Zu jeder in $\mathfrak{B}$ regulären Funktion $f(z)$ gehört also eine und nur eine Reihe von der Form (2).

Wir fragen nach notwendigen und zugleich hinreichenden Bedingungen, welchen die Stelle a aus $\mathfrak{B}$ im Verein mit der Folge $\{b_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, \ldots)$ auf C noch zu genügen hat, damit jede in $\mathfrak{B}$ reguläre Funktion $f(z)$ derart durch die zu ihr gehörigen rationalen Funktionen $s_n(z)$ approximiert wird, daß die Funktionenfolge $\{s_n(z)\}$, $(n = 1, 2, \ldots)$ auf jeder abgeschlossenen Punktmenge aus $\mathfrak{B}$ gleichmäßig gegen $f(z)$ konvergiert [1]).

---

[1]) Wegen der bisherigen Arbeiten über Approximation regulärer Funktionen durch rationale Funktionen vgl. insbesondere das Werk von J. L. Walsh, Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain (American Mathematical Society Colloquium Publications, Volume XX), New York City, 1935.

Die Antwort hierauf enthält der folgende

Satz 1. *Bedeutet* $w = w(z, a)$ *eine beliebige derjenigen Funktionen, welche den Bereich* $\mathfrak{B}$ *schlicht auf* $|w| < 1$ *abbilden, wobei* $z = a$ *in* $w = 0$ *übergeht, so ist das Erfülltsein der Limesgleichung*

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{z - a}{w(z,a) \sqrt[n]{\prod_{\mu=1}^{n} (z - b_\mu)}} \right| = 1 \tag{3a}$$

für jeden Wert von z *aus* $\mathfrak{B}$ *oder das Erfülltsein der Limesgleichung*

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{t - a}{\sqrt[n]{\prod_{\mu=1}^{n} (t - b_\mu)}} \right| = 1 \tag{3b}$$

für jeden Wert von t *aus dem Äußeren von* C *eine sowohl notwendige als auch hinreichende Bedingung dafür, daß die jeder in* $\mathfrak{B}$ *regulären Funktion* $f(z)$ *durch* (1) *eindeutig zugeordnete Funktionenfolge* $\{s_n(z)\}$, $(n = 1, 2, \ldots)$ *auf jeder abgeschlossenen Punktmenge aus* $\mathfrak{B}$ *gleichmäßig gegen* $f(z)$ *konvergiert* [2]).

Da der Bereich $\mathfrak{B}$ nur von einer einzigen geschlossenen Jordankurve C begrenzt wird, so vermittelt bekanntlich jede konforme Abbildung von $\mathfrak{B}$ auf das Innere des Einheitskreises zugleich eine stetige und umkehrbar eindeutige Abbildung des aus $\mathfrak{B}$ durch Hinzunahme seiner Randpunkte entstehenden abgeschlossenen Gebietes auf den abgeschlossenen Einheitskreis. Jede Folge von Punkten $\{b_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, \ldots)$ auf C geht also bei einer konformen Abbildung von $\mathfrak{B}$ auf das Innere des Einheitskreises umkehrbar eindeutig in eine Punktfolge $\{\beta_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, \ldots)$ seiner Peripherie über.

Mit Hilfe der konformen Abbildung des Bereiches $\mathfrak{B}$ auf $|w| < 1$ durch die Funktion $w = w(z, a)$ können wir den Satz 1 auch so aussprechen:

Satz 2. *Soll die aus Randpunkten des Bereiches* $\mathfrak{B}$ *bestehende Folge* $\{b_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$ *im Verein mit der Stelle* a *aus* $\mathfrak{B}$ *den Bedingungen* (3a) *und* (3b) *genügen, so ist hierfür notwendig und hinreichend, daß bei der durch die Funktion* $w = w(z, a)$ *gegebenen schlichten Abbildung des Bereiches* $\mathfrak{B}$ *auf* $|w| < 1$ *die Folge* $\{b_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$ *in eine auf* $|w| = 1$ *im Sinne von Weyl* [3]) *gleichverteilte Folge* $\{\beta_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$ *übergeht* [4]).

---

[2]) Den Fall, daß der Bereich $\mathfrak{B}$ der Einheitskreis $|z| < 1$ ist und die Stelle a in $z = 0$ liegt, behandelt die Arbeit E. Lammel, Über gewisse Reihen, welche die Potenzreihen als Grenzfall enthalten, Math. Zeitschr. **42** (1937), S. 389–398.

[3]) H. Weyl, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins. Math. Annalen **77** (1916), S. 313–352.

[4]) Wegen der mit diesem Satze in innigem Zusammenhang stehenden Ergebnisse über Approximation durch Polynome von L. Fejér, I. Kalmár und J. L. Walsh vgl. das in Fußnote [1]) zitierte Werk, S. 167–170.

§ 1.

Integraldarstellung für die Entwicklungskoeffizienten $\{A_\nu\}$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ und das Restglied.

Um für die Koeffizienten der zu einer in $\mathfrak{B}$ regulären Funktion $f(z)$ gehörigen Reihe (2) und ihr Restglied eine Integraldarstellung zu erhalten, gehen wir von der folgenden Identität [5])

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} + \frac{a - b_1}{(\zeta - a)^2}\frac{z - a}{z - b_1} + \frac{a - b_2}{(\zeta - a)^2}\frac{\zeta - b_1}{\zeta - a}\frac{z - a}{z - b_1}\frac{z - a}{z - b_2} + \cdots$$
$$+ \frac{a - b_n}{(\zeta - a)^2}\prod_{\mu=1}^{n-1}\frac{\zeta - b_\mu}{\zeta - a}\prod_{\mu=1}^{n}\frac{z - a}{z - b_\mu} + \frac{1}{\zeta - z}\frac{z - a}{\zeta - a}\prod_{\mu=1}^{n}\frac{z - a}{z - b_\mu}\frac{\zeta - b}{\zeta - a}$$

aus. Multiplizieren wir mit $\frac{f(\zeta)}{2\pi i}$ und intergrieren dann längs einer im Bereich $\mathfrak{B}$ verlaufenden rektifizierbaren geschlossenen Jordankurve L, welche die Stelle a im Innern enthält, so ergibt sich

$$f(z) = A_0 + \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \prod_{\mu=1}^{\nu}\frac{z - a}{z - b_\mu} + R_n(z),$$

wenn

$$A_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}d\zeta, \quad A_1 = \frac{a - b_1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^2}d\zeta$$

(5) $$A_\nu = \frac{a - b_\nu}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^2\prod_{\mu=1}^{\nu-1}\frac{\zeta - a}{\zeta - b_\mu}}d\zeta; \qquad \nu = 2, 3, \ldots$$

und

(6) $$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\frac{z - a}{\zeta - a}\prod_{\mu=1}^{n}\frac{\frac{z - a}{z - b_\mu}}{\frac{\zeta - a}{\zeta - b_\mu}}d\zeta$$

gesetzt wird.

Insbesondere folgt aus (5) und (6) für die Funktion $f(z) = \frac{1}{t - z}$, wobei t eine beliebige Stelle aus dem Äußeren von C ist, die Entwicklung

(7) $$\frac{1}{t - z} = \frac{1}{t - a} + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{a - b_\nu}{(t - a)^2}\prod_{\mu=1}^{\nu-1}\frac{t - b_\mu}{t - a}\prod_{\mu=1}^{\nu}\frac{z - a}{z - b_\mu}$$
$$+ \frac{1}{t - z}\frac{z - a}{t - a}\prod_{\mu=1}^{n}\frac{z - a}{z - b_\mu}\frac{t - b_\mu}{t - a}.$$

---

[5]) Diese Identität stammt von R. Lagrange. Siehe seine Abhandlung Mémoire sur les séries d'interpolation, Acta Math. 64 (1935), S. 6.

§ 2.

Sowohl notwendige als auch hinreichende Bedingung für die Gültigkeit von (3b).

$w = w(z, a)$ sei eine der Funktionen, welche den Bereich $\mathfrak{B}$ schlicht auf den Einheitskreis $|w| < 1$ abbilden, wobei $z = a$ als Bildpunkt $w = 0$ besitzt. Eine sowohl notwendige als auch hinreichende Bedingung, welcher die Stelle a im Verein mit der auf C gelegenen Folge $\{b_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$ genügen muß, damit (3b) gilt, enthält der folgende

Satz 3. (3b) *ist dann und nur dann erfüllt, wenn bei der Abbildung* $w = w(z, a)$ *die Folge* $\{b_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$ *in eine auf* $|w| = 1$ *gleichverteilte Folge* $\{\beta_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$ *übergeht.*

Um zu beweisen, daß die Gleichverteiltheit von $\{\beta_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$ auf $|w| = 1$ eine hinreichende Bedingung ist, benötigen wir den

Hilfssatz 1. $\{\beta_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$ *sei eine Punktfolge auf* $|w| = 1$. *Es ist dann und nur dann für jede in* $|w| < 1$ *reguläre und auf* $|w| \leqq 1$ *stetige Funktion* $f(w)$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^{n} f(\beta_\mu) = f(0), \tag{8}$$

wenn die Folge $\{\beta_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$ *auf* $|w| = 1$ *gleichverteilt ist.*

Die Funktionen $f(w) = w^\nu$; $\nu = 1, 2, \ldots$, sind in $|w| < 1$ regulär und auf $|w| \leqq 1$ stetig. Soll für sie (8) gelten, so muß

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^{n} \beta_\mu^\nu = 0; \qquad \nu = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

sein, was für die Gleichverteiltheit der auf $|w| = 1$ liegenden Folge $\{\beta_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$ notwendig und hinreichend ist.

Ist die auf $|w| = 1$ liegende Punktfolge $\{\beta_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$ gleichverteilt, so genügt wegen (9) jedes Polynom von w der Gleichung (8), da offenbar auch $f(w) = \text{const.}$ diese Eigenschaft hat. Nun gibt es zu jeder in $|w| < 1$ regulären und auf $|w| \leqq 1$ stetigen Funktion $f(w)$ eine Folge von Polynomen $\{p_k(w)\}$, $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, die auf $|w| \leqq 1$ gleichmäßig gegen $f(w)$ konvergiert. Es ist also auf $|w| \leqq 1$

$$|f(w) - p_k(w)| \leqq \varepsilon_k; \quad \lim_{k \to \infty} \varepsilon_k = 0, \tag{10}$$

wobei $\varepsilon_k > 0$ von w nicht abhängt [6]). Mithin gilt

$$|p_k(0) - f(0)| \leqq \varepsilon_k \text{ und } \left| \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^{n} f(\beta_\mu) - \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^{n} p_k(\beta_\mu) \right| \leqq \varepsilon_k,$$

[6]) Vgl. das in Fußnote [1]) zitierte Werk, S. 36.

woraus

$$\left|\left\{\frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n} f(\beta_\mu) - f(0)\right\} + \left\{p_k(0) - \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n} p_k(\beta_\mu)\right\}\right| \leqq 2\,\varepsilon_k$$

folgt. Da (8) für jedes Polynom von w erfüllt ist, so wird

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n} f(\beta_\mu) - f(0)\right| \leqq 2\,\varepsilon_k,$$

und bei $k \to \infty$ wegen (10) erhält man schließlich

$$f(0) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n} f(\beta_\mu).$$

Den Hilfssatz 1 kann man auch so aussprechen:

Hilfssatz 2. *$\{\beta_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$ sei eine auf $|w| = 1$ liegende Punktfolge. Es ist dann und nur dann für jede in $|w| < 1$ reguläre und auf $|w| \leqq 1$ stetige Funktion $f(w)$*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n}\Re\{f(\beta_\mu)\} = \Re\{f(0)\}, \tag{11}$$

wenn die Folge $\{\beta_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$ auf $|w| = 1$ gleichverteilt ist.

Wird $f(w) = \Re\{f(w)\} + i\,\Im\{f(w)\}$ gesetzt, so gilt $\Im\{f(w)\} = \Re\left\{\frac{f(w)}{i}\right\}$ und mit $f(w)$ ist auch $\frac{1}{i}f(w)$ in $|w| < 1$ regulär und auf $|w| \leqq 1$ stetig.

Es sei nun t eine feste Stelle aus dem Äußeren von C. Dann ist $\log\{t - z(w, a)\}$, worin $z = z(w, a)$ die zu $w = w(z, a)$ inverse Funktion bedeutet, eine in $|w| < 1$ reguläre und auf $|w| \leqq 1$ stetige Funktion von w. Nach (11) erhalten wir dann

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n}\log|t - b_\mu| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n}\log|t - z(\beta_\mu, a)|$$
$$= \log|t - z(0, a)| = \log|t - a|.$$

Also ist für jede Stelle t aus dem Äußeren von C bei Gleichverteiltheit von $\{\beta_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$ auf $|w| = 1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n}\log|t - b_\mu| = \log|t - a|$$

oder

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{t-a}{\sqrt[n]{\prod_{\mu=1}^{n}(t-b_\mu)}}\right| = 1.$$

Um zu zeigen, daß aus (3b) die Gleichverteiltheit der Folge $\{\beta_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$ auf $|w| = 1$ folgt, brauchen wir nach Hilfssatz 2 nur zu beweisen,

daß jede in $|w| < 1$ reguläre und auf $|w| \leqq 1$ stetige Funktion $f(w)$ der Limesgleichung (11) genügt. Diese Eigenschaft besitzen nach Voraussetzung die Funktionen $\log\{t - z(w, a)\}$, worin t eine feste Stelle aus dem Äußeren von C ist. Hieraus ergibt sich aber durch analoge Schlüsse wie bei Hilfssatz 1 die Richtigkeit von (11) für jede in $|w| < 1$ reguläre und auf $|w| \leqq 1$ stetige Funktion $f(w)$ mit Hilfe des folgenden

Hilfssatz 3. *Der Realteil einer jeden in* $|w| < 1$ *regulären und auf* $|w| \leqq 1$ *stetigen Funktion* $f(w)$ *läßt sich auf* $|w| \leqq 1$ *gleichmäßig durch Ausdrücke von der Form*

$$\sum_{k=1}^{l} B_k \log |t_k - z(w, a)|$$

approximieren, worin die B_k *Konstante und die Stellen* t_k *im Äußeren von* C *gelegen sind*[7]).

§ 3.

Die Bedingung (3b) ist notwendig dafür, daß sich jede in $\mathfrak{B}$ reguläre Funktion $f(z)$ in eine Reihe (2) entwickeln läßt.

Soll sich *jede* in $\mathfrak{B}$ reguläre Funktion $f(z)$ in eine Reihe (2) entwickeln lassen, so muß diese Eigenschaft insbesondere der Funktion $f(z) = \frac{1}{t - z}$ zukommen, worin t eine beliebige Stelle aus $\mathfrak{B}'$, dem Äußeren von C bedeutet.

Hierfür ist nach (7)

$$\lim_{n \to \infty} \prod_{\mu=1}^{n} \frac{z - a}{z - b_\mu} \frac{t - b_\mu}{t - a} = 0 \tag{12}$$

eine notwendige Bedingung, wenn z eine beliebige Stelle aus $\mathfrak{B}$ und t eine beliebige Stelle aus $\mathfrak{B}'$ ist. Aus (12) folgt

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \left| \frac{z - a}{\sqrt[n]{\prod_{\mu=1}^{n} (z - b_\mu)}} \right| \leqq \overline{\lim_{n \to \infty}} \left| \frac{t - a}{\sqrt[n]{\prod_{\mu=1}^{n} (t - b_\mu)}} \right|. \tag{13}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\varphi_n(t) = \frac{t - a}{\sqrt[n]{\prod_{\mu=1}^{n} (t - b_\mu)}}; \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

wobei von $\sqrt[n]{\prod_{\mu=1}^{n} (t - b_\mu)}$ immer der Zweig genommen werden soll, für welchen

$$\varphi_n(\infty) = 1 \tag{15}$$

[7]) Vgl. das in Fußnote [1]) zitierte Werk, S. 170.

ist, so wird durch (14) eine Folge $\{\psi_n(t)\}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ in $\mathfrak{B}'$ eindeutiger regulärer Funktionen gegeben, welche auf jeder abgeschlossenen Punktmenge aus $\mathfrak{B}'$ gleichmäßig beschränkt ist.

Angenommen, es sei (3b) nicht erfüllt. Es gibt also eine Stelle $t = t_1$ aus $\mathfrak{B}'$, an welcher die Folge der absoluten Beträge $\{|\psi_n(t)|\}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ nicht den Grenzwert 1 hat. Dann läßt sich aus (14) eine Teilfolge

$$\{\psi_{n_\lambda}(t)\}, \quad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots) \tag{16}$$

aussondern, welche auf jeder abgeschlossenen Punktmenge aus $\mathfrak{B}'$ gleichmäßig gegen eine daselbst reguläre Funktion $\psi(t)$ konvergiert, für welche $|\psi(t_1)| \neq 1$ ist. Da aus (15) $\psi(\infty) = 1$ folgt, kann mithin $\psi(t)$ nicht eine Funktion sein, welche in $\mathfrak{B}'$ den konstanten absoluten Betrag 1 besitzt.

Setzen wir ferner zur Abkürzung

$$\varphi_n(z) = \frac{z - a}{\sqrt[n]{\prod_{\mu=1}^{n}(z - b_\mu)}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{17}$$

wobei von $\sqrt[n]{\prod_{\mu=1}^{n}(z - b_\mu)}$ immer der Zweig genommen werden soll, welcher an der Stelle $z = a$ den Hauptwert von $\sqrt[n]{\prod_{\mu=1}^{n}(a - b_\mu)}$ als Funktionswert besitzt, so ist durch (17) eine Folge $\{\varphi_n(z)\}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ in $\mathfrak{B}$ eindeutiger regulärer Funktionen gegeben, welcher auf jeder abgeschlossenen Punktmenge $\mathfrak{B}$ gleichmäßig beschränkt ist. Aus der Folge

$$\{\varphi_{n_\lambda}(z)\}, \quad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots), \tag{18}$$

welche eine Teilfolge von (17) sein soll, läßt sich daher eine Teilfolge $\{\varphi_{n_{\lambda_\varkappa}}(z)\}$, $(\varkappa = 1, 2, 3, \ldots)$ aussondern, welche auf jeder abgeschlossenen Punktmenge aus $\mathfrak{B}$ gleichmäßig gegen eine in $\mathfrak{B}$ reguläre Funktion $\varphi(z)$ konvergiert.

Es konvergiert also die Folge

$$\{\psi_{n_{\lambda_\varkappa}}(t)\}, \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots) \tag{19}$$

mit Rücksicht auf (16) und (18) in $\mathfrak{B}'$ gegen eine daselbst reguläre Funktion $\psi(t)$ und die Folge

$$\{\varphi_{n_{\lambda_\varkappa}}(z)\}, \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots) \tag{19'}$$

in $\mathfrak{B}$ gegen eine daselbst reguläre Funktion $\varphi(z)$.

Wegen (13) ist

$$\underset{z<\mathfrak{B}}{|\varphi(z)|} \leqq \underset{z<\mathfrak{B}'}{|\psi(t)|}. \tag{20}$$

Um aus dieser Beziehung weitere Folgerungen ableiten zu können, welche schließlich einen Widerspruch mit der Annahme ergeben werden, daß (3b) nicht erfüllt sei, benötigen wir zunächst drei Hilfssätze.

Hilfssatz 4. *$t(w)$ sei eine der Funktionen, welche den Einheitkreis $|w| < 1$ schlicht so auf $\mathfrak{B}'$ abbilden, daß $w = 0$ in $t = \infty$ übergeht.*

Dann ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|\frac{t(\varrho e^{i\vartheta})-a}{t(\varrho e^{i\vartheta})-b}\right| d\vartheta = 0, \tag{21}$$

wenn $0 < \varrho < 1$, a eine Stelle aus $\mathfrak{B}$ und b ein Randpunkt von $\mathfrak{B}'$ ist.

Für jede im Intervall $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$ gleichverteilte reelle Folge $\{\vartheta_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$ wird

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n} g(\vartheta_\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\vartheta)\, d\vartheta\ ^{8}), \tag{22}$$

wenn $g(\vartheta)$ eine beliebige in $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$ stetige Funktion ist.

Da $\log\left|\frac{t(\varrho e^{i\vartheta})-a}{t(\varrho e^{i\vartheta})-b}\right|$ für $0 < \varrho < 1$ diese Eigenschaft besitzt, so gilt also bei Gleichverteiltheit der reellen Folge $\{\vartheta_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$ im Intervall $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|\frac{t(\varrho e^{i\vartheta})-a}{t(\varrho e^{i\vartheta})-b}\right| d\vartheta = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n} \log\left|\frac{t(\varrho e^{i\vartheta_\mu})-a}{t(\varrho e^{i\vartheta_\mu})-b}\right|. \tag{23}$$

Wegen (11) ergibt sich weiter

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n} \log\left|\frac{t(\varrho e^{i\vartheta_\mu})-a}{t(\varrho e^{i\vartheta_\mu})-b}\right| = 0, \tag{24}$$

weil

$$\log\left|\frac{t(w)-a}{t(w)-b}\right| = \Re\left\{\log\frac{t(w)-a}{t(w)-b}\right|$$

und $\log\frac{t(w)-a}{t(w)-b}$ eine für $|w| \leqq \varrho < 1$ reguläre Funktion von w ist, welche an der Stelle $w = 0$ den Wert Null annimmt.

Aus (23) und (24) folgt aber (21).

Hilfssatz 5. *$t(w)$ sei wieder eine der Funktionen, welche $|w| < 1$ schlicht so auf $\mathfrak{B}$ abbilden, daß $w = 0$ in $t = \infty$ übergeht. Dann ist*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|\frac{t(e^{i\vartheta})-a}{t(e^{i\vartheta})-t(w)}\right| d\vartheta = \log|w| \tag{25}$$

für jede Stelle w aus $|w| < 1$ und a aus $\mathfrak{B}$.

[8]) Vgl. die Fußnote [3]) zitierte Arbeit, S. 314.

Da $t(w)$ sich auf $|w| \leqq 1$ stetig verhält, so ist auch $\log \left| \frac{t(e^{i\vartheta}) - a}{t(e^{i\vartheta}) - t(u)} \right|$ bei beliebigem festgehaltenen w aus $|w| < 1$ eine im Intervall $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$ stetige Funktion von ϑ. Wegen (22) gilt dann

$$(26) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{t(e^{i\vartheta}) - a}{t(e^{i\vartheta}) - t(w)} \right| d\vartheta = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^{n} \log \left| \frac{t(e^{i\vartheta_\mu}) - a}{t(e^{i\vartheta_\mu}) - t(w)} \right|,$$

wenn $\{\vartheta_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$ eine im Intervall $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$ gleichverteilte Folge ist. Weil für beliebiges w aus $|w| < 1$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^{n} \log |w - e^{i\vartheta_\mu}| = 0$$ [9])

ist und $\log \frac{(t(\zeta) - a)(\zeta - w)}{t(\zeta) - t(w)}$ bei festem w aus $|w| < 1$ eine in $|\zeta| < 1$ reguläre und auf $|\zeta| \leqq 1$ stetige Funktion von ζ ist, so erhalten wir wegen (27) und (11)

$$(28) \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^{n} \log \left| \frac{t(e^{i\vartheta_\mu}) - a}{t(e^{i\vartheta_\mu}) - t(w)} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^{n} \log \left| \frac{(t(e^{i\vartheta_\mu}) - a)(e^{i\vartheta_\mu} - w)}{t(e^{i\vartheta_\mu}) - t(w)} \right|$$
$$= \log |w|.$$

Aus (26) und (28) folgt aber (25).

Hilfssatz 6. *$\{\mathfrak{B}'_p\}$, $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ sei eine Folge von Bereichen, welche aus dem Äußeren von im Endlichen geschlossenen Jordankurven C_p gebildet werden. Kein Punkt von $\mathfrak{B}$ gehöre allen $\mathfrak{B}'_p$ an und jedes $\mathfrak{B}'_p$ enthalte das aus $\mathfrak{B}'$ durch Hinzunahme seiner Berandung C entstehende abgeschlossene Gebiet. Ferner sei $\mathfrak{B}'_{p+1} + C_{p+1}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{B}'_p$.*

$w = w(t)$ bilde den Bereich $\mathfrak{B}'$ und $w = w_p(t)$ den Bereich $\mathfrak{B}'_p$ schlicht auf das Innere von $|w| = 1$ ab, wobei $t = \infty$ in $w = 0$ übergeht und

$$\arg \lim_{t \to \infty} t\, w(t) = \arg \lim_{t \to \infty} t\, w_p(t)$$

ist.

Dann konvergiert die Folge $\{w_p(t)\}$, $(p = 1, 2, \ldots)$ auf $\mathfrak{B}' + C$ gleichmäßig gegen $w(t)$ [10]).

Für die Funktionen $\psi_n(t)$ der Folge (14) erhalten wir wegen (21)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\psi_n[t(\varrho e^{i\vartheta})]|\, d\vartheta = 0$$

und mithin

$$(29) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\psi[t(\varrho e^{i\vartheta})]|\, d\vartheta = 0,$$

wenn $\psi(t)$ die durch (19) definierte Funktion bedeutet.

---

[9]) Vgl. die in Fußnote [2]) zitierte Arbeit, S. 396.

[10]) Wegen eines Beweises vgl. z. B. das in Fußnote [1]) zitierte Werk, S. 32–35.

Für die Funktionen $\varphi_n(z)$ der Folge (17) erhalten wir wegen (25)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|\varphi_n[t_p(e^{i\vartheta})]|\,d\vartheta = \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n}\log|w_\mu^{(p)}|$$

und mithin

$$(30)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|\varphi[t_p(e^{i\vartheta})]|\,d\vartheta = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{n_{\lambda_x}}\sum_{\mu=2}^{n_{\lambda_x}}\log|w_\mu^{(p)}|,$$

wenn $\varphi(z)$ die durch (19′) erklärte Funktion bedeutet. Mit Rücksicht auf Hilfssatz 6 folgt aus (30)

$$\lim_{p\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|\varphi[t_p(e^{i\vartheta})]|\,d\vartheta = 0$$

und deshalb ergibt sich hieraus und aus (29)

$$(31)\qquad \lim_{p\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|\frac{\psi[t(\varrho\,e^{i\vartheta})]}{\varphi[t_p(e^{i\vartheta})]}\right|d\vartheta = 0.$$

Setzen wir $m_\psi = \lim_{t<\mathfrak{B}'}|\psi|(t)$, so gilt wegen (20) $|\varphi(z)| \leqq m_\psi$ und die beiden Integrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|\frac{\psi[t(\varrho\,e^{i\vartheta})]}{m_\psi}\right|d\vartheta \text{ und } \lim_{p\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|\frac{m_\psi}{\varphi[t_p(e^{i\vartheta})]}\right|d\vartheta$$

sind nicht negativ. Also folgt aus (31)

$$(32)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|\frac{\psi[t(\varrho\,e^{i\vartheta})]}{m_\psi}\right|d\vartheta = 0.$$

Da $\log\frac{\psi[t(w)]}{m_\psi}$ eine in $|w|<1$ reguläre Funktion von w ist, so muß wegen (32)

$$\log\frac{|\psi[t(0)]|}{m_\psi} = 0, \quad \text{mithin} \quad \psi[t(0)] = m_\psi$$

sein. Weil nun $\psi[t(0)] = 1$ ist, gilt $\lim_{t<\mathfrak{B}'}|\psi(t)| = 1$.

Dann kann aber die in $\mathfrak{B}'$ reguläre Funktion $\psi(t)$ nur den konstanten absoluten Betrag Eins besitzen, was im Widerspruch mit der Voraussetzung steht.

§ 4.

Die Bedingung (3a) ist hinreichend dafür, daß sich jede in $\mathfrak{B}$ reguläre Funktion $f(z)$ in eine Reihe (2) entwickeln läßt.

Setzen wir zur Abkürzung

$$\Phi_n(z) = \frac{\varphi_n(z)}{w(z,a)};\ n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{33}$$

worin $\varphi_n(z)$ durch (17) erklärt ist, so wird durch (33) eine Folge $\{\Phi_n(z)\}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ in $\mathfrak{B}$ eindeutiger regulärer Funktionen gegeben, welche auf jeder abgeschlossenen Punktmenge aus $\mathfrak{B}$ gleichmäßig beschränkt ist. (3a) sagt aus, daß die Folge der Beträge $\{|\Phi_n(z)|\}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ an jeder Stelle z aus $\mathfrak{B}$ gegen Eins als Grenzfunktion konvergiert. Es läßt sich nun zeigen [11]), daß diese Konvergenz für jedes z aus $|w(z,a)| \leqq r < 1$ sogar gleichmäßig ist, weil auch die Folge der Ableitungen $\{\Phi_n'(z)\}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ auf jeder abgeschlossenen Punktmenge aus $\mathfrak{B}$ gleichmäßig beschränkt bleibt. Die Limesgleichung

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{z-a}{\sqrt[n]{\prod_{\mu=1}^{n}(z-b_\mu)}} \right| = |w(z,a)| \tag{34}$$

gilt mithin gleichmäßig auf jeder abgeschlossenen Punktmenge aus $\mathfrak{B}$.

Aus (34) werden wir folgern, daß das zu einer beliebigen in $\mathfrak{B}$ regulären Funktion $f(z)$ gehörige Restglied (6) auf jeder abgeschlossenen Punktmenge $\mathfrak{G}$ aus $\mathfrak{B}$ gleichmäßig gegen Null konvergiert.

Zu $\mathfrak{G}$ gibt es ein $\varrho_1 < 1$, so daß $\mathfrak{G}$ eine Teilmenge von $|w(z,a)| \leqq \varrho_1$ ist. Als Integrationsweg L in (6) wählen wir die Kurve $|w(\zeta,a)| = \varrho_2$ $(\varrho_1 < \varrho_2 < 1)$, deren Länge wir mit l bezeichnen. Aus (6) folgt dann

$$|R_n(z)| \underset{z<\mathfrak{G}}{\leqq} \frac{l}{2\pi} \max_{\substack{z<\mathfrak{G} \\ \zeta<L}} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{z-a}{\zeta-a} \right| \frac{\max\limits_{z<\mathfrak{G}} \left| \prod\limits_{\mu=1}^{n} \frac{z-a}{z-b_\mu} \right|}{\min\limits_{\zeta<L} \left| \prod\limits_{\mu=1}^{n} \frac{\zeta-a}{\zeta-b_\mu} \right|}.$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, sobald nur $n > N(\varepsilon)$ ist,

$$\sqrt[n]{\frac{l}{2\pi} \max_{\substack{z<\mathfrak{G} \\ \zeta<L}} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{z-a}{\zeta-a} \right|} \leqq 1 + \varepsilon$$

und wegen (34) sowohl

$$\max_{z<\mathfrak{G}} \sqrt[n]{\left| \prod_{\mu=1}^{n} \frac{z-a}{z-b_\mu} \right|} \leqq \varrho_1 + \varepsilon \text{ als auch } \min_{\zeta<L} \sqrt[n]{\left| \prod_{\mu=1}^{n} \frac{\zeta-a}{\zeta-b_\mu} \right|} \geqq \varrho_2 - \varepsilon.$$

[11]) Vgl. die in Fußnote [2]) zitierte Arbeit, S. 393.

Mithin ist für $n > N(\varepsilon)$.

$$\sqrt[n]{\max_{z<\mathfrak{G}} |R_n(z)|} \leqq (1+\varepsilon)\frac{\varrho_1+\varepsilon}{\varrho_2-\varepsilon}.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben werden kann und $\varrho_1 < \varrho_2$ ist, so läßt sich ein $\varepsilon = \varepsilon'$ finden, für welches

$$(1+\varepsilon')\frac{\varrho_1+\varepsilon'}{\varrho_2-\varepsilon'} = \eta < 1$$

ist. Daher erhalten wir die Abschätzung

$$\max_{z<\mathfrak{G}} |R_n(z)| = \eta^n \quad (\eta < 1),$$

wenn nur $n > N(\varepsilon')$ ist, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

§ 5.

Aus (3b) folgt (3a) und umgekehrt.

Nach § 2 ist (3b) nur dann erfüllt, wenn bei Abbildung von $\mathfrak{B}$ auf $|w| < 1$ durch die Funktion $w = w(z, a)$ mit $w(a, a) = 0$ die auf C gelegene Folge $\{b_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, \ldots)$ in eine auf $|w| = 1$ gleichverteilte Bildfolge $\{\beta_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, \ldots)$ übergeht.

Nun ist bei festem w aus $|w| < 1$ $\log\frac{z(w,a)-z(\zeta,a)}{w-\zeta}$, wobei $z = z(w, a)$ die zu $w = w(z, a)$ inverse Funktion bedeutet, eine in $|\zeta| < 1$ und auf $|\zeta| \leqq 1$ stetige Funktion ζ. Aus dieser Gleichverteiltheit der Folge $\{\beta_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, \ldots)$ auf $|w| = 1$ ergibt sich nach (11)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n}\log\left|\frac{z(w,a)-z(\beta_\mu,a)}{w-\beta_\mu}\right| = \log\left|\frac{z(w,a)-z(0,a)}{w-0}\right|$$

oder wegen (27)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n}\log|z-b_\mu| = \log\left|\frac{z-a}{w}\right|$$

und mithin für jedes $z < \mathfrak{B}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z-a}{w\sqrt[n]{\prod_{\mu=1}^{n}(z-b_\mu)}}\right| = 1,$$

womit gezeigt ist, daß (3a) eine notwendige Folge von (3b) ist.

Umgekehrt erhält man wegen (3a), das auch so geschrieben werden kann

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z-a}{\sqrt[n]{\prod_{\mu=1}^{n}(z-b_\mu)}}\right| = |w(z,a)|,$$

aus (13)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{t-a}{\sqrt[n]{\prod_{\mu=1}^{n}(t-b_\mu)}}\right| \geqq |w(z,a)|,$$

also für jedes $t < \mathfrak{B}'$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{t-a}{\sqrt[n]{\prod_{\mu=1}^{n}(t-b_\mu)}}\right| \geqq 1. \tag{35}$$

Hieraus folgt aber (3b).

Angenommen, es habe die Folge der absoluten Beträge $\{|\psi_n(t)|\}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ der durch (14) erklärten Funktionen an der Stelle $t = t_1$ aus $\mathfrak{B}'$ nicht den Grenzwert Eins. Dann läßt sich eine Teilfolge (18) aussondern, welche in $\mathfrak{B}'$ gegen eine daselbst reguläre Funktion $\psi(t)$ konvergiert, für welche $\psi(t_1)| \neq 1$ und wegen (35)

$$\lim_{t<\mathfrak{B}'} |\psi(t)| \geqq 1 \tag{36}$$

ist. Da $\psi(\infty) = 1$ ist, so folgt aus (36), daß $\psi(t)$ in $\mathfrak{B}'$ den konstanten absoluten Betrag Eins haben muß. Das steht aber mit $|\psi(t_1)| \neq 1$ im Widerspruch.

(Eingegangen am 17. August 1939.)

Über einige Kennzeichnungen des Kreises.

Von

Harald Geppert in Berlin.

Vorwiegend von japanischen Autoren ist mehrfach die Frage behandelt worden, wieweit ein Kreis unter den ebenen Kurven dadurch gekennzeichnet ist, daß eine Sehne fester Länge stets den gleichen Bogen oder den gleichen Flächeninhalt abschneidet. Während in den früheren Arbeiten von Yanagihara und Hirakawa [1]) vorausgesetzt wurde, daß diese Eigenschaft für alle Sehnen eines gewissen Längenintervalls statthaben solle (insbesondere etwa für unendlich kleine Sehnen), hat kürzlich Miyatake [2]) den Versuch unternommen, den Kreis unter den Eilinien dadurch zu kennzeichnen, daß eine Sehne einer einzigen fest vorgegebenen Länge $2L$ stets den gleichen Bogen S abschneiden soll. Diese Kennzeichnung wird sich, falls keine weiteren Voraussetzungen hinzutreten, im folgenden als falsch herausstellen, und damit ergibt sich die Notwendigkeit einer Bereinigung des gesamten Fragenkreises; diese ist unser Ziel.

1.

Wir werden also im folgenden nur Kurven C betrachten, auf denen eine Sehne der gegebenen Länge $2L$, die wir kurz mit Σ bezeichnen, stets den gleichen Bogen S abschneidet. Um zum Kreis zu gelangen, müssen wir uns offenbar auf geschlossene Kurven C beschränken, wie das Beispiel der Geraden und der Zykloide der Spannweite $2L$ zeigen. Aber auch die Geschlossenheit und Konvexität von C reicht nicht aus, wie das Beispiel des regulären $2n$-Ecks mit dem Umkreisradius L zeigt, in dem nicht durch jeden Punkt eine Sehne Σ geht. Man wird sich also auf die Betrachtung solcher Kurven C beschränken, die geschlossen konvex

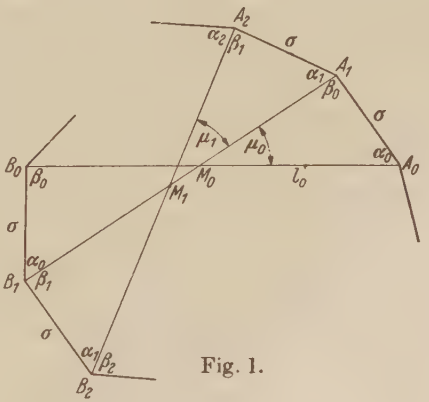


Fig. 1.

[1]) Kitizi Yanagihara, Sci. Rep. Tohoku Univ. **4** (1915), S. 65—77; Junkô Hirakawa, Tohoku Math. Journ. **37** (1933), S. 175—178.

[2]) Osamu Miyatake, Tohoku Math. Journ. **45** (1939), S. 245—248.

sind und bei denen durch jeden Punkt eine Sehne Σ geht, in denen sich also Σ ganz herumführen läßt.

Die Annäherung von C durch Streckenzüge führt dann zur vorstehenden Dreiecksfigur, in der $A_r B_r = 2L$, $A_{r-1} A_r = B_{r-1} B_r$ gleich einer festen Größe σ ist, die wir später gegen Null streben lassen. $A_r B_r$ und $A_{r+1} B_{r+1}$ müssen sich in einem inneren Punkte M_r unter dem Winkel μ_r schneiden, während α_r den Winkel $B_r A_r A_{r+1}$ und ebenso β_r den Winkel $A_r B_r B_{r+1}$ bezeichnen soll. Wegen der Gleichheit der Seiten sind die Dreiecke $A_0 B_0 B_1$ und $B_1 A_1 A_0$ kongruent, also auch $A_0 A_1 M_0$ und $B_1 B_0 M_0$ kongruent, mithin allgemein $\measuredangle A_r A_{r+1} B_{r+1} = \beta_r$, $\measuredangle B_r B_{r+1} A_{r+1} = \alpha_r$. Die Flächengleichheit der letztgenannten Dreiecke hat zur Folge, daß die Sehne Σ nicht nur einen festen Bogen S, sondern auch ein Stück von festem Flächeninhalt J abschneidet. Ist umgekehrt das letzte der Fall, so gilt auch das erste, denn dann haben die Dreiecke $A_0 B_0 B_1$ und $B_1 A_1 A_0$ zwei Seiten und den Flächeninhalt gemein, und es ist $\measuredangle A_0 B_1 A_1 = \measuredangle B_1 A_0 B_0$ oder $= \pi - B_1 A_0 B_0$; der letzte Fall ist aber offenbar unmöglich, der erste führt zu $B_0 B_1 = A_0 A_1$, wie behauptet. Wir haben also den Satz: *Läßt sich in einer geschlossenen konvexen Kurve C eine Sehne der festen Länge $2L$ so herumführen, daß sie stets denselben Flächeninhalt abschneidet, so schneidet sie auch stets denselben Bogen ab, und umgekehrt.*

Die Beziehung zwischen Sehne, Bogen und Abschnittsinhalt führt schließlich zur dritten Möglichkeit, daß in C zu einem Bogen der festvorgegebenen Länge S stets derselbe Sehnenabschnittsinhalt J gehört; dann ist in der Figur $A_0 A_1 = B_0 B_1$ und die Dreiecke $B_0 M_0 B_1$ und $A_1 M_0 A_0$ sind inhaltsgleich. Man leitet daraus ab, daß $\cos(2\alpha_0 + \mu_0) = \cos(2\beta_0 + \mu_0)$, also entweder $\alpha_0 + \beta_0 + \mu_0 = \pi$, oder $\alpha_0 = \beta_0$ sein muß; der erste Fall führt auf die Gleichungen $\measuredangle B_1 A_1 A_0 = \beta_0$, $\measuredangle A_1 B_1 B_0 = \alpha_0$, also $A_0 B_0 = A_1 B_1 = 2L$, d. h. auf die Ausgangsfrage; der zweite Fall liefert parallele Geraden $A_0 A_1$ und $B_0 B_1$, die Sehnen, die den Bogen S begrenzen, müssen sich alle in einem festen Punkte, nämlich ihrem Mittelpunkte schneiden, der zugleich Mittelpunkt von C wird; S ist dann die halbe Bogenlänge und J der halbe Flächeninhalt. Umgekehrt gehört tatsächlich bei einer geschlossenen konvexen Kurve mit Mittelpunkt zum halben Bogen stets der halbe Flächeninhalt als Sehnenabschnittsinhalt. Wir haben also das Ergebnis: *Gehört in einer geschlossenen konvexen Kurve zu einem Bogen der festen Länge S stets ein Sehnenabschnitt desselben Flächeninhalts J, so ist sie entweder eine Mittelpunktskurve und S der halbe Umfang, oder die Endsehne des Bogens hat eine feste Länge $2L$.*

2.

Kehren wir nun wieder zur eingangs gemachten Voraussetzung zurück und bezeichnen $A_0 M_0 = l_0$, $A_1 M_0 = B_0 M_0 = 2L - l_0$, so müssen sich

die Größen des Dreiecks $A_0 A_1 M_0$, insbesondere l_0, β_0 und μ_0, durch α_0, L und σ ausdrücken lassen. In der Tat liefert die Anwendung des cos-Satzes auf $A_1 M_0$ die Gleichungen

$$l_0 = \frac{4L^2 - \sigma^2}{2(2L - \sigma\cos\alpha_0)}, \qquad 2L - l_0 = \frac{4L^2 - 4L\sigma\cos\alpha_0 + \sigma^2}{2(2L - \sigma\cos\alpha_0)}.$$

also

$$\sin\beta_0 = \frac{4L^2 - \sigma^2}{4L^2 - 4L\sigma\cos\alpha_0 + \sigma^2}\sin\alpha_0,$$

während die Anwendung des cos-Satzes auf $A_0 M_0$ liefert:

$$\cos\beta_0 = \frac{4L\sigma - (4L^2 + \sigma^2)\cos\alpha_0}{-4L\sigma\cos\alpha_0 + (4L^2 + \sigma^2)}.$$

Nach einer (etwa aus der Theorie der Tschebyscheffschen Polynome) bekannten Formel kann man hierin die rechten Seiten nach Potenzen von $\frac{\sigma}{2L}$ entwickeln und erhält:

$$\sin\beta_0 = \sin\alpha_0 \cdot \left(1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\sigma}{2L}\right)^{\nu}\cos\nu\alpha_0\right),$$

(1)

$$\cos\beta_0 = -\cos\alpha_0 + 2\sin\alpha_0 \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\sigma}{2L}\right)^{\nu}\sin\nu\alpha_0,$$

und daher wird

$$\sin\mu_0 = 2\sin\alpha_0 \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\sigma}{2L}\right)^{\nu}\cos(\nu-1)\alpha_0,$$

(2)

$$\cos\mu_0 = 1 - 2\sin\alpha_0 \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\sigma}{2L}\right)^{\nu}\sin(\nu-1)\alpha_0,$$

woraus übrigens für μ_0 selbst die Entwicklung

(3)
$$\mu_0 = 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\sigma}{2L}\right)^{\nu}\frac{\sin\nu\alpha_0}{\nu}$$

gefolgert werden kann. Wir benötigen von diesen Entwicklungen in Wahrheit nur die ersten Glieder.

Bezeichnet nun $\gamma_\nu = \alpha_\nu + \beta_{\nu-1}$ den Winkel $A_{\nu-1}A_\nu A_{\nu+1}$ und $\delta_\nu = \alpha_{\nu-1} + \beta_\nu$ den Winkel $B_{\nu-1}B_\nu B_{\nu+1}$, so wird $\gamma_\nu + \delta_\nu = 2\pi - (\mu_{\nu-1} + \mu_\nu)$. Besäße nun C eine Ecke A_1 vom inneren Öffnungswinkel $\gamma_1 < \pi$, so würde für $\sigma \to 0$ folgen, daß $\delta_1 > \pi$ sein müßte; dies widerspricht aber der vorausgesetzten Konvexität von C. *C ist somit eckenfrei und besitzt in jedem Punkte eine Tangente.* Daher wird

$$\lim_{\sigma\to 0}\gamma_1 = \lim_{\sigma\to 0}(\pi - \mu_0 + (\alpha_1 - \alpha_0)) = \pi$$

und weiter wegen (3):

$$\lim_{\sigma\to 0}\mu_0 = \lim_{\sigma\to 0}(\alpha_1 - \alpha_0) = 0, \qquad \lim_{\sigma\to 0}\beta_0 = \pi - \alpha_0.$$

Besitzt weiterhin C in jedem Punkte eine Krümmung k, so gilt bekanntlich in A_0, wo die von einem festen Randpunkt ab in positivem Sinne gezählte Randbogenlänge gleich s sein möge,

$$k(s) = \lim_{\sigma \to 0} \frac{\sin \gamma_1}{\sigma},$$

und aus

$$\sin \gamma_1 = \sin \mu_0 \cos (\alpha_1 - \alpha_0) - \cos \mu_0 \sin (\alpha_1 - \alpha_0)$$

folgt dann die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{\sigma \to 0} \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\sigma} = \alpha'(s),$$

d. h. der Ableitung des Winkels $\alpha(s) = \alpha_0$, den im Punkte A_0 die Sehne Σ mit der positiven Tangente von C bildet, sowie die Gleichung:

$$k(s) = \frac{1}{L} \sin \alpha(s) - \alpha'(s). \tag{4}$$

Die gleichlaufende Betrachtung liefert in dem anderen, zur Bogenlänge $s + S$ gehörigen Endpunkte B_0 der Sehne Σ die Beziehung

$$\begin{aligned} k(s+S) &= \lim_{\sigma \to 0} \frac{\sin \delta_1}{\sigma} = \lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\sigma} \sin\left(\mu_1 + (\alpha_1 - \alpha_0)\right) \\ &= \frac{1}{L} \sin \alpha(s) + \alpha'(s). \end{aligned} \tag{5}$$

Diese Gleichungen werden für das Folgende von grundlegender Wichtigkeit sein

3.

Wir wollen der eben gegebenen unmittelbaren Ableitung der Formeln (4) und (5) eine zweite, auf den üblichen Frenet-Formeln der Differentialgeometrie beruhende an die Seite stellen. Es sei also $\mathfrak{x}(s)$ der Ortsvektor auf C; $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{n}$ seien die in üblicher Weise gerichteten Einheitsvektoren der Tangente und Normale im Punkte $\mathfrak{x}(s)$. Die auf den Parameterwert $s + S$ bezüglichen Größen seien durch Querstriche gekennzeichnet. Dann lautet die Voraussetzung

$$\{\mathfrak{x}(s+S) - \mathfrak{x}(s)\}^2 = (\bar{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x})^2 = 4L^2.$$

Sie führt zum Ansatz

$$\bar{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x} = 2L(\mathfrak{t} \cos \alpha + \mathfrak{n} \sin \alpha),$$

worin $\alpha(s)$ dieselbe Bedeutung hat wie oben. Die Ableitung nach s und Beachtung der Frenet-Formeln

$$\mathfrak{t}' = k\mathfrak{n}, \quad \mathfrak{n}' = -k\mathfrak{t}$$

führt zu:

$$\bar{\mathfrak{t}} = \bar{\mathfrak{x}}' = (1 - 2Lk \sin \alpha - 2L\alpha' \sin \alpha)\,\mathfrak{t} + 2L(k + \alpha') \cos \alpha\, \mathfrak{n},$$

und da die linke Seite ein Einheitsvektor wird, ist

$$1 = 1 - 4L(k + \alpha') \sin \alpha + 4L^2 (k + \alpha')^2,$$

also entweder 1) $k + \alpha' = 0$ oder 2) $L(k + \alpha') = \sin \alpha$.

Die erste Möglichkeit führt zu $\bar{\mathfrak{t}} = \mathfrak{t}$, also wäre $\bar{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x}$ ein konstanter Vektor, was offenbar bei einer Eilinie unmöglich ist. Die zweite Möglichkeit ergibt

$$k = \frac{\sin\alpha}{L} - \alpha',$$

d. h. die Gleichung (4), und damit weiter

$$\bar{\mathfrak{t}} = \mathfrak{t}\cos 2\alpha + \mathfrak{n}\sin 2\alpha. \tag{6}$$

Diese Beziehung bringt zum Ausdruck, daß $\bar{\mathfrak{t}}$ mit $\mathfrak{t}$ den Winkel 2α einschließt, also die positive Tangente an C in B_0 mit der Richtung B_0A_0 den Winkel $\pi - \alpha$ bildet. Da $\bar{\mathfrak{n}}$ gegen $\bar{\mathfrak{t}}$ den gleichen Drehsinn aufweist wie $\mathfrak{n}$ gegen $\mathfrak{t}$, so ist ferner

$$\bar{\mathfrak{n}} = -\mathfrak{t}\sin 2\alpha + \mathfrak{n}\cos 2\alpha, \tag{7}$$

und durch Ableitung nach s folgt aus (6):

$$\bar{k}\,\bar{\mathfrak{n}} = (k + 2\alpha')(-\mathfrak{t}\sin 2\alpha + \mathfrak{n}\cos 2\alpha),$$

mithin die Gleichung

$$\bar{k} = k(s+S) = k + 2\alpha' = \frac{\sin\alpha}{L} + \alpha',$$

das ist aber (5).

4.

Wir denken uns jetzt die Sehne Σ in C einmal herumgeführt und einen ihrer Randpunkte, etwa A, als Anfangs-, den anderen B als Endpunkt ausgezeichnet. Der Winkel, den Σ in A mit der positiven Tangente von C bildet, sei wie bisher mit $\alpha(s)$ bezeichnet; dann ist $\alpha(s)$ eine eindeutige periodische Funktion von s. Die Gleichung (4) gilt für jeden Wert von s, also auch für $s + S$, und liefert dann:

$$k(s+S) = \frac{1}{L}\sin\alpha(s+S) - \alpha'(s+S).$$

Der Vergleich mit (5) ergibt für $\alpha(s)$ die Funktionalgleichung:

$$\alpha'(s) + \alpha'(s+S) = \frac{1}{L}\{\sin\alpha(s+S) - \sin\alpha(s)\}. \tag{8}$$

Hierin ist die linke Seite eine symmetrische Funktion der beiden Sehnenendpunkte A und B, also muß es auch die rechte sein, d. h. es folgt:

$$\sin\alpha(s+S) = \sin\alpha(s) \quad \text{und} \quad \alpha'(s) + \alpha'(s+S) = 0.$$

Entweder gilt also

$$\alpha(s) = \alpha(s+S) \quad \text{und} \quad \alpha'(s) = \alpha'(s+S) = 0,$$

dann ist $\alpha(s)$ und mithin nach (4) auch $k = \frac{1}{L}\sin\alpha$ konstant, d. h. C ein Kreis mit dem Radius $\frac{L}{\sin\alpha}$, oder (7) besitzt die andere Auflösung

$$\alpha(s) + \alpha(s+S) = \pi,$$

und dann ist der Stellwinkel derjenigen Lage von Σ, die B zum Anfangspunkt hat, gleich $\alpha(s+S) = \pi - \alpha(s) = \beta(s)$, d. h. gleich dem Winkel, den die Lage von Σ, die B zum Endpunkt hat, mit der positiven Tangente in B bildet. Die Sehnenlage, die B zum Anfangspunkt hat, muß mit BA zusammenfallen, und daher muß die Sehne Σ in jeder Lage den Umfang von C hälften. Dieser Fall wird eine weitere Untersuchung erfordern. Inzwischen stellen wir die bisherigen Ergebnisse zusammen: *Kann man in einer Eilinie eine Sehne der fest vorgegebenen Länge* $2L$ *so herumführen, daß sie stets den gleichen Bogen* S *(oder, was dasselbe ist, den gleichen Flächeninhalt* J*) abschneidet, und ist dabei* S *nicht die Hälfte des Umfangs der Eilinie (bzw.* J *nicht die Hälfte des Flächeninhalts von* C*), so ist die Eilinie ein Kreis. Kann man in einer Eilinie eine Sehne der festen Länge* $2L$ *so herumführen, daß sie stets den gleichen Bogen oder Flächeninhalt abschneidet, und bildet sie dabei mit der Kurve stets denselben Winkel, so ist die Eilinie ein Kreis.*

5.

Es bleibt nun der Fall $S = \frac{1}{2}U$, $J = \frac{1}{2}F$ zu untersuchen. Er führt zu denjenigen *Eilinien* C*, bei denen alle umfangshälftenden Sehnen die feste Länge* $2L$ *haben*; dann hälften diese Sehnen zugleich den Inhalt von C, und umgekehrt können die C als diejenige Eilinienklasse erklärt werden, bei der alle inhaltshälftenden Sehnen die feste Länge $2L$ haben. Nach den Überlegungen zu Anfang der Arbeit können schließlich die Kurven dieser Klasse dadurch gekennzeichnet werden, daß sie, abgesehen vom Kreis, diejenigen Eilinien ohne Mittelpunkt sind, bei denen inhaltshälftende und umfangshälftende Sehnen zusammenfallen. Da Zindler [3]) das erste Beispiel solcher Kurven angegeben hat, wollen wir sie kurz *Zindlersche Kurven* nennen.

Abgesehen vom Kreis kann bei einer Zindlerschen Kurve α nicht konstant sein, genauer gesagt, muß der Schwankungsbereich von α zwischen $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{3\pi}{4}$ liegen. Bezeichnet nämlich $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ den spitzen Winkel, den die Sehne Σ in A_0 mit C bildet, so muß der eine Halbbogen der Eilinie ganz im Innern des gleichschenkligen Dreiecks über der Grundlinie A_0B_0 mit dem Grundwinkel α liegen, d. h. es ist

$$\tfrac{1}{2}F = J < L \cdot L \tan\alpha, \quad \text{also:} \quad F < 2L^2 \tan\alpha.$$

Sind andererseits d_1 und d_2 die größten Entfernungen, die ein Punkt des oberen bzw. unteren Halbbogens der Eilinie von A_0B_0 annehmen kann, so ist

$$Ld_1 < J, \quad Ld_2 < J, \quad \text{also:} \quad L(d_1 + d_2) < F.$$

[3]) Konrad Zindler, Monatshefte f. Math. u. Phys. **31** (1921), S. 44—45.

Es gibt aber sicherlich eine zu $A_0 B_0$ senkrechte Lage der Sehne Σ, und daher muß $d_1 + d_2 \geqq 2L$ sein. Es folgt also

$$L^2 < \tfrac{1}{2} F < L^2 \operatorname{tang} \alpha,$$

mithin: $\operatorname{tang} \alpha > 1$, wie behauptet.

Es sei nun $A_0 B_0$ eine Lage der Sehne Σ, bei der $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ ist. Der Kreis mit $2L$ um B_0 muß dann die Eilinie außer in A_0 noch in einem weiteren Punkte treffen, da die Eilinie bei B_0 innerhalb jenes Kreises, kurz vor oder hinter A_0 aber außerhalb desselben verläuft. Es gibt demnach durch B_0 wenigstens eine weitere Sehne der Länge $2L$, die auf C nicht den Bogen $S = \frac{1}{2} U$ abschneidet. Wir finden also den Satz: *Läßt sich durch jeden Punkt einer Eilinie wenigstens eine Sehne der Länge $2L$ ziehen und schneidet jede solche Sehne (auf der einen oder anderen Seite) stets denselben Bogen S oder denselben Flächeninhalt J ab, so ist die Eilinie ein Kreis.*

Wir stellen uns nun die Aufgabe, sämtliche Zindlerschen Kurven zu bestimmen und weitere Eigenschaften derselben zu entwickeln. Man gelangt dazu, wenn man den Ort $\tilde{C}$ der Mittelpunkte der Sehnen Σ einführt, dessen Gleichung lautet:

$$\tilde{\mathfrak{x}} = \tfrac{1}{2} (\mathfrak{x} + \bar{\mathfrak{x}}) = \mathfrak{x} + L (\mathfrak{t} \cos \alpha + \mathfrak{n} \sin \alpha).$$

Es ist also

$$\frac{d \tilde{\mathfrak{x}}}{d s} = \frac{1}{2} (\mathfrak{t} + \bar{\mathfrak{t}}) = (\mathfrak{t} \cos \alpha + \mathfrak{n} \sin \alpha) \cos \alpha.$$

Bezeichnet $\tilde{s}$ die Bogenlänge auf $\tilde{C}$, $\tilde{\mathfrak{t}}$ und $\tilde{\mathfrak{n}}$ Tangenten- und Normaleneinheitsvektor, so wird demnach:

$$\tilde{\mathfrak{t}} = \pm \frac{1}{2L} (\bar{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x}) = \pm (\mathfrak{t} \cos \alpha + \mathfrak{n} \sin \alpha), \qquad \tilde{\mathfrak{n}} = \pm (-\mathfrak{t} \sin \alpha + \mathfrak{n} \cos \alpha),$$

$$\frac{d \tilde{s}}{d s} = \pm \cos \alpha, \tag{9}$$

worin das obere bzw. untere Vorzeichen steht, je nachdem $\alpha < \frac{\pi}{2}$ oder $\alpha > \frac{\pi}{2}$ ist.

Die letzten Gleichungen besagen, daß $\tilde{C}$ die Hülle der Sehnen Σ ist. Dies ergibt sich auch unmittelbar aus den Überlegungen des Anfanges, denn mit $\sigma \to 0$ wird $l_0 \to L$, d. h. M_0 zum Mittelpunkt von $A_0 B_0$. Die Krümmung $\tilde{k}$ von $\tilde{C}$ findet man schließlich mittels der Frenet-Formel:

$$\frac{d \tilde{\mathfrak{t}}}{d \tilde{s}} = \tilde{k} \tilde{\mathfrak{n}} = \frac{1}{\cos \alpha} \frac{1}{2L} (\bar{\mathfrak{t}} - \mathfrak{t}) = \pm \frac{1}{L} \operatorname{tang} \alpha \, \tilde{\mathfrak{n}},$$

also

$$\tilde{k} = \pm \frac{\operatorname{tang} \alpha}{L} = \pm \frac{k + \bar{k}}{2 \cos \alpha}. \tag{10}$$

Hiernach ist die Krümmung von $\tilde{C}$ beständig positiv, und entsprechend den Lagen von Σ, die zugleich Doppelnormalen von C sind, für die also $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist, besitzt C Spitzen.

6.

$\tilde{C}$ ist eine geschlossene Kurve. Geht man auf C um den halben Umfang weiter, so kommt man wieder zur selben Sehne Σ und damit zum selben Punkt von $\tilde{C}$, d. h. durchläuft man C einmal, so wird $\tilde{C}$ zweimal durchlaufen. Fällt man also von irgendeinem festen Punkte O aus auf die Sehnen Σ die Lote und mißt deren Winkel φ gegen eine feste Richtung, etwa die x_1-Achse, sowie ihren Abstand $h(\varphi)$ von O, so entspricht einer Vermehrung von φ um π ein vollständiger Umlauf auf $\tilde{C}$. Die Stützfunktion $h(\varphi)$ von $\tilde{C}$ besitzt also die Eigenschaft:

$$h(\varphi + \pi) = -h(\varphi) \tag{11}$$

und erlaubt daher eine Fourier-Entwicklung der Form:

$$h(\varphi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \{a_{2\nu+1} \cos(2\nu+1)\varphi + b_{2\nu+1} \sin(2\nu+1)\varphi\}.$$

Mittels $h(\varphi)$ erhält man die nachstehende Parameterdarstellung von $\tilde{C}$:

$$\tilde{x}_1 = h(\varphi)\cos\varphi - h'(\varphi)\sin\varphi; \quad \tilde{x}_2 = h(\varphi)\sin\varphi + h'(\varphi)\cos\varphi. \tag{12}$$

Aus ihr folgt

$$\frac{d\tilde{x}_1}{d\varphi} = -(h + h'')\sin\varphi, \quad \frac{d\tilde{x}_2}{d\varphi} = (h + h'')\cos\varphi,$$

und damit

$$\tilde{k} = \frac{1}{|h + h''|}. \tag{13}$$

Man erhält nun C aus $\tilde{C}$, indem man auf den Tangenten von $\tilde{C}$ vom Berührungspunkt $\tilde{\mathfrak{x}}$ ab nach beiden Seiten je das Stück L abträgt. Daher lautet die Parameterdarstellung von C:

$$\begin{aligned} x_1 &= h(\varphi)\cos\varphi - h'(\varphi)\sin\varphi - L\sin\varphi, \\ x_2 &= h(\varphi)\sin\varphi + h'(\varphi)\cos\varphi + L\cos\varphi, \end{aligned} \qquad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi, \tag{14}$$

und der entsprechende Gegenpunkt ist:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= h(\varphi)\cos\varphi - h'(\varphi)\sin\varphi + L\sin\varphi, \\ \bar{x}_2 &= h(\varphi)\sin\varphi + h'(\varphi)\cos\varphi - L\cos\varphi. \end{aligned} \tag{15}$$

Man findet daraus:

$$\frac{dx_1}{d\varphi} = -(h + h'')\sin\varphi - L\cos\varphi; \quad \frac{dx_2}{d\varphi} = (h + h'')\cos\varphi - L\sin\varphi;$$

$$\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{(h + h'')^2 + L^2},$$

also:

$$U = \int_0^{2\pi} \sqrt{(h + h'')^2 + L^2}\, d\varphi = 2S = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(h + h'')^2 + L^2}\, d\varphi. \tag{16}$$

Die so gefundenen Kurven C sind nun umgekehrt, falls sie Eilinien sind, auch Zindlersche Kurven. Denn einmal beträgt die Entfernung zweier

Gegenpunkte $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$, die zu den Parametern φ und $\varphi + \pi$ gehören, nach (14) und (15) $2L$, sodann ist der zwischen ihnen liegende Bogen von C gleich

$$\int_{\varphi}^{\varphi+\pi} \sqrt{(h+h'')^2 + L^2}\, d\varphi = \int_{0}^{\pi} \sqrt{(h+h'')^2 + L^2}\, d\varphi = S.$$

Um also alle Zindlerschen Kurven zu erhalten, haben wir noch zum Ausdruck zu bringen, daß die Kurven (14) Eilinien sein sollen. Nun ist

$$\frac{d^2 x_1}{d\varphi^2} = -(h+h'')\cos\varphi - (h'+h'''-L)\sin\varphi,$$

$$\frac{d^2 x_2}{d\varphi^2} = -(h+h'')\sin\varphi + (h'+h'''-L)\cos\varphi,$$

also die Krümmung von C

$$k = \frac{L^2 - L(h'+h''') + (h+h'')^2}{(\sqrt{(h+h'')^2 + L^2})^3}, \tag{17}$$

und diese ist dann und nur dann beständig positiv, wenn

$$2L \geqq \max\{|h'+h'''| + \sqrt{(h'+h''')^2 - 4(h+h'')^2}\}, \quad 0 \leqq \varphi \leqq \pi \tag{18}$$

ist, d. h. L genügend groß gegen die Dimensionen von $\widetilde{C}$ gewählt wird. *Unter der Annahme* (11) *und der Beschränkung* (18) *stellen die Gleichungen* (14) *alle Zindlerschen Kurven dar.*

Aus (10) und (13) findet man für α die Beziehung

$$\operatorname{tang}\alpha = \pm\frac{L}{h+h''}, \tag{19}$$

und da wir früher gesehen haben, daß $|\operatorname{tang}\alpha| > 1$ sein muß, erhalten wir neben (18) die schwächere Beschränkung

$$L > |h+h''|. \tag{20}$$

Die Gleichungen (17) und (19) stimmen inhaltlich mit (4) und (5) überein.

Für den Umfang $\widetilde{U}$ von $\widetilde{C}$ findet man

$$\widetilde{U} = \int_{s}^{s+S} |\cos\alpha|\, ds = \int_{0}^{\pi} |h+h''|\, d\varphi < S = \tfrac{1}{2}U,$$

und für den Inhalt $\widetilde{F}$, der mit einem Vorzeichen zu versehen ist, das dem Sinne entspricht, in dem $\widetilde{C}$ bei wachsendem φ durchlaufen wird, gilt

$$\widetilde{F} = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\left(\tilde{x}_1\frac{d\tilde{x}_2}{d\varphi} - \tilde{x}_2\frac{d\tilde{x}_1}{d\varphi}\right)d\varphi = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} h(h+h'')d\varphi = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}(h^2 - h'^2)\,d\varphi,$$

während man für den Inhalt von C hat:

$$F = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\left(x_1\frac{dx_2}{d\varphi} - x_2\frac{dx_1}{d\varphi}\right)d\varphi = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\{h(h+h'') + Lh' + L^2\}\,d\varphi.$$

Hiernach besteht die Beziehung:

$$F = \pm 2\,|\widetilde{F}| + \pi L^2.$$

Um in ihr das Vorzeichen zu bestimmen, betrachten wir unsere Ausgangsfigur. Der Inhalt des Dreiecks $A_0 A_1 M_0 = B_0 B_1 M_0$ ist gleich $\frac{1}{2} l_0 (2L - l_0) \sin \mu_0 = \frac{1}{2} L \sin \alpha_0 \cdot \sigma + \ldots$. Läßt man $\sigma \to 0$ gehen und summiert über alle diese Dreiecke, so erhält man

$$L \cdot \int_s^{s+S} \sin\alpha \, ds = L^2 \int_s^{s+S} (k(s) + \alpha'(s))\, ds = L^2 (2\alpha + \pi - 2\alpha) = L^2 \pi.$$

Andererseits zeigt die Figur, daß die erhaltene Fläche größer sein muß als F. Es muß also die Formel gelten:

(21) $$F + 2\,|\widetilde{F}| = \pi L^2,$$

und das Vorzeichen von $\widetilde{F}$ negativ sein. Es ergibt sich daher die auch der Anschauung leicht zu entnehmende Tatsache, daß einem positiven Umlaufssinn um C auf $\widetilde{C}$ der negative Umlaufssinn entspricht.

7.

C hat genau dann einen Mittelpunkt, wenn sich $\widetilde{C}$ auf einen Punkt zusammenzieht; dies tritt dann und nur dann ein, wenn $h(\varphi) + h''(\varphi) = 0$ ist, also $h(\varphi) = a_1 \cos\varphi + b_1 \sin\varphi$. C ist dann ein Kreis. *Die einzige Zindlersche Kurve mit Mittelpunkt ist also der Kreis.*

Wir behaupten ferner: *Die einzige Zindlersche Kurve fester Breite ist der Kreis.* In der Tat zeigt der Wechsel von α zwischen spitzen und stumpfen Winkeln, daß es mindestens eine Lage der Sehne Σ geben muß, in der sie Doppelnormale von C ist. Ist daher C von fester Breite, so ist diese Breite gleich $2L$. Nach einem bekannten Satze muß dann der Umfang gleich $U = 2L\pi$ sein. Der Vergleich mit (16) zeigt, daß dies nur dann möglich ist, wenn beständig $h(\varphi) + h''(\varphi) = 0$, also C ein Kreis ist.

Das dem Zeiger $\nu = 0$ entsprechende Glied in der Fourier-Entwicklung von $h(\varphi)$ kann durch geeignete Wahl des Anfangspunktes O stets zu Null gemacht werden. Man erhält demgemäß die einfachste Zindlersche Kurve durch den Ansatz

$$h(\varphi) = \cos 3\varphi.$$

Sie lautet:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + 4\sin^2\varphi - 8\sin^4\varphi - L\sin\varphi, \\ x_2 &= -8\sin\varphi\cos^3\varphi + L\cos\varphi. \end{aligned} \qquad (0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$$

Für sie ist:

$$\widetilde{U} = 16,\ |\widetilde{F}| = 2\pi,\ U = 2\int_0^{\pi} \sqrt{L^2 + 64\cos^2 3\varphi}\, d\varphi,\quad F = \pi(L^2 - 4).$$

Damit es sich um eine Eilinie handle, muß $L \geqq 24$ sein, und daher wird

$$|\operatorname{tang}\alpha| = \frac{L}{8\,|\cos 3\varphi|} \geqq \frac{3}{|\cos 3\varphi|} \geqq 3.$$

Mithin gilt bei diesem Beispiel die Begrenzung

$$71^0\,33'\,54'' \leqq \alpha \leqq 108^0\,26'\,6'',$$

wobei die Grenzen nur dann angenommen werden, wenn $L = 24$ gesetzt wird. $\tilde{C}$ ist eine Steinersche Hypozykloide, C hingegen eine rationale Kurve zwölfter Ordnung. Entsprechend den Werten

$$\varphi = \frac{\pi}{6}\left(\frac{7\pi}{6}\right), \quad \varphi = \frac{\pi}{2}\left(\frac{3\pi}{2}\right), \quad \varphi = \frac{5\pi}{6}\left(\frac{11\pi}{6}\right)$$

gibt es drei umfanghälftende Sehnen von C, die zugleich Doppelnormalen sind; wir werden in der nächsten Nummer zeigen, daß eine Zindlersche Kurve immer mindestens drei umfanghälftende Doppelnormalen hat. Für die Krümmung findet sich der Ausdruck

$$k = \frac{64\cos^2 3\varphi - 24 L \sin 3\varphi + L^2}{(\sqrt{64\cos^2 3\varphi + L^2})^3}.$$

Aus ihm leitet man ab, daß C mindestens sechs Scheitel besitzen muß. In der Tat zerfällt die Gleichung $\frac{dk}{d\varphi} = 0$ in die beiden folgenden:

$$\cos 3\varphi = 0,$$

$$512\sin^3 3\varphi + 384 L \sin^2 3\varphi - (8L^2 + 512)\sin 3\varphi + 3L(L^2 + 64) = 0.$$

Die erste hat die sechs Wurzeln

$$\varphi = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$$

und liefert sechs Scheitel, die paarweise auf die umfanghälftenden Doppelnormalen fallen. Von der zweiten Gleichung zeigt man hingegen unschwer daß sie wegen $L \geqq 24$ keine reellen Wurzeln φ besitzt.

8.

Die Besonderheiten des letzten Beispiels treten bei allen Zindlerschen Kurven auf. Wir beweisen zunächst den Satz: *Eine Zindlersche Kurve besitzt mindestens drei umfanghälftende Doppelnormalen.* Das heißt, bei einem Umlauf um C nimmt α mindestens sechsmal, also mindestens in drei Paaren von Gegenpunkten, den Wert $\frac{\pi}{2}$ an. $\tilde{C}$ besitzt also wenigstens drei Spitzen. Zum Beweis setzen wir

$$\tilde{r} = h(\varphi) + h''(\varphi),$$

worin $\tilde{r}$ bis auf das Vorzeichen den Krümmungsradius von $\tilde{C}$ bedeutet. Nach (19) entsprechen den Nullstellen von $\tilde{r}(\varphi)$ die Enden der umfanghälftenden Doppelnormalen von C, d. h. die Spitzen von $\tilde{C}$. Nun gelten zufolge (11) die Indentitäten:

$$(22)\quad \int_0^{2\pi} \tilde{r}\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \tilde{r}\cos\varphi\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \tilde{r}\sin\varphi\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \tilde{r}\cos 2\varphi\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \tilde{r}\sin 2\varphi\,d\varphi = 0.$$

$\tilde{r}(\varphi)$ wechselt danach an mindestens zwei Stellen φ_0 und $\varphi_0 + \pi$ sein Zeichen; wären keine weiteren Zeichenwechsel vorhanden, so müßte einerseits wegen (22)

$$\int_0^{2\pi} \tilde{r} \sin(\varphi - \varphi_0)\, d\varphi = 0$$

sein, andererseits hätte der Integrand im ganzen Integrationsgebiet ständig dasselbe Zeichen. Aus diesem Widerspruch folgt, daß $\tilde{r}(\varphi)$ mindestens vier Zeichenwechselstellen φ_0, $\varphi_0 + \pi$, φ_1, $\varphi_1 + \pi$ haben muß. Wären nun keine weiteren Zeichenwechsel vorhanden, so folgte einerseits aus (22)

$$\int_0^{2\pi} \tilde{r} \sin(\varphi - \varphi_0) \sin(\varphi - \varphi_1)\, d\varphi = \tfrac{1}{2} \cos(\varphi_0 - \varphi_1) \int_0^{2\pi} \tilde{r}\, d\varphi - \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} \tilde{r} \cos(2\varphi - \varphi_0 - \varphi_1)\, d\varphi = 0,$$

andererseits hätte der Integrand wiederum beständig dasselbe Zeichen. $\tilde{r}(\varphi)$ muß also mindestens sechs Zeichenwechsel haben, woraus unsere Behauptung folgt.

Wir behaupten nun weiter: *Eine Zindlersche Kurve besitzt wenigstens sechs verschiedene Scheitel.* Nach dem Vorangehenden muß nämlich $\alpha(s)$ mindestens drei Minima $\leqq \frac{\pi}{2}$ und drei Maxima $\geqq \frac{\pi}{2}$ aufweisen. Es sei etwa $\alpha(s_0)$ eines dieser Minima und $\alpha(s_1)$ das darauffolgende Maximum $\geqq \frac{\pi}{2}$. Nehmen wir zunächst an, daß diese Extreme einfach seien, so ist nach (4) und (5):

$$k(s_0) = \bar{k}(s_0) = \frac{1}{L} \sin \alpha(s_0), \qquad k(s_1) = \bar{k}(s_1) = \frac{1}{L} \sin \alpha(s_1),$$
$$k'(s_0) = -\alpha''(s_0) < 0, \qquad \bar{k}'(s_0) = +\alpha''(s_0) > 0,$$
$$k'(s_1) = -\alpha''(s_1) > 0, \qquad \bar{k}'(s_1) = +\alpha''(s_1) < 0,$$

mithin müssen $k'(s)$ und $\bar{k}'(s)$ zwischen s_0 und s_1 mindestens einmal verschwinden, d. h. zwischen $s = s_0$ und $s = s_1$, und ebenso zwischen $s = s_0 + S$ und $s = s_1 + S$, liegt je mindestens ein Scheitel von C. Diese Überlegung bleibt erst recht in Geltung, wenn an einer der benutzten Stellen ein höheres Extremum von $\alpha(s)$ liegt.

Im allgemeinen werden sich diese Scheitel nicht auf Gegenpunkte verteilen. Nach (4) und (5) ist nämlich dann und nur dann gleichzeitig $k'(s_0) = \bar{k}'(s_0) = 0$, wenn entweder $\alpha'(s_0) = \alpha''(s_0) = 0$ ist, also $k(s) - \bar{k}(s)$ in s_0 eine vielfache Nullstelle hat, oder $\alpha(s_0) = \frac{\pi}{2}$, $\alpha''(s_0) = 0$ ist, also die beiden Scheitel zugleich Enden einer umfanghälftenden Doppelnormalen sind, in denen $\alpha''(s) = 0$ ist. Dieser Fall lag gerade beim Beispiel der vorigen Nummer vor. Insbesondere sind die Endpunkte der umfanghälftenden Doppelnormalen bei allen Zindlerschen Kurven zugleich Scheitel, denen eine Funktion $h(\varphi)$ der einfachen Form $a \cos(2n+1)\varphi + b \sin(2n+1)\varphi$ entspricht.

(Eingegangen am 23. August 1939.)

Die Winkelderivierte und das Poisson-Stieltjes-Integral *).

Von

Alfred Herzig aus Breslau.

Von G. Julia und C. Carathéodory[1]) stammt der folgende Satz:

I. *Ist* $F(z)$ *in* $|z| < 1$ *analytisch und ist daselbst* $|F(z)| \leqq 1$, *so existiert der endliche oder unendliche Grenzwert*

$$D = \lim_{z \to 1} \frac{F(z) - 1}{z - 1},$$

wenn z *in Winkelannäherung, d. h. zwischen zwei in* $z = 1$ *endenden Sehnen des Einheitskreises, gegen* 1 *strebt. Ist* D *endlich, so ist es nichtnegativ, und es gilt*

$$\frac{|1 - F(z)|^2}{1 - |F(z)|^2} \leqq D \frac{|1 - z|^2}{1 - |z|^2}$$

für alle z *mit* $|z| < 1$. *Steht hierin das Gleichheitszeichen für ein* z *aus* $|z| < 1$, *so gilt es für jedes* z *im Innern des Einheitskreises, und es ist*

$$F(z) = \frac{1 + z - (D + ic)(1 - z)}{1 + z + (D - ic)(1 - z)}$$

mit beliebigem reellem c. *Ferner gilt, wenn* D *endlich ist, gleichmäßig bei Winkelannäherung*

$$\lim_{z \to 1} F'(z) = D.$$

Schließlich ist $D = 0$ *nur für* $F(z) \equiv 1$.

Dieser Grenzwert D heißt die *Winkelderivierte* von $F(z)$ im Punkte $z = 1$. Versteht man unter Δ ein im Innern des Einheitskreises gelegenes Dreieck, dessen eine Ecke der Punkt $z = 1$ ist, und das die reelle Achse zur Symmetrieachse hat, so ist nach Carathéodory notwendig und hinreichend für die Endlichkeit von D die Bedingung: Es gibt eine Δ angehörende Punktfolge z_n mit $\lim_{n \to \infty} z_n = 1$ derart, daß $\left| \frac{1 - F(z_n)}{1 - z_n} \right| < M$ für alle n gilt.

*) Diese Arbeit wurde von der naturwissenschaftlichen Fakultät der Schlesischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Breslau als Dissertation (D 2) angenommen.

[1]) G. Julia, Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles. Journ. de Math. (8) **1** (1918), S. 47—245, insbesondere S. 72. Vgl. auch G. Julia, Extension nouvelle d'un lemme de Schwarz. Acta Math. **42** (1918), S. 349—355. — C. Carathéodory, Über die Winkelderivierten von beschränkten analytischen Funktionen. Sitzungsber. Akad. Berlin 1929, S. 39—54.

Das Ziel der folgenden Betrachtungen soll nun zunächst sein, für den Satz I einen neuen Beweis zu geben, der neben seiner Kürze den Vorzug besitzt, die bestehenden Zusammenhänge vielleicht organischer aufzuklären. Wir gehen aus von der sogenannten Poisson-Stieltjesschen Integraldarstellung. Hierzu eine kurze Vorbemerkung:

Es sei $f(z) = u(z) + iv(z)$ eine in $|z| < 1$ analytische Funktion; dann läßt sie sich in bekannter Weise durch das Poissonsche Integral

$$(1) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{R e^{i\vartheta} + z}{R e^{i\vartheta} - z} u(R e^{i\vartheta})\, d\vartheta + i v(0)$$

für $|z| < R < 1$ darstellen. Setzt man

$$(2) \qquad \alpha(R, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\vartheta} u(R e^{i\varphi})\, d\varphi,$$

so ist, da $u(z)$ in $|z| < 1$ harmonisch ist, $\alpha(R, \vartheta)$ für jedes $R < 1$ hinsichtlich ϑ stetig differenzierbar mit der Ableitung $\frac{1}{2\pi} u(R e^{i\vartheta})$. Daraus folgt

$$(1') \qquad f(z) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{R e^{i\vartheta} + z}{R e^{i\vartheta} - z}\, d\alpha(R, \vartheta) + i v(0).$$

Die Darstellung (1′) von $f(z)$ als Stieltjes-Integral ist, solange $R < 1$ bleibt, mit (1) völlig gleichwertig. Bei geeigneten Voraussetzungen über $f(z)$ besteht indes, wie zuerst F. Riesz[2]) nachgewiesen hat, die Gleichung (1′) auch noch für $R = 1$; es gilt nämlich[3]):

II. *Ist $f(z)$ in $|z| < 1$ analytisch, und ist daselbst $\Re(f(z)) = u(z)$ als Differenz zweier nichtnegativer Potentialfunktionen darstellbar, dann gibt es eine Funktion $\alpha(\vartheta)$ von beschränkter Schwankung, so daß für $|z| < 1$*

$$(3) \qquad f(z) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z}\, d\alpha(\vartheta) + i v(0)$$

ist. Diese Funktion $\alpha(\vartheta)$ ist bis auf eine additive Konstante und bis auf die Werte in ihren (höchstens abzählbar unendlich vielen) Unstetigkeitsstellen eindeutig bestimmt; und zwar kann man setzen:

$$(4) \qquad \alpha(\vartheta) = \lim_{R \to 1} \alpha(R, \vartheta).$$

Ist insbesondere $u(z) \geqq 0$ in $|z| < 1$, so ist $\alpha(\vartheta)$ monoton wachsend.

[2]) F. Riesz, Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales. Ann. de l'Ecole Normale (3) 28 (1911), S. 33–62.

[3]) Die im Text angegebene Formulierung des Satzes findet man bei R. Nevanlinna, Eindeutige analytische Funktionen (Jul. Springer 1936), S. 180ff.

In der zuletzt genannten speziellen Fassung ist der Satz II von F. Riesz angegeben worden, und in dieser wird er uns im folgenden ausschließlich beschäftigen. Daß die obigen Voraussetzungen notwendig und sogar die allgemeinsten sind, leuchtet sofort ein, da wegen der offensichtlichen Umkehrbarkeit des Satzes die gesamte Klasse der Funktionen erfaßt wird, die die Darstellung (3) zulassen. Bemerkt sei noch, daß die erwähnte Willkür in der Wahl von $\alpha(\vartheta)$ auf den Wert des Stieltjes-Integrals keinen Einfluß hat.

Um mit Hilfe von Satz II zu einem Beweis von Satz I zu gelangen, setze ich

$$f(z) = \frac{1 + F(z)}{1 - F(z)},$$

wobei $F(z)$ eine Funktion sein möge, die den Voraussetzungen von I genügt; dann ist in $|z| < 1$

$$u(z) = \Re(f(z)) = \frac{1 - |F(z)|^2}{|1 - F(z)|^2} \geqq 0.$$

Der leitende Gedanke des Beweises kommt nun in der Beziehung

$$D = \frac{1}{\mu}$$

zum Ausdruck, wenn $\mu = \alpha(0+) - \alpha(0-)$ gesetzt wird. Die Winkelderivierte erscheint also als reziproker Sprung der $F(z)$ vermittels $f(z)$ durch Satz II zugeordneten Funktion $\alpha(\vartheta)$ bei $\vartheta = 0$. Daraus entnimmt man für D sofort die Abschätzung

$$D \geqq \frac{1}{u(0)} = \frac{|1 - F(0)|^2}{1 - |F(0)|^2} \geqq 0,$$

die sich mühelos zu

$$D \geqq n + \frac{|1 - A_n|^2}{1 - |A_n|^2} > n$$

verschärfen läßt, wenn $F(z) = A_n z^n + A_{n+1} z^{n+1} + \ldots$ die Potenzreihenentwicklung von $F(z)$ im Punkte $z = 0$ und $|A_n| < 1$ ist. Am Schluß des ersten Abschnitts der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, wie man aus der Gleichheit der Winkelderivierten zweier Funktionen $F_1(z)$, $F_2(z)$, die die Voraussetzungen von I erfüllen, bei geeigneten Zusatzforderungen auf deren Identität schließen kann.

Im zweiten Abschnitt steht das Poisson-Stieltjes-Integral selbst im Mittelpunkt der Betrachtungen. Ist

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

eine im Einheitskreis analytische Funktion mit nichtnegativem Realteil, so hat man wegen der Integraldarstellung

$$f(z) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} d\alpha(\vartheta)$$

die Formeln

$$a_0 = \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha(\vartheta) = 1, \quad a_n = 2 \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-in\vartheta} d\alpha(\vartheta) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Aus diesen Gleichungen, die eine Erweiterung der für $R < 1$ geltenden Fourierformeln

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} u(R e^{i\vartheta}) d\vartheta, \quad a_n R^n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-in\vartheta} u(R e^{i\vartheta}) d\vartheta$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

darstellen, folgt für $n \geqq 1$ sofort

$$|a_n| \leqq 2.$$

In dieser Abschätzung kann das Gleichheitszeichen für ein gewisses n nur stehen, wenn

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \frac{e^{i\vartheta_k} + z}{e^{i\vartheta_k} - z}$$

ist mit

$$\mu_k \geqq 0, \quad \sum_{k=1}^{n} \mu_k = 1 \quad \text{und} \quad \vartheta_k = \begin{cases} \dfrac{(2k-n)\pi}{n} - \dfrac{\gamma}{n}, & \text{falls } n \text{ gerade}, \gamma \geqq 0, \\ \dfrac{(2k-(n+1))\pi}{n} - \dfrac{\gamma}{n}, & \text{falls } n \text{ ungerade}, \\ \dfrac{(2k-(n+2))\pi}{n} - \dfrac{\gamma}{n}, & \text{falls } n \text{ gerade}, \gamma < 0, \end{cases}$$

wobei noch $a_n = 2 e^{i\gamma}$ gesetzt ist. Dieses Ergebnis ist nicht neu, sondern im wesentlichen in Untersuchungen von Carathéodory[4]) über Funktionen mit nichtnegativem Realteil enthalten. Dort wird als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

in $|z| < 1$ regulär und dort $\Re(f(z)) \geqq 0$ ist, die folgende erkannt: Für jedes $m = 1, 2, 3, \ldots$ gilt

$$a_m = 2 \sum_{k=1}^{n} \mu_k e^{-im\vartheta_k},$$

[4]) C. Carathéodory, Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen. Math. Annalen **64** (1907), S. 95—115.

wobei $1 \leqq m \leqq n$, $\mu_k \geqq 0$, $\sum_{k=1}^{n} \mu_k \leqq 1$, $-\pi \leqq \vartheta_k \leqq \pi$ ist. $\sum_{k=1}^{n} \mu_k = 1$ gilt für ein n nur dann, wenn

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \frac{e^{i\vartheta_k} + z}{e^{i\vartheta_k} - z}$$

ist. Für die Funktion

$$F(z) = \frac{f(z) - 1}{f(z) + 1}$$

folgt hieraus, daß $F(z)$ auf $|z| = 1$ stetige Randwerte vom absoluten Betrage 1 besitzt. Hierfür ist, wie ich weiter zeige, nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig, daß $\alpha(\vartheta)$ eine reine Sprungfunktion ist.

Den Abschluß der Arbeit bildet eine Verallgemeinerung des Satzes I in folgender Richtung: Die Gleichung $D = \frac{1}{\mu}$ enthält bei positivem μ insbesondere die Abschätzung

$$\frac{1}{1 - F(z)} = O\left(\frac{1}{|1 - z|}\right),$$

wenn z in Winkelannäherung gegen 1 strebt. Allgemeiner folgt nun aber aus

$$\alpha(\vartheta) = O(|\vartheta|^{1-\lambda}) \qquad \text{für} \quad \vartheta \to 0$$

mit $0 < \lambda < 1$ die Beziehung

$$\frac{1}{1 - F(z)} = O\left(\frac{1}{|1 - z|^{\lambda}}\right) \qquad \text{für } z \to 1 \text{ in } \Delta.$$

Hieraus ergibt sich unschwer eine potentialtheoretische Anwendung, die als eine Erweiterung des bekannten Satzes angesehen werden kann, daß das Poissonsche Integral für beschränkte absolut integrable Randwerte $u(\vartheta)$ eine Potentialfunktion darstellt, die in jeder Stetigkeitsstelle von $u(\vartheta)$ bei Winkelannäherung aus dem Kreisinnern den Randwert $u(\vartheta)$ besitzt.

I. Abschnitt. Die Winkelderivierte.

Ich beginne mit dem Beweis des Satzes I. Die Funktion $F(z)$ genüge den Voraussetzungen dieses Satzes; dann ist auch

$$f(z) = \frac{1 + F(z)}{1 - F(z)} \tag{5}$$

in $|z| < 1$ analytisch, und es gilt dort

$$\Re(f(z)) = \frac{1 - |F(z)|^2}{|1 - F(z)|^2} \geqq 0.$$

Nach Satz II gibt es daher eine monoton wachsende Funktion $\alpha(\vartheta)$, die für $f(z)$ die Darstellung

$$f(z) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\, d\alpha(\vartheta) + i\,v(0) \qquad \text{in } |z|<1$$

bei $f(z) = u(z) + iv(z)$ leistet. Ich setze nun

$$\alpha(0+) - \alpha(0-) = \mu; \tag{6}$$

wegen der Montonie von $\alpha(\vartheta)$ existieren ja diese einseitigen Grenzwerte, und überdies ist $\mu \geqq 0$. Nun wird [5])

$$f(z) = \mu\,\frac{1+z}{1-z} + \int_{\substack{-\pi \\ \vartheta \neq 0}}^{+\pi} \frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\, d\alpha(\vartheta) + i\,v(0) = \mu\,\frac{1+z}{1-z} + J + i\,v(0).$$

Für das Integral J besteht die Beziehung[6]):

$$\lim_{z\to 1} (1-z)J = 0.$$

Zum Beweis werde

$$J_1 = \int_{\substack{-\pi \\ \vartheta\neq 0}}^{0} = \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\substack{-\delta \\ \vartheta\neq 0}}^{0}, \qquad J_2 = \int_{\substack{0 \\ \vartheta\neq 0}}^{\pi} = \int_{\substack{0 \\ \vartheta\neq 0}}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi}, \qquad \text{also } J = J_1 + J_2$$

gesetzt, wobei über $\delta > 0$ noch verfügt werden wird. Dann ist

$$(1-z)\int_{\substack{-\delta \\ \vartheta\neq 0}}^{0} \frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\, d\alpha(\vartheta)\Bigg| < 2\,\frac{|1-z|}{1-|z|}\,(\alpha(0-) - \alpha(-\delta)) \qquad \text{für } |z|<1.$$

Weiter gilt, wie man ohne weiteres einsieht,

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} < M \qquad \text{für } z \text{ in } \Delta. \tag{7}$$

Mithin ist bei geeignetem $\delta_1(\varepsilon)$ für jedes $\delta < \delta_1(\varepsilon)$ und z in Δ

$$\Big|(1-z)\int_{\substack{-\delta \\ \vartheta\neq 0}}^{0}\Big| < 2M\,(\alpha(0-) - \alpha(-\delta)) < \varepsilon.$$

Für ein fest gewähltes $\delta < \delta_1(\varepsilon)$ ist ferner

$$\left|(1-z)\int_{-\pi}^{-\delta} \frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\, d\alpha(\vartheta)\right| < |1-z|\,\frac{2}{d}\,(\alpha(-\delta) - \alpha(-\pi)) = C\,|1-z|,$$

---

[5]) Das Integral werde hier, wie auch weiterhin, über das Intervall $\langle -\pi, +\pi\rangle$ unter Auslassung der Stelle $\vartheta = 0$ erstreckt.

[6]) Der Grenzübergang $z \to 1$ ist stets in Winkelannäherung gemeint.

wobei für z in Δ

$$d = \operatorname*{Min}_{-\pi \leqq \vartheta \leqq -\delta} |e^{i\vartheta} - z| > 0$$

ist. Demnach ist

$$\left|(1-z)\int_{-\pi}^{-\delta}\right| < \varepsilon \quad \text{für } z \text{ in } \Delta \text{ und } |1-z| < \eta(\varepsilon),$$

also

$$|(1-z)J_1| < 2\varepsilon \quad \text{für } z \text{ in } \Delta \text{ und } |1-z| < \eta(\varepsilon),$$

d. h.

$$\lim_{z \to 1}(1-z)J_1 = 0.$$

Ebenso zeigt man

$$\lim_{z \to 1}(1-z)J_2 = 0.$$

Folglich ist

$$\lim_{z \to 1}(1-z)J = 0,$$

woraus sogleich

$$\lim_{z \to 1}(1-z)f(z) = 2\mu \tag{8}$$

hervorgeht. Aus (5) erhält man

$$F(z) = \frac{f(z)-1}{f(z)+1}$$

und

$$\frac{F(z)-1}{z-1} = \frac{2}{(1-z)f(z)+(1-z)}.$$

Daher gilt:

$$\lim_{z \to 1}\frac{F(z)-1}{z-1} = \frac{1}{\mu} = D. \tag{9}$$

Bei positivem μ ist demnach auch D positiv; der Fall $D = 0$ kann wegen $\mu \leqq \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha(\vartheta) = u(0)$ nur für die Funktion $F(z) \equiv 1$ eintreten, die unter den Voraussetzungen des Satzes I die einzige ist, deren durch (5) zugeordnete Funktion $f(z)$ keine Integraldarstellung zuläßt.

Ferner ist in $|z| < 1$

$$\Re(f(z)) = \int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{i\vartheta}-z|^2}\,d\alpha(\vartheta)$$

$$= \mu\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} + \int_{\substack{-\pi \\ \vartheta \neq 0}}^{+\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{i\vartheta}-z|^2}\,d\alpha(\vartheta) \geqq \mu\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2},$$

also, wenn $\mu > 0$, d. h. D endlich ist:

$$\frac{|1-F(z)|^2}{1-|F(z)|^2} \leqq D\,\frac{|1-z|^2}{1-|z|^2}. \tag{10}$$

Hierin kann das Gleichheitszeichen für ein z mit $|z|<1$ offenbar dann und nur dann stehen, wenn $\alpha(\vartheta)$ in $0<|\vartheta|\leqq\pi$ konstant ist; in diesem Falle steht es aber für alle z aus $|z|<1$, und es ist

$$f(z)=\frac{1+F(z)}{1-F(z)}=\frac{1}{D}\,\frac{1+z}{1-z}+i\,v(0)$$

oder

$$F(z)=\frac{1+z-(D+ic)(1-z)}{1+z+(D-ic)(1-z)} \tag{11}$$

mit beliebigem reellem c, was sich auch in der Gestalt

$$F(z)=\frac{(1-F(0))\,z+F(0)\,(1-\overline{F(0)})}{\overline{F(0)}\,(1-F(0))\,z+(1-\overline{F(0)})} \tag{11'}$$

schreiben läßt mit einem Werte $F(0)$, der nur der Bedingung $|F(0)|<1$ genügt. Das Gleichheitszeichen in (10) tritt demnach nur für lineare Funktionen ein, die den Einheitskreis unter Festhaltung des Punktes $z=1$ auf sich selbst abbilden.

Zum Beweise des letzten Teiles von Satz 1 beachte man, daß

$$f'(z)=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{2\,e^{i\vartheta}}{(e^{i\vartheta}-z)^2}\,d\alpha(\vartheta)$$

ist. Für $|z|<1$, $|z+h|<1$ gilt nämlich

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{2\,e^{i\vartheta}}{(e^{i\vartheta}-z)^2}\,d\alpha(\vartheta)\right|$$

$$=|h|\left|\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{2\,e^{i\vartheta}}{(e^{i\vartheta}\quad z-h)\,(e^{i\vartheta}-z)^2}\,d\alpha(\vartheta)\right|\leqq|h|\,\frac{2\,u(0)}{d^3},$$

wobei d den kleineren der beiden (positiven) Werte

$$d_1=\operatorname*{Min}_{|\vartheta|\leqq\pi}|e^{i\vartheta}-z| \quad\text{und}\quad d_2=\operatorname*{Min}_{|\vartheta|\leqq\pi}|e^{i\vartheta}-(z+h)|$$

bedeutet. Aus dieser Darstellung von $f'(z)$ erhält man:

$$(1-z)^2 f'(z)=\int_{-\pi}^{+\pi}\left(\frac{1-z}{e^{i\vartheta}-z}\right)^2 2\,e^{i\vartheta}\,d\alpha(\vartheta)$$

$$=2\mu+\int_{\substack{-\pi\\ \vartheta\neq 0}}^{+\pi}\left(\frac{1-z}{e^{i\vartheta}-z}\right)^2 2\,e^{i\vartheta}\,d\alpha(\vartheta).$$

Ganz ähnlich wie früher beweist man die Beziehung

$$\lim_{z \to 1} (1 - z)^2 f'(z) = 2\mu. \tag{12}$$

Aus

$$f'(z) = \frac{2}{(1 - F(z))^2} F'(z)$$

zusammen mit (12) ergibt sich

$$\lim_{z \to 1} \left(\frac{1 - z}{1 - F(z)}\right)^2 F'(z) = \mu$$

und demnach, falls $\mu \neq 0$ und endlich ist,

$$\lim_{z \to 1} F'(z) = D. \tag{13}$$

Dies gilt offenbar auch für $D = 0$, da ja dann $F(z) \equiv 1$ ist. Damit ist Satz I in vollem Umfange bewiesen.

Für die Endlichkeit von D hat sich hierbei das folgende Kriterium ergeben: *Die Winkelderivierte D von $F(z)$ ist dann und nur dann endlich, wenn die $F(z)$ durch* (4) *und* (5) *zugeordnete Funktion $\alpha(\vartheta)$ bei $\vartheta = 0$ einen Sprung aufweist.*

Der bequemeren Ausdrucksweise wegen verstehen wir weiterhin unter der Klasse $\mathfrak{S}$ die Menge aller im Einheitskreise analytischen Funktionen, für die dort $|F(z)| \leqq 1$ ist. Aus (10) folgt [7])

$$D \geqq \frac{|1 - F(0)|^2}{1 - |F(0)|^2};$$

insbesondere also $D \geqq 1$, wenn $F(0) = 0$ ist, wobei Gleichheit wegen $v(0) = 0$ nur für die Funktion $F(z) = z$ eintritt. Es gilt aber schärfer der

Satz 1. *Ist $F(z)$ eine Funktion der Klasse $\mathfrak{S}$, die in $z = 0$ eine n-fache Nullstelle besitzt, so ist $D \geqq n$, wobei das Gleichheitszeichen nur für $F(z) = z^n$ steht.*

Setzt man nämlich

$$\Phi(z) = \frac{F(z)}{z^n},$$

so ist auch $\Phi(z)$ eine Funktion der Klasse $\mathfrak{S}$, weshalb nach Satz I

$$\lim_{\to 1} \frac{\Phi(z) - 1}{z - 1} \geqq 0$$

gilt. Weiter ist

$$\frac{\Phi(z) - 1}{z - 1} = \frac{1}{z^n} \frac{F(z) - z^n}{z - 1} = \frac{1}{z^n} \left(\frac{F(z) - 1}{z - 1} - \frac{z^n - 1}{z - 1}\right).$$

[7]) Ist D nicht endlich, so sollen die folgenden Ungleichungen stets als erfüllt gelten.

und daher

$$\lim_{z \to 1} \frac{\Phi(z) - 1}{z - 1} = D - n.$$

Hieraus folgt $D \geqq n$, wobei Gleichheit nur für $\Phi(z) \equiv 1$ oder $F(z) = z^n$ eintreten kann. Offenbar ist dieser Satz nicht umkehrbar, wie man aus

$$D \geqq \frac{|1 - F(0)|^2}{1 - |F(0)|^2}$$

sofort entnehmen kann.

Besitzt die Funktion $F(z)$ der Klasse $\mathfrak{S}$ im Einheitskreis die Potenzreihenentwicklung

$$F(z) = A_n z^n + A_{n+1} z^{n+1} + \ldots \qquad (n \geqq 0)$$

mit

$$A_n = \varrho e^{i\psi} \qquad (|\psi| \leqq \pi),$$

so ist nach dem Cauchyschen Koeffizientensatz $\varrho \leqq 1$, wobei $\varrho = 1$ nur für die Funktion $F(z) = z^n$ gilt, wenn wir noch $F(1) = 1$ verlangen, da andernfalls D sicher nicht endlich ist. Für den Fall $\varrho = 1$ läßt sich demnach die Schranke des Satzes 1 nicht verbessern, wohl aber, falls wir $\varrho < 1$ voraussetzen. Die Funktion

$$\Phi(z) = \frac{F(z)}{z^n}$$

gehört wiederum zur Klasse $\mathfrak{S}$, weshalb für sie nach (10)

$$\lim_{z \to 1} \frac{\Phi(z) - 1}{z - 1} \geqq \frac{|1 - \Phi(0)|^2}{1 - |\Phi(0)|^2} = \frac{|1 - A_n|^2}{1 - |A_n|^2}$$

gilt. Somit ist

$$D \geqq n + \frac{1 + \varrho^2 - 2\varrho\cos\psi}{1 - \varrho^2} > n. \tag{14}$$

Das Gleichheitszeichen steht nach (11′) nur dann, wenn

$$\Phi(z) = \frac{(1 - \Phi(0))\, z + \Phi(0)\,(1 - \overline{\Phi(0)})}{\overline{\Phi(0)}\,(1 - \Phi(0))\, z + (1 - \overline{\Phi(0)})},$$

also

$$F(z) = z^n \frac{(1 - \varrho e^{i\psi})\, z + \varrho\,(e^{i\psi} - \varrho)}{\varrho\,(e^{-i\psi} - \varrho)\, z + (1 - \varrho e^{-i\psi})}$$

ist. Zusammenfassend findet man

Satz 2. *Ist*

$$F(z) = A_n z^n + A_{n+1} z^{n+1} + \ldots$$

eine Funktion der Klasse $\mathfrak{S}$, *und ist*

$$A_n = \varrho e^{i\psi} \quad \textit{mit} \quad 0 \leqq \varrho < 1, \quad |\psi| \leqq \pi,$$

so gilt

$$D \geqq n + \frac{1 + \varrho^2 - 2\varrho\cos\psi}{1 - \varrho^2},$$

wobei Gleichheit nur für

$$F(z) = z^n \frac{(1 - \varrho e^{i\psi})z + \varrho(e^{i\psi} - \varrho)}{\varrho(e^{-i\psi} - \varrho)z + (1 - \varrho e^{-i\psi})}$$

eintritt.

Der Fall $n = 1$ ist von H. Unkelbach[8]) auf anderem Wege bewiesen worden. Ohne Schwierigkeit ergibt sich aus Satz 2 eine Verschärfung des Satzes von Löwner[9]):

Erfüllt die Funktion $F(z)$ die Voraussetzungen des Satzes 2, besitzt sie überdies auf einem Bogen des Einheitskreises von der Länge a stetige Randwerte vom Betrage 1 und bildet sie diesen Bogen auf einen solchen der Länge b ab, so ist

$$b \geqq \left(n + \frac{1 + \varrho^2 - 2\varrho\cos\psi}{1 - \varrho^2}\right) a.$$

Gleichheit gilt nur für

$$F(z) = e^{i\gamma} z^n \frac{(1 - \varrho e^{i\psi})z + \varrho(e^{i\psi} - \varrho)}{\varrho(e^{-i\psi} - \varrho)z + (1 - \varrho e^{-i\psi})}.$$

Aus Satz 2 folgert man ferner leicht, wie dies auch H. Unkelbach für den Fall $n = 1$ tut, die Ungleichungen

(15) $$D \geqq n + \frac{1 - \varrho}{1 + \varrho},$$

(16) $D \geqq n + \sin|\psi|$ für $|\psi| \leqq \frac{\pi}{2}$; $D \geqq n + 1$ für $\frac{\pi}{2} \leqq |\psi| \leqq \pi$.

Die zugehörigen Extremalfunktionen sind

(15′) $$F(z) = z^n \frac{z + \varrho}{1 + \varrho z},$$

(16′)
$$\begin{cases} F(z) = e^{i\psi} z^n \dfrac{z + i\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right)}{z\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right) + i} & \text{für } 0 \leqq \psi \leqq \frac{\pi}{2}, \\ F(z) = e^{i\psi} z^n \dfrac{z\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right) - i}{z - i\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right)} & \text{für } -\frac{\pi}{2} \leqq \psi \leqq 0, \\ F(z) = z^{n+1} & \text{für } \frac{\pi}{2} \leqq |\psi| \leqq \pi. \end{cases}$$

---

[8]) H. Unkelbach, Über die Randverzerrung bei konformer Abbildung. Math. Zeitschr. **43** (1938), S. 739–742.

[9]) Vgl. L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie II, (2. Aufl., Teubner, 1931) S. 121.

Es liegt der Versuch nahe, für Funktionen der Klasse $\mathfrak{S}$, die die gleiche endliche Winkelderivierte besitzen, weitere gemeinsame Eigenschaften aufzusuchen. Da indes das Übereinstimmen der Winkelderivierten zweier Funktionen $F(z)$ damit gleichwertig ist, daß die ihnen zugeordneten Funktionen $\alpha(\vartheta)$ an der Stelle $\vartheta = 0$ denselben Sprung aufweisen, erkennt man sogleich die Notwendigkeit zusätzlicher Voraussetzungen, will man nähere Aussagen gewinnen. In dieser Richtung gilt der folgende

Satz 3. *Sind $F_1(z)$, $F_2(z)$ zwei Funktionen der Klasse $\mathfrak{S}$, für die in $|z| < 1$*

$$|F_1(z)| \leqq |F_2(z)|$$

gilt, besitzt ferner $F_1(z)$ eine endliche Winkelderivierte D_1, so ist auch die Winkelderivierte D_2 von $F_2(z)$ endlich, sofern nur für eine in Δ gegen 1 strebende Punktfolge z_n die Beziehung $\lim_{n \to \infty} F_2(z_n) = 1$ gilt. Ferner ist

$$D_2 \leqq D_1,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur steht, wenn die beiden Funktionen identisch sind.

Wegen $|F_1(z)| \leqq |F_2(z)|$ in $|z| < 1$ ist

$$1 - |F_2(r)| \leqq 1 - |F_1(r)| < (D_1 + \varepsilon)\ (1 - r)$$

für $r > 1 - \eta$, wobei man $z = re^{i\varphi}$ zu setzen hat [10]). Also ist der Grenzwert

$$\lim_{r \to 1} \inf \frac{1 - |F_2(r)|}{1 - r}$$

endlich. Hieraus folgt aber bereits [11]) wegen

$$\lim_{n \to \infty} F_2(z_n) = 1 \qquad \text{für } z_n \to 1 \text{ in } \Delta$$

die Endlichkeit von D_2. Außerdem gehört die Funktion

$$F(z) = \frac{F_1(z)}{F_2(z)}$$

---

[10]) Wegen $\lim_{r \to 1} \frac{1 - F_1(r)}{1 - r} = D_1$ ist nämlich

$$\lim_{r \to 1} (1 - r)\, u_1(r) = \lim_{r \to 1} (1 - r) \frac{1 - |F_1(r)|^2}{|1 - F_1(r)|^2} = \frac{2}{D_1},$$

woraus

$$\lim_{r \to 1} \frac{1 - |F_1(r)|}{1 - r} = D_1$$

folgt, da D_1 endlich ist und als von Null verschieden angenommen werden kann. Für $D_1 = 0$ ist offenbar nichts zu beweisen.

[11]) Vgl. die in [1]) angegebene Arbeit von C. Carathéodory, S. 46.

zur Klasse $\mathfrak{S}$; denn an Stellen z_r mit $|z_r| < 1$, in denen $F_2(z)$ verschwindet, hat auch $F_1(z)$ Nullstellen von nicht kleineren Ordnungen. Dann existiert aber der Grenzwert

$$D = \lim_{z \to 1} \frac{F(z) - 1}{z - 1}.$$

Nun ist

$$\frac{F(z) - 1}{z - 1} = \frac{1}{F_2(z)} \left(\frac{F_1(z) - 1}{z - 1} - \frac{F_2(z) - 1}{z - 1} \right).$$

Da D_2 endlich ist, ist $\lim_{z \to 1} F_2(z) = 1$ und demnach

$$D = D_1 - D_2.$$

Nach Satz I ist D nichtnegativ und daher $D_2 \leqq D_1$, worin Gleichheit nur für $F(z) \equiv 1$, d. h. $F_1(z) \equiv F_2(z)$ eintritt.

II. Abschnitt. Das Poisson-Stieltjes-Integral.

Aus der Poisson-Stieltjesschen Integraldarstellung lassen sich eine Reihe von Folgerungen verschiedenster Richtung gewinnen; hiermit wollen wir uns in diesem Abschnitt beschäftigen.

Wir betrachten zunächst aus der Klasse $\mathfrak{S}$ nur die Funktionen $F(z)$, für die $F(0) = 0$ ist, was keine wesentliche Einschränkung bedeutet. Für die durch (5) der Funktion $F(z)$ zugeordnete Funktion $f(z)$ ist dann $f(0) = 1$, mithin in $|z| < 1$

$$f(z) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} \, d\alpha(\vartheta)$$

mit

$$\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha(\vartheta) = 1.$$

Andererseits gilt in $|z| < 1$ für $f(z)$ eine Potenzreihenentwicklung der Gestalt

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n.$$

Ferner konvergiert die in $|z| < 1$ geltende Entwicklung

$$\frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-in\vartheta} z^n$$

offenbar gleichmäßig in $|\vartheta| \leqq \pi$ bei festem z. Daher darf man gliedweise integrieren und erhält

$$a_n = 2 \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-in\vartheta} \, d\alpha(\vartheta) \qquad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{17}$$

woraus unmittelbar die Abschätzung

$$|a_n| \leqq 2 \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha(\vartheta) = 2 \qquad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots$$

hervorgeht. Wir wollen nun untersuchen, unter welchen Umständen hierin für ein gewisses n

$$|a_n| = 2$$

gelten kann. In diesem Falle ist

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-in\vartheta} d\alpha(\vartheta) = e^{i\gamma} \qquad (|\gamma| \leqq \pi),$$

also insbesondere

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(n\vartheta + \gamma) d\alpha(\vartheta) = 1$$

oder

$$\int_{-\pi}^{+\pi} [1 - \cos(n\vartheta + \gamma)] d\alpha(\vartheta) = 0.$$

Diese Gleichung hat zur Folge, daß sich $\alpha(\vartheta)$ auf eine Sprungfunktion reduziert, die nur an den Stellen, in denen der Integrand verschwindet. Sprünge aufweisen kann, im übrigen aber konstant ist. Nun ist doch in $|\vartheta| \leqq \pi$

$$1 - \cos(n\vartheta + \gamma) = 0$$

für

$$\vartheta = \vartheta_k = \begin{cases} \dfrac{(2k-n)\pi}{n} - \dfrac{\gamma}{n}, & \text{falls } n \text{ gerade, } \gamma \geqq 0, \\ \dfrac{(2k-(n+1))\pi}{n} - \dfrac{\gamma}{n}, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ \dfrac{(2k-(n+2))\pi}{n} - \dfrac{\gamma}{n}, & \text{falls } n \text{ gerade, } \gamma < 0, \end{cases}$$

wobei k die Werte $k = 1, 2, \ldots, n$ durchläuft. Setze ich noch

$$\alpha(\vartheta_k + 0) - \alpha(\vartheta_k - 0) = \mu_k$$

und

$$e^{i\vartheta_k} = e^{-i\frac{\gamma}{n}} \varepsilon_k,$$

wobei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ die n-ten Einheitswurzeln in gewisser Reihenfolge bezeichnen, so wird

$$(18) \qquad f(z) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \frac{\varepsilon_k + e^{i\frac{\gamma}{n}} z}{\varepsilon_k - e^{i\frac{\gamma}{n}} z} \text{ mit } \mu_k \geqq 0; \quad \sum_{k=1}^{n} \mu_k = 1.$$

Ferner wird nach (17)

$$a_m = 2 \sum_{k=1}^{n} \mu_k \frac{e^{im\frac{\gamma}{n}}}{\varepsilon_k^m},$$

insbesondere also für $m = qn$ $(q = 1, 2, 3, \ldots)$:

$$a_m = 2\, e^{i q \gamma},$$

was sich auch unmittelbar aus (18) entnehmen läßt. Somit gilt

Satz 4. *Ist*

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

eine in $|z| < 1$ *analytische Funktion mit positivem Realteil, so ist*

$$|a_n| \leqq 2 \qquad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Steht hierin für ein n *das Gleichheitszeichen, so ist*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \frac{\varepsilon_k + e^{i\frac{\gamma}{n}} z}{\varepsilon_k - e^{i\frac{\gamma}{n}} z} \quad \text{mit} \quad \mu_k \geqq 0, \sum_{k=1}^{n} \mu_k = 1,$$

wenn $a_n = 2\, e^{i\gamma}$ *gesetzt ist. Auf* $|z| = 1$ *gilt* $\Re(f(z)) = 0$.

Der Fall $n = 1$ führt, wie man sich leicht überlegt, wegen

$$a_1 = f'(0) = 2F'(0)$$

auf eine dem Schwarzschen Lemma gleichwertige Aussage.

Aus (18) folgt weiter für $F(z)$ wegen

$$f(z) - 1 = f(z) - \sum_{k=1}^{n} \mu_k = 2\, e^{i\frac{\gamma}{n}} z \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{\varepsilon_k - e^{i\frac{\gamma}{n}} z}$$

und

$$f(z) + 1 = 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k \varepsilon_k}{\varepsilon_k - e^{i\frac{\gamma}{n}} z}$$

die Darstellung

$$F(z) = e^{i\frac{\gamma}{n}} z \, \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{\varepsilon_k - e^{i\frac{\gamma}{n}} z}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k \varepsilon_k}{\varepsilon_k - e^{i\frac{\gamma}{n}} z}}.$$

Eine einfache Umformung liefert:

$$F(z) = e^{i\gamma} z \, \frac{z^{n-1} + c_1 z^{n-2} + \ldots + c_{n-2} z + c_{n-1}}{1 + c_1 z + \ldots + \bar{c}_{n-2} z^{n-2} + \bar{c}_{n-1} z^{n-1}} \tag{19}$$

mit

$$c_\nu = \sum_{k=1}^{n} \mu_k e^{i\nu\vartheta_k} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Wegen

$$1 + \bar{c}_1 z + \ldots + \bar{c}_{n-1} z^{n-1} = \tfrac{1}{2}(1 - e^{i\gamma} z^n)(f(z) + 1)$$

und $\Re(f(z)) = 0$ auf $|z| = 1$ verschwindet der Nenner von (19) in keinem Randpunkte des Einheitskreises. Die Gleichung $|a_n| = 2$ hat demnach zur Folge, daß $F(z)$ entweder eine rationale Funktion vom Grade n ist, die auf $|z| = 1$ stetige Randwerte vom Betrage 1 besitzt, oder sich sogar auf eine Drehung reduziert. Der zweite Fall tritt dann und nur dann ein, wenn $|c_{n-1}| = 1$ ist.

Bei der Herleitung des Satzes 4 erkannten wir, daß mit $|a_n| = 2$ auch $|a_{qn}| = 2$ für alle $q = 1, 2, 3, \ldots$ ist. Als Gegenstück beweisen wir nun den

Satz 5. *Ist bei sonst gleichen Voraussetzungen wie in Satz 4*

$$|a_r| = |a_s| = 2 \quad \textit{und} \quad (r, s) = 1.$$

so gilt $|a_n| = 2$ *für alle* $n = 1, 2, 3, \ldots$ *und*

$$F(z) = \varepsilon z \quad \textit{mit} \quad |\varepsilon| = 1.$$

Wegen der Teilerfremdheit von r und s sind diese Zahlen nicht beide gerade. Ist etwa r ungerade, so folgt aus $|a_r| = 2$ die Beziehung

$$\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha(\vartheta) = \sum_{\varrho=1}^{r} \mu_\varrho = 1 \quad \text{mit} \quad \mu_\varrho = \alpha(\vartheta_\varrho + 0) - \alpha(\vartheta_\varrho - 0) \geqq 0,$$

wobei

$$\vartheta_\varrho = \frac{(2\varrho - (r+1))\pi}{r} - \frac{\gamma'}{r} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r)$$

ist. Ebenso folgt aus $|a_s| = 2$:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha(\vartheta) = \sum_{\sigma=1}^{s} \mu_\sigma = 1 \quad \text{mit} \quad \mu_\sigma = \alpha(\vartheta_\sigma + 0) - \alpha(\vartheta_\sigma - 0) \geqq 0$$

und

$$\vartheta_\sigma = \frac{(2\sigma - (s+\lambda))\pi}{s} - \frac{\delta}{s} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, s);$$

dabei soll $\lambda = 0, 1, 2$ sein nach der schon früher angegebenen Fallunterscheidung. Nun muß es offenbar ein Indizespaar ϱ, σ geben, für das $\vartheta_\varrho = \vartheta_\sigma$, also

$$\frac{(2\varrho - (r+1))\pi}{r} - \frac{\gamma'}{r} = \frac{(2\sigma - (s+\lambda))\pi}{s} - \frac{\delta}{s}$$

ist. Ist ϱ', σ' ein weiteres Paar, für das gleichfalls

$$\frac{(2\varrho' - (r+1))\pi}{r} - \frac{\gamma'}{r} = \frac{(2\sigma' - (s+\lambda))\pi}{s} - \frac{\delta}{s}$$

ist, so zeigt die Gleichung

$$\frac{\varrho' - \varrho}{r} = \frac{\sigma' - \sigma}{s},$$

daß dies wegen $(r, s) = 1$ nur für $\varrho' = \varrho$, $\sigma' = \sigma$ eintreten kann. Daher ist $\alpha(\vartheta)$ eine Sprungfunktion, die allein an dieser Stelle $\vartheta_\varrho = \vartheta_\sigma$ einen Sprung aufweist, der dann notwendig die Größe 1 besitzt. Daraus folgt

$$f(z) = \frac{e^{i\vartheta_\varrho} + z}{e^{i\vartheta_\varrho} - z},$$

also

$$|a_n| = 2 \qquad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots$$

und

$$F(z) = \varepsilon z \quad \text{mit} \quad |\varepsilon| = 1.$$

Die bei Satz 4 angestellten Betrachtungen zeigen einen Zusammenhang zwischen dem Sprungcharakter von $\alpha(\vartheta)$ und der Darstellung (19) der Funktion $F(z)$, der durch die nachstehende Aussage vollständig geklärt wird:

Satz 6. *Dann und nur dann genügt die Funktion $F(z)$ den Voraussetzungen des Schwarzschen Lemmas und besitzt auf $|z| = 1$ stetige Randwerte vom Betrage 1, wenn $\alpha(\vartheta)$ eine reine Sprungfunktion mit der totalen Diskontinuität 1 ist.*

Es sei

$$-\pi < \vartheta_1 < \vartheta_2 < \ldots < \vartheta_n \leqq \pi \qquad (n \geqq 1),$$

$$\alpha(\vartheta_k + 0) - \alpha(\vartheta_k - 0) = \mu_k, \qquad \sum_{k=1}^{n} \mu_k = 1.$$

Dann ist

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \frac{e^{i\vartheta_k} + z}{e^{i\vartheta_k} - z},$$

mithin

$$\Re(f(z)) = 0 \quad \text{auf} \quad |z| = 1.$$

Daraus folgt, daß in $|z| < 1$ die Funktion $F(z)$ regulär, $|F(z)| < 1$ und $F(0) = 0$ ist, also $F(z)$ den Voraussetzungen des Schwarzschen Lemmas genügt, ferner daß $F(z)$ auf $|z| = 1$ stetige Randwerte vom Betrage 1 besitzt.

Genügt umgekehrt $F(z)$ den Voraussetzungen des Schwarzschen Lemmas, und ist auf dem Rande des Einheitskreises $|F(z)|$ stetig und $|F(z)| = 1$, so hat, wie das Schwarzsche Spiegelungsprinzip unmittelbar lehrt, $F(z)$ die Gestalt

$$F(z) = e^{i\gamma} z \frac{z^{n-1} + c_1 z^{n-2} + \ldots + c_{n-2} z + c_{n-1}}{1 + \bar{c}_1 z + \ldots + \bar{c}_{n-2} z^{n-2} + \bar{c}_{n-1} z^{n-1}}.$$

Insbesondere ist $F(z)$ auf $|z| = 1$ analytisch. Ferner ist $F(z_1) = 1$ nur für $|z_1| = 1$; ist etwa $F(e^{i\vartheta_1}) = 1$, so setze man

$$e^{-i\vartheta_1} z = \zeta, \quad F(z) = F(e^{i\vartheta_1}\zeta) = \Phi_1(\zeta).$$

Dann ist wegen $\Phi_1(1) = 1$ und wegen der Regularität von $\Phi_1(\zeta)$ in $\zeta = 1$:

$$\lim_{\zeta \to 1} \frac{\Phi_1(\zeta) - 1}{\zeta - 1} = \Phi_1'(1).$$

Nach Satz I folgt aber hieraus, da $\Phi(0) = 0$ ist,

$$\Phi_1'(1) \geqq 1 \quad \text{und} \quad F'(e^{i\vartheta_1}) = e^{-i\vartheta_1}\Phi'(1) \neq 0.$$

Mithin sind die 1-Stellen von $F(z)$ sämtlich einfach[12]). Sind

$$e^{i\vartheta_1},\ e^{i\vartheta_2},\ \ldots,\ e^{i\vartheta_n} \qquad (-\pi < \vartheta_1 < \vartheta_2 < \ldots < \vartheta_n \leqq \pi)$$

diese 1-Stellen, so besitzt $f(z)$ dort Pole erster Ordnung. Ferner ist für $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\lim_{z \to e^{i\vartheta_k}} (z - e^{i\vartheta_k}) f(z) = \lim_{z \to e^{i\vartheta_k}} (z - e^{i\vartheta_k}) \frac{1 + F(z)}{1 - F(z)}$$

$$= -\frac{2}{F'(e^{i\vartheta_k})} = -\frac{2\, e^{i\vartheta_k}}{\Phi_k'(1)},$$

wobei

$$\Phi_k(\zeta) = F(e^{i\vartheta_k}\zeta) = F(z)$$

gesetzt ist. Bezeichnet man mit μ_k den Wert

$$\mu_k = \frac{1}{\Phi_k'(1)},$$

so ist μ_k positiv auf Grund des Satzes I und wegen der Regularität der $\Phi_k(\zeta)$ in $\zeta = 1$. Das Residuum von $f(z)$ in $z = e^{i\vartheta_k}$ ist also $-2\mu_k e^{i\vartheta_k}$, weshalb

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \frac{e^{i\vartheta_k} + z}{e^{i\vartheta_k} - z} + C$$

gilt. Für die Konstante C ergibt sich hieraus wegen $F(0) = 0$, d. h. $f(0) = 1$, der Wert

$$C = 1 - \sum_{k=1}^{n} \mu_k.$$

[12]) Hierin ist, wie man leicht erkennt, folgender algebraischer Tatbestand enthalten: Die Nullstellen eines Polynoms der Gestalt $(a_0 - \bar{a}_n) z^n + (a_1 - a_{n-1}) z^{n-1} + \ldots + (a_n - a_0)$ liegen sämtlich auf $|z| = 1$ und sind einfach, wenn das Polynom $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ nur Nullstellen im Innern des Einheitskreises besitzt.

Da demnach C reell ist, gilt

$$\Re\,(f(z)) = C \quad \text{auf} \quad |z| = 1.$$

Andererseits ist $\Re\,(f(z)) = 0$ auf $|z| = 1$, da dort $|F(z)| = 1$ ist. Somit erhält man

$$C = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_{k=1}^{n} \mu_k = 1.$$

Für die Funktion $f(z)$ besteht nach Satz II die Darstellung

$$f(z) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z}\, d\alpha(\vartheta).$$

Aus

$$\lim_{z \to e^{i\vartheta_k}} (z - e^{i\vartheta_k}) f(z) = -2\mu_k e^{i\vartheta_k}$$

und aus der (sinngemäß übertragenen) Beziehung (8) folgt aber

$$\alpha(\vartheta_k + 0) - \alpha(\vartheta_k - 0) = \mu_k.$$

Ferner ist

$$f(0) = \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha(\vartheta) = 1 \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{n} \mu_k = 1.$$

Demnach ist $\alpha(\vartheta)$ eine reine Sprungfunktion mit der totalen Diskontinuität 1.

Bemerkt sei noch, daß wegen

$$a_m = 2 \sum_{k=1}^{n} \mu_k e^{-im\vartheta_k}$$

dann und nur dann $|a_m| = 2$ für ein festes m gilt, wenn es ein γ mit $|\gamma| \leqq \pi$ gibt, so daß die Zahlen $\vartheta_k + \frac{\gamma}{m}$ (für $k = 1, 2, \ldots, n$) ganzzahlige Vielfache von $\frac{2\pi}{m}$ sind. Denn ist $a_m = 2e^{i\gamma}$, so ist

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k e^{-im\left(\vartheta_k + \frac{\gamma}{m}\right)} = 1.$$

Daraus folgt offenbar

$$m\left(\vartheta_k + \frac{\gamma}{m}\right) = 2t_k\pi \quad \text{mit ganzen Zahlen } t_k,$$

d. h. die Notwendigkeit der obigen Bedingung. Die Umkehrung ist unmittelbar klar.

Faßt man das Poisson-Stieltjes-Integral

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z}\, d\alpha(\vartheta) + iv(0) = f(z) = \frac{1 + F(z)}{1 - F(z)} \quad (f(z) = u(z) + iv(z))$$

als Funktionaltransformation mit der Menge der in $|\vartheta| \leqq \pi$ monoton wachsenden Funktionen $\alpha(\vartheta)$ als Originalraum und der Menge der Funktionen $F(z)$ der Klasse $\mathfrak{S}$ [13]) als Bildraum auf, so ist die Gleichung

$$\alpha(\vartheta) = \lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\vartheta} u(r e^{i\varphi})\, d\varphi$$

ihre Umkehrung. Die Beziehung $D = \frac{1}{\mu}$ und der Satz 6 können unter diesem Gesichtspunkte als Aussagen über die Theorie dieser Funktionaltransformation angesehen werden. Die folgenden beiden Sätze sollen hierzu noch einen weiteren Beitrag liefern. Zunächst gilt

Satz 7. *Die Gleichung* $\alpha(-\vartheta) = -\alpha(\vartheta)$ *für* $|\vartheta| \leqq \pi$ *ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß* $F(\bar{z}) = \overline{F(z)}$ *in* $|z| < 1$ *ist, sofern nur* $F(0)$ *reell ist.*

Ist $\alpha(-\vartheta) = -\alpha(\vartheta)$ in $|\vartheta| \leqq \pi$, so gilt in $|z| < 1$

$$f(\bar{z}) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{i\vartheta} + \bar{z}}{e^{i\vartheta} - \bar{z}}\, d\alpha(\vartheta) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{-i\vartheta} + \bar{z}}{e^{-i\vartheta} - \bar{z}}\, d\alpha(\vartheta) = \overline{f(z)},$$

also $F(\bar{z}) = \overline{F(z)}$. Umgekehrt folgt aus $F(\bar{z}) = \overline{F(z)}$ auch $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$. Also ist $u(re^{-i\varphi}) = u(re^{i\varphi})$ für $|\varphi| \leqq \pi$, mithin

$$\alpha(r, -\vartheta) = -\alpha(r, \vartheta) \text{ für jedes } r < 1 \text{ und } |\vartheta| \leqq \pi.$$

Wegen $\alpha(\vartheta) = \lim_{r \to 1} \alpha(r, \vartheta)$ folgt daraus aber $\alpha(-\vartheta) = -\alpha(\vartheta)$.

Aus der Integraldarstellung von $f(z)$ erhält man unmittelbar für $|z| < 1$:

$$|f(z)| \leqq \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha(\vartheta) + |v(0)| < \frac{2u(0)}{1 - |z|} + |v(0)|.$$

Nach (7) ist

$$\frac{|1 - z|}{1 - |z|} < M \qquad \text{für } z \text{ in } \Delta.$$

Also ist

$$f(z) = O\left(\frac{1}{|1 - z|}\right) \qquad \text{für } z \to 1.$$

Im weiteren sei nun stets $\lim_{z \to 1} F(z) = 1$, der Fall, der allein von Interesse ist. Dann gilt

$$\frac{1}{1 - F(z)} = O\left(\frac{1}{|1 - z|}\right) \qquad \text{für } z \to 1,$$

[13]) Aus der Klasse $\mathfrak{S}$ sei jedoch die Funktion $F(z) \equiv 1$ weggelassen, deren zugeordnete Funktion $f(z)$, wie bereits früher erwähnt, keine Integraldarstellung zuläßt.

d. h.: $F(z)$ wird 1 von höchstens erster Ordnung. Ist $\alpha(0+) - \alpha(0-) = \mu$ positiv, so wird wegen $D = \frac{1}{\mu}$ die Funktion $F(z)$ genau von erster Ordnung gleich 1, wenn z in Winkelannäherung gegen 1 strebt. Ist $\mu = 0$, also $\alpha(\vartheta)$ in $\vartheta = 0$ stetig, so ist

$$\frac{1}{1 - F(z)} = o\left(\frac{1}{1-z}\right) \qquad \text{für } z \to 1.$$

Es liegt nun nahe, die Güte der Stetigkeit von $\alpha(\vartheta)$ in $\vartheta = 0$ mit dem Wachstum von $\frac{1}{1 - F(z)}$ bei Winkelannäherung an $z = 1$ in Verbindung zu bringen. Hierüber gibt Auskunft der

Satz 8. *Ist $\alpha(\vartheta)$ für $\vartheta = 0$ Hölder-stetig mit dem Exponenten $1 - \lambda$ $(0 < \lambda < 1)$, d. h. ist*

$$\alpha(\vartheta) = O(|\vartheta|^{1-\lambda}) \qquad \text{für } \vartheta \to 0,$$

so ist

$$\frac{1}{1 - F(z)} = O\left(\frac{1}{|1-z|^{\lambda}}\right) \qquad \text{für } z \to 1.$$

Wegen (7) ist für z in Δ mit $z = r e^{i\varphi}$:

$$\frac{1}{1-r} = O\left(\frac{1}{|1-z|}\right),$$

weshalb es genügt,

$$\frac{1}{1 - F(z)} = O\left(\frac{1}{(1-r)^{\lambda}}\right) \qquad \text{für } z \to 1$$

zu beweisen. Zunächst behandle ich den Sonderfall, daß z auf der reellen Achse gegen 1 strebt. Es sei

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{i\vartheta} + r}{e^{i\vartheta} - r} d\alpha(\vartheta) = \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{+\delta} + \int_{\delta}^{\pi},$$

wobei $\delta > 0$ noch näher bestimmt werden wird. Nun ist

$$\left| (1-r)^{\lambda} \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{e^{i\vartheta} + r}{e^{i\vartheta} - r} d\alpha(\vartheta) \right| < \frac{2}{(1-r)^{1-\lambda}} \int_{-\delta}^{+\delta} d\alpha(\vartheta) \quad \text{für } r < 1.$$

Auf Grund der Hölder-Stetigkeit von $\alpha(\vartheta)$ gibt es ferner ein ϑ_0 mit $0 < \vartheta_0 < \pi$, so daß für $|\vartheta| \leqq \vartheta_0$

$$|\alpha(\vartheta)| < C\,|\vartheta|^{1-\lambda}$$

ist. Wählt man $\delta = 1 - r$, so ist $\delta < \vartheta_0$ für $r > 1 - \vartheta_0$, also

$$\left| (1-r)^{\lambda} \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{e^{i\vartheta} + r}{e^{i\vartheta} - r} d\alpha(\vartheta) \right| < \frac{2}{(1-r)^{1-\lambda}} 2C(1-r)^{1-\lambda} = 4C,$$

d. h.

$$\int_{-\delta}^{+\delta} \frac{e^{i\vartheta}+r}{e^{i\vartheta}-r}\,d\alpha(\vartheta) = O\Big(\frac{1}{(1-r)^{\lambda}}\Big) \qquad \text{für } r \to 1.$$

Ferner ist

$$\int_{\delta}^{\pi} = \int_{1-r}^{\pi} = \int_{1-r}^{\vartheta_0} + \int_{\vartheta_0}^{\pi}.$$

Es genügt, eine Abschätzung für das erste der beiden rechts stehenden Integrale anzugeben, da wir bereits beim Beweis von Satz I die Beziehung

$$\int_{\vartheta_0}^{\pi} \frac{e^{i\vartheta}+r}{e^{i\vartheta}-r}\,d\alpha(\vartheta) = O(1) \qquad \text{für } r \to 1$$

erkannt haben. Zu diesem Zweck setze ich

$$n = \Big\langle \frac{\vartheta_0}{1-r} \Big\rangle,$$

wenn $g = \langle a \rangle$ die kleinste ganze Zahl $g \geqq a$ bezeichnet. Es ist also

$$\frac{\vartheta_0}{1-r} \leqq n < \frac{\vartheta_0}{1-r} + 1.$$

Dann wird

$$\Big|(1-r)^{\lambda} \int_{1-r}^{\vartheta_0} \frac{e^{i\vartheta}+r}{e^{i\vartheta}-r}\,d\alpha(\vartheta)\Big|$$

$$\leqq (1-r)^{\lambda} \int_{1-r}^{\vartheta_0} \Big|\frac{e^{i\vartheta}+r}{e^{i\vartheta}-r}\Big|\,d\alpha(\vartheta) \leqq (1-r)^{\lambda} \int_{1-r}^{n(1-r)} \Big|\frac{e^{i\vartheta}+r}{e^{i\vartheta}-r}\Big|\,d\alpha(\vartheta)$$

$$< 2(1-r)^{\lambda} \sum_{\nu=2}^{n} \int_{(\nu-1)(1-r)}^{\nu(1-r)} \frac{d\alpha(\vartheta)}{|e^{i\vartheta}-r|}.$$

Nun ist

$$(1-r)^{\lambda} \int_{(\nu-1)(1-r)}^{\nu(1-r)} \frac{d\alpha(\vartheta)}{|e^{i\vartheta}-r|}$$

$$\leqq \frac{1}{(1-r)^{1-\lambda}} \frac{1-r}{|e^{i(\nu-1)(1-r)}-r|} \big[\alpha(\nu(1-r)) - \alpha((\nu-1)(1-r))\big].$$

Für $1 \leqq \nu \leqq n-1$ gilt aber, wie ich zeigen will:

$$\frac{1-r}{|e^{i\nu(1-r)}-r|} < c\,\frac{1}{\nu}.$$

Denn es ist

$$|e^{i\nu(1-r)}-r|^2 = 1 + r^2 - 2r\cos\nu(1-r) = (1-r)^2 + 2r(1-\cos\nu(1-r)),$$

also

$$\frac{|e^{i\nu(1-r)}-r|^2}{\nu^2(1-r)^2}=\frac{1}{\nu^2}+2r\frac{1-\cos\nu(1-r)}{\nu^2(1-r)^2}.$$

Da nun

$$0<\nu(1-r)\leqq(n-1)(1-r)<\vartheta_0<\pi$$

und für $0<x<\pi$

$$\frac{1-\cos x}{x^2}>\frac{2}{\pi^2}=\frac{1}{c^2}$$

gilt, folgt weiter

$$\frac{|e^{i\nu(1-r)}-r|^2}{\nu^2(1-r)^2}>\frac{1}{c^2} \qquad \text{für } r>\frac{1}{2},$$

d. h.

$$\frac{1-r}{|e^{i\nu(1-r)}-r|}<c\,\frac{1}{\nu}$$

mit einer von ν unabhängigen positiven Konstanten c. Daher wird:

$$\left|(1-r)^\lambda\int_{1-r}^{\vartheta_0}\frac{e^{i\vartheta}+r}{e^{i\vartheta}-r}\,d\alpha(\vartheta)\right|$$

$$<\frac{2c}{(1-r)^{1-\lambda}}\sum_{\nu=2}^{n}\frac{1}{\nu-1}\left[\alpha(\nu(1-r))-\alpha((\nu-1)(1-r))\right]$$

$$=\frac{2c}{(1-r)^{1-\lambda}}\left\{\sum_{\nu=2}^{n-1}\frac{1}{\nu(\nu-1)}\,\alpha(\nu(1-r))+\frac{1}{n-1}\,\alpha(n(1-r))-\alpha(1-r)\right\}$$

$$<\frac{2c}{(1-r)^{1-\lambda}}\left\{C(1-r)^{1-\lambda}\sum_{\nu=2}^{n-1}\frac{1}{\nu^\lambda(\nu-1)}+\frac{\alpha(\pi)}{n-1}\right\}$$

$$<C_1\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{1+\lambda}}+\frac{2c\,\alpha(\pi)}{(1-r)^{1-\lambda}(n-1)}=C_2+\frac{C_3}{(1-r)^{1-\lambda}(n-1)},$$

da $\nu(1-r)\leqq(n-1)(1-r)<\vartheta_0$ und $\lambda>0$ ist. Aus

$$n-1\geqq\frac{\vartheta_0}{1-r}-1=\frac{\vartheta_0-(1-r)}{1-r}$$

folgt aber

$$\frac{C_3}{(1-r)^{1-\lambda}(n-1)}=o(1) \qquad \text{für } r\to 1,$$

mithin

$$(1-r)^\lambda\int_{1-r}^{\vartheta_0}\frac{e^{i\vartheta}+r}{e^{i\vartheta}-r}\,d\alpha(\vartheta)=O(1) \qquad \text{für } r\to 1.$$

Dies zusammen mit

$$(1-r)^{\lambda}\int_{\vartheta_0}^{\pi}\frac{e^{i\vartheta}+r}{e^{i\vartheta}-r}\,d\alpha(\vartheta)=o(1)\qquad\text{für } r\to 1$$

liefert

$$\int_{1-r}^{\pi}\frac{e^{i\vartheta}+r}{e^{i\vartheta}-r}\,d\alpha(\vartheta)=O\Big(\frac{1}{(1-r)^{\lambda}}\Big)\qquad\text{für } r\to 1.$$

Ganz ähnlich zeigt man

$$\int_{-\pi}^{-(1-r)}\frac{e^{i\vartheta}+r}{e^{i\vartheta}-r}\,d\alpha(\vartheta)=O\Big(\frac{1}{(1-r)^{\lambda}}\Big)\qquad\text{für } r\to 1,$$

woraus sich schließlich

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{e^{i\vartheta}+r}{e^{i\vartheta}-r}\,d\alpha(\vartheta)+iv(0)=f(r)=O\Big(\frac{1}{(1-r)^{\lambda}}\Big)\qquad\text{für } r\to 1$$

ergibt.

Der Fall beliebiger Winkelannäherung erledigt sich nun in folgender Weise: Aus (7) erkennt man leicht

$$\varphi=O(1-r)\qquad\text{für } z=re^{i\varphi}\text{ in }\Delta.$$

Also gibt es eine positive ganze Zahl N, so daß

$$|\varphi|<N(1-r)\qquad\text{für } z\text{ in }\Delta$$

ist. Man setze nun

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\,d\alpha(\vartheta)=\int_{-\pi}^{-(N+1)(1-r)}+\int_{-(N+1)(1-r)}^{(N+1)(1-r)}+\int_{(N+1)(1-r)}^{\pi}.$$

Wenn r hinreichend nahe bei 1 liegt, so ist sicher

$$(N+1)(1-r)<(n-1)(1-r)=\Big(\Big\langle\frac{\vartheta_0}{1-r}\Big\rangle-1\Big)(1-r)<\vartheta_0.$$

Dann gilt aber

$$\Big|(1-r)^{\lambda}\int_{-(N+1)(1-r)}^{(N+1)(1-r)}\frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\,d\alpha(\vartheta)\Big|$$
$$<\frac{2}{(1-r)^{1-\lambda}}2C(N+1)^{1-\lambda}(1-r)^{1-\lambda}=C_4.$$

Weiterhin ist, wie der Beweis des Satzes I zeigt,

$$\int_{\vartheta_0}^{\pi}\frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\,d\alpha(\vartheta)=O(1)\qquad\text{für } z\to 1,$$

mithin

$$(1-r)^{\lambda}\int_{\vartheta_0}^{\pi}\frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\,d\alpha(\vartheta)=o(1)\qquad\text{für } z\to 1.$$

Ferner ist

$$\left|(1-r)^{\lambda}\int_{(N+1)(1-r)}^{\vartheta_0}\frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\,d\alpha(\vartheta)\right|<2(1-r)^{\lambda}\sum_{\nu=N+2}^{n}\int_{(\nu-1)(1-r)}^{\nu(1-r)}\frac{d\alpha(\vartheta)}{|e^{i\vartheta}-z|}.$$

Wegen

$$(\nu-1)(1-r)\geqq(N+1)(1-r)>|\varphi|\qquad\text{für } z \text{ in } \Delta$$

und

$$\nu(1-r)\leqq n(1-r)<\vartheta_0+(1-r)\leqq\pi-|\varphi|$$

für hinreichend nahe bei 1 gelegenem r gilt für z in Δ in allen Integralen der voranstehenden Summe

$$|\varphi|<\vartheta<\pi-|\varphi|\quad\text{oder}\quad 0<\vartheta-\varphi<\pi.$$

Daher ist

$$|e^{i\vartheta}-z|=\sqrt{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\varphi)}$$

im Intervall $(N+1)(1-r)\leqq\vartheta\leqq n(1-r)$ eine monoton wachsende Funktion von ϑ, also

$$\operatorname*{Min}_{(\nu-1)(1-r)\leqq\vartheta\leqq\nu(1-r)}|e^{i\vartheta}-z|=|e^{i(\nu-1)(1-r)}-z|$$

für $\nu=N+2,\ldots,n$ und z in Δ.

Folglich ist

$$\left|(1-r)^{\lambda}\int_{(N+1)(1-r)}^{\vartheta_0}\frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\,d\alpha(\vartheta)\right|$$

$$<\frac{2}{(1-r)^{1-\lambda}}\sum_{\nu=N+2}^{n}\frac{1-r}{|e^{i(\nu-1)(1-r)}-z|}\int_{(\nu-1)(1-r)}^{\nu(1-r)}d\alpha(\vartheta).$$

Nun gilt aber

$$\frac{|e^{i\nu(1-r)}-z|^2}{\nu^2(1-r)^2}=\frac{1}{\nu^2}+2r\frac{1-\cos[\nu(1-r)-\varphi]}{\nu^2(1-r)^2},$$

weiter für $\nu=N+1,\ldots,n-1$ und z in Δ

$$\nu(1-r)-\varphi\geqq\nu(1-r)-|\varphi|>\nu(1-r)-N(1-r)=(\nu-N)(1-r)>0$$

und mit passendem positivem η

$$\nu(1-r)-\varphi\leqq(n-1)(1-r)-\varphi<\vartheta_0-\varphi<\pi\quad\text{für } r>1-\eta,$$

mithin

$$\cos[\nu(1-r)-\varphi] < \cos[(\nu-N)(1-r)],$$

also

$$\frac{|e^{i\nu(1-r)}-z|^2}{\nu^2(1-r)^2} > 2r\frac{1-\cos[(\nu-N)(1-r)]}{(\nu-N)^2(1-r)^2}\frac{(\nu-N)^2}{\nu^2} > 2r\frac{2}{\pi^2}\left(\frac{1}{N+1}\right)^2 > \frac{1}{c_1^2}$$

und daher für z in Δ und $r > 1-\eta$

$$\frac{1-r}{|e^{i\nu(1-r)}-z|} < c_1\frac{1}{\nu} \quad \text{für } \nu = N+1, \ldots, n-1$$

mit einer von ν unabhängigen Konstanten c_1. Infolgedessen ist

$$(1-r)^\lambda \int_{(N+1)(1-r)}^{\vartheta_0} \frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\,d\alpha(\vartheta)\Big| < \frac{2c_1}{(1-r)^{1-\lambda}} \sum_{\nu=N+2}^{n} \frac{1}{\nu-1} \int_{(\nu-1)(1-r)}^{\nu(1-r)} d\alpha(\vartheta).$$

Da aber im ersten Teil des Beweises die Beschränktheit der rechten Seite dieser Ungleichung für $r \to 1$ nachgewiesen ist. erhalten wir hieraus

$$\int_{(N+1)(1-r)}^{\pi} \frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\,d\alpha(\vartheta) = O\left(\frac{1}{(1-r)^\lambda}\right) \quad \text{für } z \to 1.$$

Auf dieselbe Weise folgt

$$\int_{-(N+1)(1-r)}^{-\pi} \frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\,d\alpha(\vartheta) = O\left(\frac{1}{(1-r)^\lambda}\right) \quad \text{für } z \to 1$$

und damit

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\,d\alpha(\vartheta) + iv(0) = f(z) = O\left(\frac{1}{(1-r)^\lambda}\right) \quad \text{für } z \to 1.$$

Wegen

$$f(z) = \frac{1+F(z)}{1-F(z)}$$

ist daher

$$\frac{1}{1-F(z)} = O\left(\frac{1}{|1-z|^\lambda}\right) \quad \text{für } z \to 1.$$

Damit ist Satz 8 vollständig bewiesen.

Hiervon wollen wir noch abschließend eine Anwendung machen: Es sei $u(\vartheta)$ eine in $|\vartheta| \leqq \pi$ nach unten beschränkte Funktion, für die das (im Lebesgueschen Sinne genommene) Integral

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |u(\vartheta)|\,d\vartheta$$

existiert. Dann ist bekanntlich

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} u(\vartheta) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\vartheta - \varphi)} d\vartheta \qquad (z = r e^{i\varphi})$$

eine in $|z| < 1$ reguläre Potentialfunktion. Ferner gelte in $|\vartheta| \leqq \vartheta_0 < \pi$

$$|u(\vartheta)| < C \frac{1}{|\vartheta|^\lambda} \quad \text{mit } 0 < \lambda < 1.$$

Setzen wir zunächst $u(\vartheta)$ in $|\vartheta| \leqq \pi$ als nichtnegativ voraus, so ist

$$\alpha(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\vartheta} u(\varphi)\, d\varphi \quad \text{in } \langle -\pi, +\pi \rangle$$

monoton wachsend und

$$|\alpha(\vartheta)| < C_1 |\vartheta|^{1-\lambda} \text{ in } |\vartheta| \leqq \vartheta_0.$$

Weiter ist wegen der Integrabilität von $u(\vartheta)$:

$$u(z) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\vartheta - \varphi)} d\alpha(\vartheta).$$

Setzt man noch

$$f(z) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} d\alpha(\vartheta),$$

so ist nach Satz 8:

$$f(z) = O\left(\frac{1}{(1-r)^\lambda}\right) \qquad \text{für } z \to 1.$$

Mithin ist auch

$$u(z) = \Re(f(z)) = O\left(\frac{1}{(1-r)^\lambda}\right) \qquad \text{für } z \to 1.$$

Ist indes allgemeiner

$$u(\vartheta) \geqq -G \qquad \text{in } |\vartheta| \leqq \pi$$

mit einem positiven G, so betrachte ich die im gleichen Intervall nichtnegative Funktion

$$u_1(\vartheta) = u(\vartheta) + G.$$

Für diese Funktion existiert gleichfalls das Integral $\int_{-\pi}^{+\pi} u_1(\vartheta)\, d\vartheta$ und gilt die

Beziehung $u_1(\vartheta) < C' |\vartheta|^{-\lambda}$ in $|\vartheta| \leqq \vartheta_0$ mit einer geeigneten Konstanten C'. Nun ist aber

$$u_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} u_1(\vartheta) \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\varphi)} d\vartheta = u(z) + G.$$

Nach dem eben Bewiesenen ist für die Funktion $u_1(z)$:

$$u_1(z) = O\left(\frac{1}{(1-r)^\lambda}\right) \qquad \text{für } z \to 1,$$

mithin auch

$$u(z) = O\left(\frac{1}{(1-r)^\lambda}\right) \qquad \text{für } z \to 1.$$

Also gilt der

Satz 9. *Ist die Funktion $u(\vartheta)$ in $|\vartheta| \leqq \pi$ nach unten beschränkt und daselbst im Lebesgueschen Sinne absolut integrierbar, ist ferner in $|\vartheta| \leqq \vartheta_0 < \pi$*

$$|u(\vartheta)| < C \frac{1}{|\vartheta|^\lambda} \quad \textit{mit } 0 < \lambda < 1,$$

so ist für $z = r e^{i\varphi}$

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} u(\vartheta) \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\varphi)} d\vartheta = O\left(\frac{1}{(1-r)^\lambda}\right),$$

wenn z in Winkelannäherung gegen 1 strebt.

(Eingegangen am 17. Oktober 1939.)

Zur Frage der Umkehrung des C- und A-Verfahrens bei Doppelfolgen.

Von

Werner Meyer-König in Stuttgart.

Vor kurzem hat K. Knopp in dieser Zeitschrift Limitierungs-Umkehrsätze für Doppelfolgen untersucht und als Sonderfall eines allgemeineren Satzes unter anderem den folgenden Satz bewiesen [1]):

Ist $\sum a_{\mu\nu}$ eine reelle unendliche Doppelreihe mit den arithmetischen Mitteln $\sigma_{\mu\nu}$ ihrer Teilsummen $s_{\mu\nu}$, ist ferner mit einer geeigneten positiven Konstanten M für alle $(\mu, \nu) \neq (0,0)$

$$a_{\mu\nu} < \frac{M}{\mu^2 + \nu^2}, \tag{1}$$

so folgt aus $\sigma_{\mu\nu} \to s$, daß $s_{\mu\nu} \to s$ strebt.

Offen blieb die Frage, ob dieser Satz falsch wird, wenn (1) durch die weniger fordernde Bedingung

$$a_{\mu\nu} < \frac{M}{\mu\nu} \tag{2}$$

ersetzt wird. Hardy und Littlewood hatten in ihrer in Fußnote 1 genannten Arbeit für das A-Verfahren schon die Vermutung ausgesprochen, daß sogar $a_{\mu\nu} = o\left(\frac{1}{\mu\nu}\right)$ keine Konvergenzbedingung sei. Im folgenden soll gezeigt

[1]) K. Knopp, Limitierungs-Umkehrsätze für Doppelfolgen, Math. Zeitschr. **45** (1939), S. 573—589, besonders S. 581, Satz 3 und unten. — Herr Knopp bittet mich, bei dieser Gelegenheit noch mitzuteilen, daß außer in den von ihm in der Einleitung genannten noch in weiteren Arbeiten schon Limitierungs-Umkehrsätze für Doppelfolgen bewiesen worden sind. — So hat W. H. Young [Proc. London Math. Soc. (2) **11** (1912), S. 133—184] wohl als erster einen o-Umkehrsatz für das C_1-Verfahren bewiesen und G. H. Hardy und J. E. Littlewood (ebenda, S. 411—478) einen o-Umkehrsatz für das A-Verfahren. — Ferner hat M. Fujiwara [Tôhoku Math. Journ. **15** (1919), S. 323—329] den O-$C_1 \to K$-Satz „Aus $\sigma_{\mu\nu} \to s$ und $\mu t_{\mu\nu} < M$ und $\nu t'_{\mu\nu} < M$ folgt $s_{\mu\nu} \to s$“ bewiesen, der, wie man sofort erkennt, als Sonderfall in dem Knoppschen Satz 2 enthalten ist. Auch hat Fujiwara von seinem Satz einen Sonderfall hervorgehoben, der mit dem Knoppschen Satz 3 gleichbedeutend ist. Weiter hat Fujiwara [Tôhoku Science Report **8** (1919), S. 43—50] auch einen O-$A \to K$-Satz bewiesen, und zwar auf dem Wege, der von Hardy und Littlewood a. a. O. als „in all probability exceedingly troublesome“ bezeichnet worden war. Dieser Satz enthält den von Knopp mit den Karamataschen Methoden bewiesenen Satz 5. — Schließlich hat Sh. Izumi [Tôhoku Math. Journ. **33** (1930), S. 117—126] einen Satz bewiesen, der mit dem Knoppschen Satz 2 äquivalent ist, da sich die Äquivalenz der in den beiden Sätzen benutzten Konvergenzbedingungen erweisen läßt.

werden, daß dies nicht einmal beim C_1-Verfahren der Fall ist und daß also auch die Knoppsche Frage zu bejahen ist:

Es gibt eine divergente Doppelreihe $\sum a_{\mu\nu}$, die der Bedingung

$$a_{\mu\nu} = o\left(\frac{1}{\mu\nu}\right) \tag{3}$$

genügt[2]) *und C_1-summierbar ist.*

In dem zum Beweis gegebenen Beispiel wird $s_{\mu\nu}$ beschränkt sein, was wegen der C_1-Limitierbarkeit die A-Limitierbarkeit zur Folge hat. Daraus ergibt sich, daß (3) auch keine Konvergenzbedingung des A-Verfahrens ist.

Konstruktion des Beispiels. Die Indizes μ und ν sollen von (1, 1) an laufen. Dann ist

$$s_{\mu\nu} = \sum_{m=1,\,n=1}^{\mu,\,\nu} a_{mn}, \qquad \sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu\nu} \sum_{m=1,\,n=1}^{\mu,\,\nu} s_{mn}.$$

k_p ($p = 1, 2, \ldots$) sei eine monoton wachsende Nummernfolge, von der vorerst nur vorausgesetzt sei:

$$k_{p+1} > k_p + 2\bar{k}_p, \tag{4}$$

$$2k_p > k_p + 2\bar{k}_p, \tag{5}$$

wobei

$$\bar{k}_p = \left[\frac{k_p}{\log\log k_p}\right] \tag{6}$$

gesetzt ist. Ich definiere die symmetrische Matrix $(a_{\mu\nu})$ durch die Forderung $a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$ und die für $\mu \leqq \nu$ gültige Festsetzung[3])

$$a_{\mu\nu} = \begin{cases} +\dfrac{1}{k_p \mu \log \mu} & \text{für } \begin{cases} 1 \leqq \mu \leqq k_p \\ k_p + 1 \leqq \nu \leqq k_p + \bar{k}_p \end{cases} \\ -\dfrac{1}{k_p \mu \log \mu} & \text{für } \begin{cases} 1 \leqq \mu \leqq k_p \\ k_p + \bar{k}_p + 1 \leqq \nu \leqq k_p + 2k_p \end{cases} \\ 0 \qquad \text{sonst.} \end{cases} \tag{7}$$

In der Figur sind die Gebiete mit $a_{\mu\nu} \neq 0$ schraffiert. In ihnen ist wegen (5) für $\mu \leqq \nu$

$$|a_{\mu\nu}| = \frac{2}{2k_p \mu \log \mu} < \frac{2}{\nu \mu \log \mu}.$$

Also ist (3) erfüllt. Die Summe der Glieder in einem schraffierten Rechteck ist 0; die Summe der absoluten Beträge in einem solchen ist

$$\frac{2\bar{k}_p}{k_p}\left(1 + \frac{1}{2\log 2} + \ldots + \frac{1}{\bar{k}_p \log k_p}\right) < A$$

für eine geeignete Konstante A.

---

[2]) D. h. die Doppelfolge $\mu\nu a_{\mu\nu}$ ist beschränkt und strebt gegen 0.

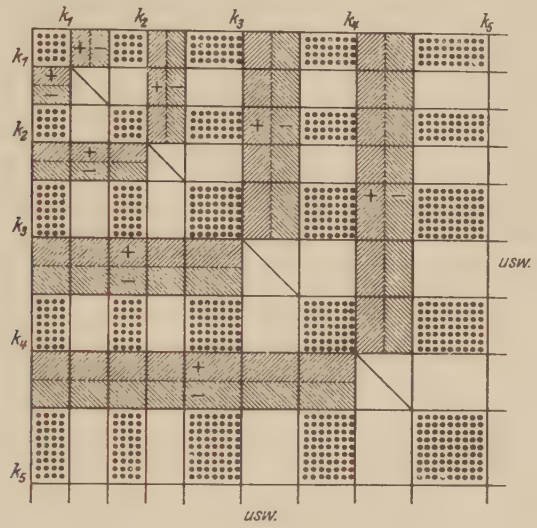
[3]) Hier und im folgenden soll $\log \mu$ für $\mu = 1$ durch 1 ersetzt werden.

Nun betrachte ich die Matrix $(s_{\mu\nu})$. $s_{\mu\nu}$ ist gewiß 0 in den punktierten Gebieten. Weiter ist überall

$$0 \leqq s_{\mu\nu} < B,$$

etwa mit $B = 2A$. Schließlich ist $s_{\mu\nu}$ divergent, denn einerseits stehen in der Hauptdiagonale immer wieder verschwindende Glieder, andererseits ist für $p \to \infty$

$$s_{k_p + \bar{k}_p,\, k_p + \bar{k}_p} = \frac{2\bar{k}_p}{k_p}\left(1 + \frac{1}{2\log 2} + \cdots + \frac{1}{k_p \log k_p}\right) \simeq 2.$$



Zur Matrix $(a_{\mu\nu})$ bzw. $(s_{\mu\nu})$.

Jetzt verlange ich von k_p noch, daß

$$\frac{\bar{k}_1 + \bar{k}_2 + \cdots + \bar{k}_p}{k_p} \to 0 \tag{8}$$

strebt für $p \to \infty$, und zwar monoton. Wegen $\frac{\bar{k}_p}{k_p} \to 0$ für $k_p \to \infty$ ist eine solche Wahl von k_p möglich, indem ich etwa sukzessiv zu den schon gewählten Nummern $k_1, k_2, \ldots, k_{p-1}$ die neue Nummer k_p so hinzuwähle, daß außer (4) und (5)

$$\max\left(\frac{\bar{k}_1 + \cdots + \bar{k}_{p-1}}{k_p}, \frac{\bar{k}_p}{k_p}\right) < \frac{\bar{k}_1 + \cdots + \bar{k}_{p-1}}{4\,k_{p-1}}$$

ist[4]). Ich will nun zeigen:

$$0 \leqq \sigma_{\mu\nu} \to 0 \quad \text{für} \quad (\mu, \nu) \to (\infty, \infty).$$

[4]) Man überzeugt sich leicht, daß den Forderungen (4), (5) und (8) genügt wird, wenn man $k_p = 2^P$ mit $P = 2^{2^p}$ und, unter Benutzung von Logarithmen zur Grundzahl 2 in (6) und (7), $\bar{k}_p = \frac{k_p}{2^p}$ setzt.

Wegen der Symmetrie kann ich mich auf solche Folgen $\sigma_{\mu\nu}$ beschränken, die mit keinem Glied unterhalb der Hauptdiagonale liegen.

Zunächst betrachte ich eine Folge $\sigma_{\mu\nu}$, wo μ und ν gewissen Nummern k_p gleich sind. Mit v und w positiv ganz, $v \leqq w$ ist

$$\sigma_{k_v k_w} < \frac{k_v(2\bar{k}_1 + 2\bar{k}_2 + \ldots + 2\bar{k}_{w-1})B + k_w(2\bar{k}_1 + 2\bar{k}_2 + \ldots + 2\bar{k}_{v-1})B}{k_v k_w}$$

$$< 2B\left(\frac{\bar{k}_1 + \bar{k}_2 + \ldots + \bar{k}_w}{k_w} + \frac{\bar{k}_1 + \bar{k}_2 + \ldots + \bar{k}_v}{k_v}\right)$$

$$< 4B\frac{\bar{k}_1 + \bar{k}_2 + \ldots + \bar{k}_v}{k_v} \to 0 \qquad \text{für } v \to \infty.$$

Ist $\sigma_{\mu\nu}$ eine beliebige Folge (jedoch $\mu \leqq \nu$), so setze ich

$$\sigma_{\mu\nu} = \sigma_{k_v + r,\, k_w + t}$$

mit $v \leqq w$, $1 \leqq r \leqq k_{v+1} - k_v$, $1 \leqq t \leqq k_{w+1} - k_w$. Es ist dann

$$\sigma_{k_v + r,\, k_w + t} < \frac{k_v k_w \sigma_{k_v k_w} + 2r(\bar{k}_1 + \ldots + \bar{k}_{w-1})B + 2t(\bar{k}_1 + \ldots + \bar{k}_{v-1})B + 2\bar{k}_w(k_v + r)B + 2\bar{k}_v(k_w + t)B}{(k_v + r)(k_w + t)}$$

$$< \sigma_{k_v k_w} + 2B\frac{\bar{k}_1 + \ldots + \bar{k}_{w-1}}{k_w} + 2B\frac{\bar{k}_1 + \ldots + \bar{k}_{v-1}}{k_v} + \frac{2B\bar{k}_v}{k_v} + \frac{2B\bar{k}_w}{k_w}$$

$$< \sigma_{k_v k_w} + 4B\frac{\bar{k}_1 + \ldots + \bar{k}_v}{k_v} \to 0 \qquad \text{für } v \to \infty.$$

(Eingegangen am 28. November 1939.)

Über lückenlose Ausfüllung des n-dimensionalen Raumes durch kongruente Würfel. II.

Von

Oskar Perron in München.

§ 1.

Die benötigten allgemeinen Sätze.

In diesem zweiten Teil[1]) soll die Kellersche Vermutung für $n \leqq 6$ durch Ausbau der in § 7 des ersten Teils befolgten arithmetischen Methode bewiesen werden. Um dauernde Verweisungen zu ersparen, werden hier zunächst diejenigen Definitionen und Sätze des ersten Teils, die gebraucht werden, mit den dortigen Nummern wiederholt, wobei wir in teilweiser Abweichung von früher die Nummern der Koordinaten durchweg als *obere* Indizes schreiben, um untere Indizes bequemer anderweitig verwenden zu können. Potenzexponenten kommen keine vor, außer mit der Basis 2 und auch das nur ganz vorübergehend, so daß Verwechslungen ausgeschlossen sind.

Definition 1. Ein Punkt des R_n ist ein geordnetes System von n reellen Zahlen $x^1, \ldots, x^n$. Dabei heißt x^ν die ν-te Koordinate des Punktes.

Definition 2. Der Würfel mit dem Mittelpunkt $a^1, \ldots, a^n$ ist die Menge der Punkte $x^1, \ldots, x^n$, für welche

$$-\tfrac{1}{2} \leqq x^\nu - a^\nu < \tfrac{1}{2} \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Definition 3. Eine lückenlose Ausfüllung des R_n mit Würfeln ist eine Würfelmenge derart, daß jeder Punkt des R_n genau einem Würfel angehört.

Definition 5. Zwei Würfel des R_n, bei denen eine Mittelpunktskoordinatendifferenz absolut gleich 1 ist und die $n - 1$ andern gleich 0 sind, heißen ein Zwillingspaar.

Satz 2. *Wenn man bei einer lückenlosen Ausfüllung des R_n mit Würfeln die erste Mittelpunktskoordinate aller Würfel um dieselbe Zahl u^1, die zweite um dieselbe Zahl $u^2, \ldots,$ schließlich die n-te um dieselbe Zahl u^n vermindert, so bilden die neuen Würfel wieder eine lückenlose Ausfüllung des R_n (Parallelverschiebung).*

Satz 3. *Eine lückenlose Ausfüllung des R_n mit Würfeln besteht aus abzählbar unendlich vielen Würfeln.*

---

[1]) Der erste Teil ist erschienen in Math. Zeitschr. **46**, (1940), S. 1—26.

Satz 5. *In einer lückenlosen Ausfüllung des R_n mit Würfeln gibt es zu jedem Punkt $c^1, \ldots, c^n$ genau einen Würfel, dessen Mittelpunktskoordinaten $a^1, \ldots, a^n$ den Ungleichungen*

$$c^\nu \leqq a^\nu < c^\nu + 1 \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

genügen. — Allgemeiner gibt es, wenn man die Koordinatenindizes ν irgendwie in zwei Klassen teilt, von denen die eine auch leer sein kann, genau einen Würfel, dessen Mittelpunktskoordinaten $a^1, \ldots, a^n$ den Ungleichungen

$$c^\nu \leqq a^\nu < c^\nu + 1 \quad \text{für die } \nu \text{ der ersten Klasse,}$$

$$c^\nu - 1 < a^\nu \leqq c^\nu \quad \text{für die } \nu \text{ der zweiten Klasse}$$

genügen[2]*).*

Satz 9. *Die Mittelpunkte von zwei verschiedenen Würfeln einer lückenlosen Ausfüllung des R_n haben wenigstens eine ganzzahlige von 0 verschiedene Koordinatendifferenz.*

Wir beweisen jetzt noch einen weiteren Satz.

Satz 19. *Wenn die Würfel W_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) mit den Mittelpunkten*

$$a_k^1, a_k^2, \ldots, a_k^n$$

eine lückenlose Ausfüllung des R_n bilden, so bilden die Würfel $\overline{W}_k$ mit den Mittelpunkten

$$-a_k^1, a_k^2, \ldots, a_k^n$$

ebenfalls eine (Vorzeichenänderung der ersten Koordinate).

Zusatz. *Ebensogut kann man natürlich durch Vorzeichenänderung jeder anderen Koordinate eine neue lückenlose Ausfüllung des R_n gewinnen und bei wiederholter Anwendung auch durch gleichzeitige Vorzeichenänderung mehrerer Koordinaten.*

Beweis. Wir müssen zeigen, daß es für einen beliebigen Punkt $x^1, \ldots, x^n$ genau einen Index k gibt derart, daß

$$-\tfrac{1}{2} \leqq x^1 - (-a_k^1) < \tfrac{1}{2}, \quad -\tfrac{1}{2} \leqq x^\nu - a_k^\nu < \tfrac{1}{2} \quad \text{für } \nu = 2, \ldots, n$$

ist. Gäbe es zwei solche Indizes k und l, so wäre

$$|a_k^\nu - a_l^\nu| < 1 \qquad \text{für } \nu = 1, \ldots, n,$$

was nach Satz 9 nicht sein kann (übrigens auch schon nach dem einfacheren hier nicht aufgeführten Satz 4). Um zu zeigen, daß es wirklich einen Index k der verlangten Art gibt, bemerken wir, daß der Punkt $-x^1, x^2, \ldots, x^n$ einem Würfel W_l angehören muß. Dann ist

$$-\tfrac{1}{2} \leqq -x^1 - a_l^1 < \tfrac{1}{2}, \quad -\tfrac{1}{2} \leqq x^\nu - a_l^\nu < \tfrac{1}{2} \quad \text{für } \nu = 2, \ldots, n,$$

---

[2]) Im ersten Teil ist der Satz so formuliert, daß die c^ν für die ν der zweiten Klasse durch $c^\nu + 1$ ersetzt sind.

oder also

$$(1) \qquad -\tfrac{1}{2} < x^1 + a_l^1 \leqq \tfrac{1}{2}, \quad -\tfrac{1}{2} \leqq x^\nu - a_l^\nu < \tfrac{1}{2} \quad \text{für } \nu = 2, \ldots, n.$$

Wenn dabei $x^1 + a_l^1 < \frac{1}{2}$, so leistet offenbar der Index $k = l$ das Verlangte. Wenn aber

$$(2) \qquad x^1 + a_l^1 = \tfrac{1}{2},$$

so bemerken wir, daß es nach Satz 5 einen Index k gibt derart, daß

$$(3) \qquad a_l^1 - 1 \leqq a_k^1 < a_l^1, \quad x^\nu - \tfrac{1}{2} < a_k^\nu \leqq x^\nu + \tfrac{1}{2} \quad \text{für } \nu = 2, \ldots, n$$

ist. Aus (1) und (3) folgt

$$|a_k^\nu - a_l^\nu| < 1 \qquad \text{für } \nu = 2, \ldots, n.$$

Wegen (3) und Satz 9 (auch schon Satz 4) ist alsdann $a_k^1 = a_l^1 - 1$. Nach (2) und (3) ist daher

$$-\tfrac{1}{2} = x^1 + a_k^1, \quad -\tfrac{1}{2} \leqq x^\nu - a_k^\nu < \tfrac{1}{2} \quad \text{für } \nu = 2, \ldots, n,$$

so daß der Index k das Verlangte leistet.

Schließlich führen wir noch einen neuen Begriff ein durch die

Definition 6. Zwei Würfel des R_n, bei denen eine Mittelpunktskoordinatendifferenz absolut gleich 1 ist, k ($\geqq 1$) weitere Mittelpunktskoordinatendifferenzen gleich 0 und die übrigen $n - k - 1$ (falls $n > k + 1$ ist) absolut < 1 sind, heißen ein Z_k-Paar.

Bei der Forderung „absolut < 1" ist „$= 0$" nicht ausgeschlossen. Daher ist ein Z_{k+1}-Paar für $k \geqq 1$ immer zugleich ein Z_k-Paar. Ein Z_{n-1}-Paar im R_n ist ein Zwillingspaar. Offenbar ist es gleichgültig, in welcher Reihenfolge die beiden Würfel eines Z_k-Paares aufgeführt werden; ist W_1, W_2 ein Z_k-Paar, so ist W_2, W_1 auch eines, und zwar dasselbe.

Kellersche Vermutung. Unter den Würfeln einer lückenlosen Ausfüllung des R_n gibt es wenigstens ein Zwillingspaar.

Wir suchen die Richtigkeit der Vermutung dadurch zu beweisen, daß wir der Reihe nach zeigen, in einer lückenlosen Ausfüllung des R_n mit Würfeln gibt es ein Z_1-Paar, ein Z_2-Paar usw., bis wir beim Z_{n-1}-Paar ankommen, also beim Zwillingspaar. Der Beweis wird in dieser Arbeit bis zum Z_5-Paar gelingen, womit die Richtigkeit der Kellerschen Vermutung für $n \leqq 6$ nachgewiesen sein wird.

§ 2.

Vorbemerkungen über Ausdrucksweisen, Bezeichnungen und typische Anwendung der Sätze.

Statt „Würfel mit dem Mittelpunkt $c^1, \ldots, c^n$" werden wir zur Abkürzung sagen: „Würfel $c^1, \ldots, c^n$". Speziell der Würfel $0, \ldots, 0$ soll Nullpunktswürfel heißen. Entsprechend werden wir die Koordinaten des Mittelpunktes

eines Würfels einfach die „Koordinaten des Würfels“ nennen. Wenn ein Würfel W die Koordinaten $c^1, \ldots, c^n$ hat, so deuten wir das an durch die Schreibweise

$$W: c^1, \ldots, c^n.$$

Kleine griechische Buchstaben, die mit einem oberen Index (als Koordinatennummer) und eventuell noch mit irgendwelchen unteren Indizes versehen sind, bedeuten stets Zahlen des halboffenen Intervalls

$$0 \leqq \alpha < 1. \tag{J}$$

Den Satz 5 werden wir dann immer ohne ausdrückliche Bezugnahme auf ihn in der Weise anwenden, daß wir sagen, in einer gegebenen lückenlosen Ausfüllung des R_n gibt es zu einem gegebenen Punkt $c^1, \ldots, c^n$ den Würfel

$$c^1 + \alpha^1,\ c^2 + \alpha^2,\ \ldots,\ c^n + \alpha^n,$$

wobei die α bei Bedarf auch durch andere kleine griechische Buchstaben ersetzt und noch mit unteren Indizes versehen sein können. Von den Zahlen α^ν ist dabei im allgemeinen weiter nichts bekannt, als daß sie im Intervall (J) liegen und eindeutig bestimmt sind.

Allgemeiner werden wir in Anwendung von Satz 5, aber ohne ausdrückliche Bezugnahme auf ihn sagen, es gibt die 2^n Würfel

$$c^1 \pm \alpha^1,\ c^2 \pm \alpha^2,\ \ldots,\ c^n \pm \alpha^n$$

entsprechend den 2^n Vorzeichenkombinationen, und auch, es gibt, wenn $e^{k+1}, \ldots, e^n$ irgendwelche feste Vorzeichen (± 1) sind, die 2^k Würfel

$$c^1 \pm \alpha^1,\ \ldots,\ c^k \pm \alpha^k,\ c^{k+1} + e^{k+1}\alpha^{k+1},\ \ldots,\ c^n + e^n\alpha^n$$

entsprechend den 2^k Vorzeichenkombinationen. Dabei hängen die α^ν natürlich von der Vorzeichenkombination ab und sind nicht etwa bei allen Vorzeichenkombinationen dieselben. Die 2^n bzw. die 2^k Würfel brauchen nicht alle voneinander verschieden zu sein, sie können teilweise zusammenfallen. Wenn nämlich ein α^ν gleich 0 ist, so gehört das zu beiden Vorzeichen. Insbesondere kann es auch vorkommen, daß alle 2^n bzw. alle 2^k Würfel in einen zusammenfallen; dann handelt es sich einfach um den Würfel

$$c^1, \ldots, c^n \text{ bzw. } c^1, \ldots, c^k,\ c^{k+1} + e^{k+1}\alpha^{k+1},\ \ldots,\ c^n + e^n\alpha^n,$$

wobei im zweiten Fall von den $\alpha^{k+1}, \ldots, \alpha^n$ im allgemeinen wieder nichts bekannt sein wird, als daß sie im Intervall (J) liegen und eindeutig bestimmt sind. Die Sonderrolle, die wir hier im Fall der 2^k Würfel den ersten k Koordinaten zugewiesen haben, kann natürlich auch irgendwelchen anderen Koordinaten zufallen.

Der Satz 9 wird stets in folgender Weise angewandt. Wenn wir in einer lückenlosen Ausfüllung des R_n mit Würfeln zu einem gegebenen Punkt

$c^1, \ldots, c^n$ die zwei nach dem vorigen vorhandenen und offenbar voneinander verschiedenen Würfel

$$W_1: \quad c^1 + e^1\alpha^1, \quad c^2 + e^2\alpha^2, \ \ldots, \ c^n + e^n\alpha^n,$$

$$W_2: \quad c^1 + e + e^1\beta^1, \ c^2 + e^2\beta^2, \ \ldots, \ c^n + e^n\beta^n$$

betrachten, wobei die e^r wieder feste Vorzeichen (± 1) sind und auch $e = \pm 1$ ist, so folgt, da nach Satz 9 eine ganzzahlige von 0 verschiedene Koordinatendifferenz da sein muß, daß $\beta^1 = \alpha^1$ ist; denn die letzten $n - 1$ Koordinatendifferenzen sind ja absolut kleiner als 1. Wir werden diese Schlußfolgerung stets ohne ausdrückliche Bezugnahme auf Satz 9 einfach in die Worte kleiden:

$$\text{Aus } W_1 - W_2 \text{ folgt } \beta^1 = \alpha^1.$$

Gelegentlich werden wir auch, wenn die Koordinaten von W_1 schon aufgeschrieben sind, bei W_2 ohne weiteres statt β^1 einfach gleich α^1 schreiben. Beispielsweise sind in einer lückenlosen Ausfüllung des R_n, wenn sie den Nullpunktswürfel enthält, auch die 2^n (vielleicht teilweise zusammenfallenden) Würfel

$$\pm 1, \ \pm\alpha^2, \ \ldots, \ \pm\alpha^n$$

vorhanden. Ferner fallen die zwei Würfel

$$c^1 \pm \alpha^1, \ c^2 + e^2\alpha^2, \ \ldots, \ c^n + e^n\alpha^n,$$

wo die e^r wieder feste Vorzeichen (± 1) bedeuten, entweder zusammen (das ist der Fall $\alpha^1 = 0$) oder es sind die folgenden

$$W_1: \quad c^1 + \alpha^1, \quad c^2 + e^2\alpha^2, \ \ldots, \ c^n + e^n\alpha^n,$$

$$W_2: \quad c^1 + \alpha^1 - 1, \ c^2 + e^2\beta^2, \ \ldots, \ c^n + e^n\beta^n.$$

Dabei wird von den α^r, β^r im allgemeinen weiter nichts bekannt sein, als daß sie im Intervall (J) liegen und eindeutig bestimmt sind und daß $\alpha^1 > 0$ ist; bekannt ist aber die erste Koordinatendifferenz 1, die aus $W_1 - W_2$ folgt.

Analog werden wir bei den beiden Würfeln

$$W_1: \quad c^1 + e^1\alpha^1, \quad c^2 + e^2\alpha^2, \quad c^3 + e^3\alpha^3, \ \ldots, \ c^n + e^n\alpha^n,$$

$$W_2: \quad c^1 + e + e^1\beta^1, \ c^2 + e^* + e^2\beta^2, \ c^3 + e^3\beta^3, \ \ldots, \ c^n + e^n\beta^n,$$

wobei die e^r wieder irgendwelche feste Vorzeichen (± 1) sind und auch e und e^* gleich ± 1 sind[3]), in Anwendung von Satz 9, aber ohne ausdrückliche Bezugnahme auf ihn sagen: Aus $W_1 - W_2$ folgt, daß wenigstens eine der beiden Gleichungen $\beta^1 = \alpha^1$ oder $\beta^2 = \alpha^2$ besteht, daß also $(\beta^1 - \alpha^1)(\beta^2 - \alpha^2) = 0$ ist; denn die letzten $n - 2$ Koordinatendifferenzen sind ja absolut kleiner als 1. Die Sonderrolle, die wir bei diesen Überlegungen der ersten Koordinate

[3]) Bei der Schlußweise dürften übrigens e und e^* beliebige von 0 verschiedene ganze Zahlen sein; doch brauchen wir nur die Werte ± 1.

bzw. den ersten beiden Koordinaten zugewiesen haben, kann natürlich auch wieder irgendwelchen anderen Koordinaten zufallen.

Da in der Definition eines Z_k-Paares nur absolute Koordinatendifferenzen vorkommen und da diese durch Parallelverschiebung gemäß Satz 2 sowie durch Vorzeichenänderung einer Koordinate gemäß Satz 19 nebst Zusatz nicht geändert werden, so dürfen wir, wenn wir in einer lückenlosen Ausfüllung des R_n mit Würfeln die Existenz eines Z_k-Paares nachweisen wollen, einen beliebigen Würfel der gegebenen Ausfüllung durch Parallelverschiebung zum Nullpunktswürfel machen und wir dürfen weiter, wenn es im Laufe der Rechnung zweckmäßig erscheint, durch Parallelverschiebung wieder einen anderen Würfel zum Nullpunktswürfel machen oder vielleicht nur einige seiner Koordinaten zu 0 machen und die anderen belassen. Ebenso dürfen wir beliebige Vorzeichenänderungen einiger Koordinaten vornehmen. Dabei wäre natürlich darauf zu achten, daß auch bei allen schon vorher eingeführten Würfeln die betreffenden Koordinatenänderungen nachträglich noch vorgenommen werden; doch wird es bei unseren Anwendungen immer so sein, daß die früheren Würfel später nicht mehr gebraucht werden.

Ferner ist klar, daß es auf die Reihenfolge der Koordinaten niemals ankommt, so daß wir beliebige Umnumerierungen vornehmen dürfen. Insbesondere ist es hiernach gestattet, wenn etwa die Existenz eines Z_{k-1}-Paares W_0, W_1 bereits bekannt ist, dieses in der folgenden Form anzunehmen:

$$W_0\colon\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 0,\quad \ldots,\ 0,$$
$$W_1\colon\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \alpha^{k+1},\ \ldots,\ \alpha^n.$$

§ 3.

Die Existenz von Z_1-, Z_2- und Z_3-Paaren.

Satz 20. *Für $n \geqq 2$ gibt es in einer lückenlosen Ausfüllung des R_n mit Würfeln stets ein Z_1-Paar, für $n = 2$ also ein Zwillingspaar.*

Beweis. Nach § 2 dürfen wir annehmen, daß in der lückenlosen Ausfüllung der Nullpunktswürfel enthalten ist. Dann sind aber auch die folgenden zwei Würfel darin enthalten:

$$W\colon\ 1,\ \pm\alpha^2,\ \alpha^3,\ \ldots,\ \alpha^n$$

entsprechend den zwei Vorzeichen. Wenn diese in einen zusammenfallen ($\alpha^2 = 0$), so bildet dieser eine mit dem Nullpunktswürfel zusammen bereits ein Z_1-Paar. Andernfalls handelt es sich um die zwei Würfel

$$W_1\colon\ 1,\quad \alpha^2,\quad \alpha_1^3,\ \ldots,\ \alpha_1^n,$$
$$W_2\colon\ 1,\ \alpha^2 - 1,\ \alpha_2^3,\ \ldots,\ \alpha_2^n$$

und diese bilden ein Z_1-Paar.

Satz 21. *Für $n \geqq 3$ gibt es in einer lückenlosen Ausfüllung des R_n mit Würfeln stets ein Z_2-Paar, für $n = 3$ also ein Zwillingspaar.*

Beweis. Nach Satz 20 gibt es ein Z_1-Paar, das wir nach § 2 in der Gestalt

$$W_0\colon\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots.\ 0,$$
$$W_1\colon\ 1,\ 0,\ \alpha^3,\ \ldots,\ \alpha^n$$

annehmen dürfen. Wenn $\alpha^3 = 0$ ist, bilden W_0, W_1 bereits ein Z_2-Paar. Wenn aber $\alpha^3 > 0$, so gibt es noch die zwei Würfel

$$W'\colon\ 0,\ \pm\beta^2,\ 1,\ \beta^4,\ \ldots,\ \beta^n$$

entsprechend den zwei Vorzeichen; die dritte und erste Koordinate ergeben sich dabei der Reihe nach aus $W_0 - W'$ und $W_1 - W'$[4]). Wenn diese zwei Würfel in einen zusammenfallen ($\beta^2 = 0$), so bildet dieser eine mit W_0 zusammen ein Z_2-Paar. Andernfalls handelt es sich um die zwei Würfel

$$W_1'\colon\ 0,\ \beta^2,\ 1,\ \beta_1^4,\ \ldots,\ \beta_1^n,$$
$$W_2'\colon\ 0,\ \beta^2 - 1,\ 1,\ \beta_2^4,\ \ldots,\ \beta_2^n$$

und diese bilden ein Z_2-Paar.

Satz 22. *Für $n \geqq 4$ gibt es in einer lückenlosen Ausfüllung des R_n mit Würfeln stets ein Z_3-Paar, für $n = 4$ also ein Zwillingspaar.*

Dem Beweis schicken wir einen auch später noch nützlichen Hilfssatz voraus.

Hilfssatz 1. *Ist $c^1, \ldots, c^n$ irgendein Punkt des R_n ($n \geqq 2$), so gibt es in einer lückenlosen Ausfüllung des R_n mit Würfeln für die zu den vier Vorzeichenkombinationen gehörigen vier Würfel*

$$c^1 \pm \alpha^1,\ c^2 \pm \alpha^2,\ c^3 + e^3\alpha^3,\ \ldots,\ c^n + e^n\alpha^n,$$

wobei $e^3, \ldots, e^n$ feste Vorzeichen (± 1) sind, folgende zwei Möglichkeiten:

Entweder die vier Würfel fallen in einen zusammen ($\alpha^1 = \alpha^2 = 0$);

oder die vier Würfel enthalten wenigstens ein Paar, bei dem von den ersten zwei Koordinatendifferenzen eine absolut gleich 1 und die andere gleich 0 ist.

Zusatz. *Die Sonderrolle der ersten zwei Koordinaten kann natürlich ebensogut von irgend zwei Koordinaten übernommen werden.*

Beweis von Hilfssatz 1. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß alle c^r gleich 0 sind, weil sich das durch Parallelverschiebung

---

[4]) Hier und analog noch häufig später, wenn die gleichen Worte gebraucht werden, ist so zu verfahren: Man setzt die erste und dritte Koordinate zunächst in der Form $0 \pm \beta^1$, $1 \pm \beta^3$ mit unbekannten β^1, β^3 (natürlich im Intervall (J)) an und schließt dann mindestens bei passender Wahl der Vorzeichen, häufig (z. B. hier) sogar bei jeder Wahl der Vorzeichen aus den angegebenen Würfeldifferenzen der Reihe nach: $\beta^3 = 0$, $\beta^1 = 0$.

erreichen läßt. Wenn dann α^1, α^2 beide gleich 0 sind, so liegt die erste Möglichkeit vor und es ist nichts mehr zu beweisen. Wenn bei jeder Vorzeichenkombination eine der Zahlen α^1, α^2 gleich 0 ist (aber nicht beide), dann reduzieren sich die vier Würfel auf die folgenden zwei:

$$W_1: \quad \alpha^1, \quad 0, e^3\alpha_1^3, \ldots, e^n\alpha_1^n,$$

$$W_2: \alpha^1 - 1, 0, e^3\alpha_2^3, \ldots, e^n\alpha_2^n,$$

wobei allenfalls die erste und zweite Koordinate noch ihre Rollen tauschen können. W_1 und W_2 sind aber ein Paar der verlangten Art. Wenn schließlich bei einer Vorzeichenkombination α^1 und α^2 beide von 0 verschieden sind, so dürfen wir annehmen, daß das etwa bei $++$ der Fall ist, weil sich das nötigenfalls durch Vorzeichenänderung von einer oder zwei Koordinaten erreichen läßt und weil durch solche Änderung die Aussage von Hilfssatz 1, nachdem alle c^ν gleich 0 angenommen sind, nicht berührt wird. Dann kommen unter den vier Würfeln die folgenden drei vor:

$$W_1: \quad \alpha^1, \quad \alpha^2, \quad e^3\alpha_1^3, \ldots, e^n\alpha_1^n,$$

$$W_2: \quad \alpha^1 - 1, \quad \alpha_2^2, \quad e^3\alpha_2^3, \ldots, e^n\alpha_2^n,$$

$$W_3: \quad \alpha_3^1, \quad \alpha^2 - 1, e^3\alpha_3^3, \ldots, e^n\alpha_3^n.$$

Aus $W_2 - W_3$ folgt, daß wenigstens eine der beiden Gleichungen gilt: $\alpha_3^1 = \alpha^1$, $\alpha_2^2 = \alpha^2$. Für $\alpha_3^1 = \alpha^1$ bilden W_1, W_3 ein Paar der verlangten Art, für $\alpha_2^2 = \alpha^2$ bilden W_1, W_2 ein solches Paar.

Beweis von Satz 22. Nach Satz 21 gibt es ein Z_2-Paar, das wir nach § 2 in der Gestalt

$$W_0: \quad 0, 0, 0, 0, \quad 0, \quad \ldots, 0,$$

$$W_1: \quad 1, 0, 0, \alpha^4, \alpha^5, \ldots, \alpha^n$$

annehmen dürfen. Wenn $\alpha^4 = 0$ ist, bilden W_0, W_1 bereits ein Z_3-Paar. Wenn aber $\alpha^4 > 0$, so gibt es noch die vier Würfel

$$W': \quad 0, \pm\beta^2, \pm\beta^3, 1, \beta^5, \ldots, \beta^n$$

entsprechend den vier Vorzeichenkombinationen; die vierte und erste Koordinate ergeben sich dabei der Reihe nach aus $W_0 - W'$ und $W_1 - W'$. Wenn diese vier Würfel in einen zusammenfallen ($\beta^2 = \beta^3 = 0$), so bildet dieser eine mit W_0 zusammen ein Z_3-Paar. Andernfalls kommt unter den vier Würfeln W' nach Hilfssatz 1 nebst Zusatz ein Paar vor, bei dem die zweite Koordinatendifferenz absolut gleich 1 und die dritte gleich 0 ist oder umgekehrt. Dieses Paar bildet aber jetzt. da auch die erste und vierte Koordinatendifferenz gleich 0 sind, ein Z_3-Paar.

§ 4.

Die Existenz von Z_4-Paaren.

Hilfssatz 2. *Ist* $c^1, \ldots, c^n$ *irgendein Punkt des* R_n $(n \geqq 3)$, *so gibt es in einer lückenlosen Ausfüllung des* R_n *mit Würfeln für die zu den acht Vorzeichenkombinationen gehörigen acht Würfel*

$$c^1 \pm \alpha^1,\ c^2 \pm \alpha^2,\ c^3 \pm \alpha^3,\ c^4 + e^4\alpha^4,\ \ldots,\ c^n + e^n\alpha^n,$$

wobei $e^4, \ldots, e^n$ *feste Vorzeichen* (± 1) *sind, folgende drei Möglichkeiten:*

Entweder die acht Würfel fallen in einen zusammen $(\alpha^1 = \alpha^2 = \alpha^3 = 0)$; *oder die Würfel enthalten wenigstens ein Paar, bei dem unter den ersten drei Koordinatendifferenzen eine absolut gleich* 1 *ist und die anderen zwei gleich* 0 *sind*;

oder endlich die acht Würfel reduzieren sich auf fünf, und zwar nach eventueller Vertauschung der ersten beiden Koordinaten auf

$$W_1\colon\quad c^1 + e^1\alpha^1,\quad c^2 + e^2\alpha^2,\quad c^3 + e^3\alpha^3,\quad c^4 + e^4\alpha_1^4, \ldots, c^n + e^n\alpha_1^n,$$

$$W_2\colon\ c^1 + e^1(\alpha^1 - 1),\quad c^2 + e^2\alpha^2,\quad c^3,\quad c^4 + e^4\alpha_2^4, \ldots, c^n + e^n\alpha_2^n,$$

$$W_3\colon\quad c^1,\quad c^2 + e^2(\alpha^2 - 1),\quad c^3 + e^3\alpha^3,\quad c^4 + e^4\alpha_3^4, \ldots, c^n + e^n\alpha_3^n,$$

$$W_4\colon\quad c^1 + e^1\alpha^1,\quad c^2,\quad c^3 + e^3(\alpha^3 - 1),\ c^4 + e^4\alpha_4^4, \ldots, c^n + e^n\alpha_4^n,$$

$$W_5\colon\ c^1 + e^1(\alpha^1 - 1),\ c^2 + e^2(\alpha^2 - 1),\ c^3 + e^3(\alpha^3 - 1),\ c^4 + e^4\alpha_5^4, \ldots, c^n + e^n\alpha_5^n,$$

wobei die e^1, e^2, e^3 *noch irgendwelche Vorzeichen* (± 1) *sind.*

Zusatz. *Die Sonderrolle der ersten drei Koordinaten kann natürlich ebensogut von irgend drei Koordinaten übernommen werden.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß alle c^i gleich 0 sind, weil sich das durch Parallelverschiebung erreichen läßt. Wenn dann α^1, α^2, α^3 alle drei gleich 0 sind, so liegt die erste Möglichkeit vor und es ist nichts mehr zu beweisen. Wenn bei jeder Vorzeichenkombination zwei der Zahlen α^1, α^2, α^3 gleich 0 sind (aber nicht alle drei), so reduzieren sich bei passender Numerierung der ersten drei Koordinaten die acht Würfel auf die zwei Würfel

$$W_1\colon\quad \alpha^1,\quad 0,\ 0,\ e^4\alpha_1^4,\ \ldots,\ e^n\alpha_1^n,$$

$$W_2\colon\quad \alpha^1 - 1,\ 0,\ 0,\ e^4\alpha_2^4,\ \ldots,\ e^n\alpha_2^n,$$

so daß jetzt die zweite Möglichkeit vorliegt. Wenn bei jeder Vorzeichenkombination wenigstens eine der Zahlen α^1, α^2, α^3 gleich 0 ist und bei einer gewissen Vorzeichenkombination auch *nur* eine, dürfen wir annehmen, daß letzteres bei $+++$ der Fall ist; die anderen Möglichkeiten ergeben sich dann durch Vorzeichenänderung von Koordinaten. Jetzt sind bei geeigneter

Numerierung der ersten drei Koordinaten unter unseren acht Würfeln insbesondere die drei Würfel

$$\begin{aligned} W_1&: \quad \alpha^1, \quad \alpha^2, \quad 0, \quad e^4\alpha_1^4, \ \ldots, \ e^n\alpha_1^n, \\ W_2&: \quad \alpha^1 - 1, \quad \alpha_2^2, \quad \alpha_2^3, \ e^4\alpha_2^4, \ \ldots, \ e^n\alpha_2^n, \\ W_3&: \quad \alpha_3^1, \quad \alpha^2 - 1, \ \alpha_3^3, \ e^4\alpha_3^4, \ \ldots, \ e^n\alpha_3^n \end{aligned}$$

enthalten, wobei von den Zahlen α_2^2, α_2^3 nach Annahme wenigstens eine gleich 0 ist, ebenso von den Zahlen α_3^1, α_3^3. Aus $W_2 - W_3$ folgt, daß wenigstens eine der beiden Gleichungen gilt: $\alpha_3^1 = \alpha^1$, $\alpha_2^2 = \alpha^2$. Im Fall $\alpha_3^1 = \alpha^1$ ist $\alpha_3^3 = 0$ und es liegt die zweite Möglichkeit vor (Paar W_1, W_3); im Fall $\alpha_2^2 = \alpha^2$ ist $\alpha_2^3 = 0$ und es liegt wieder die zweite Möglichkeit vor (Paar W_1, W_2).

Schließlich bleibt noch der Fall zu untersuchen, daß bei einer Vorzeichenkombination die Zahlen $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ alle drei von 0 verschieden sind. Wir wollen etwa annehmen, daß das bei $+++$ der Fall ist; die anderen Möglichkeiten ergeben sich dann durch Vorzeichenänderung von Koordinaten. Unter den acht Würfeln sind jetzt die folgenden vier enthalten:

$$\begin{aligned} W_1&: \quad \alpha^1, \quad \alpha^2, \quad \alpha^3, \quad e^4\alpha_1^4, \ \ldots, \ e^n\alpha_1^n, \\ W_2&: \quad \alpha^1 - 1, \quad \alpha_2^2, \quad \alpha_2^3, \quad e^4\alpha_2^4, \ \ldots, \ e^n\alpha_2^n, \\ W_3&: \quad \alpha_3^1, \quad \alpha^2 - 1, \quad \alpha_3^3, \quad e^4\alpha_3^4, \ \ldots, \ e^n\alpha_3^n, \\ W_4&: \quad \alpha_4^1, \quad \alpha_4^2, \quad \alpha^3 - 1, \ e^4\alpha_4^4, \ \ldots, \ e^n\alpha_4^n. \end{aligned}$$

Aus $W_2 - W_3$ folgt, daß wenigstens eine der beiden Gleichungen gilt: $\alpha_3^1 = \alpha^1$, $\alpha_2^2 = \alpha^2$. Indem wir eventuell die erste und zweite Koordinate und zugleich die Würfel W_2 und W_3 ihre Rollen tauschen lassen[5]), dürfen wir annehmen, daß $\alpha_2^2 = \alpha^2$ ist. Wenn dann auch $\alpha_2^3 = \alpha^3$ ist, so liegt die zweite Möglichkeit vor (Paar W_1, W_2). Sei daher

$$\alpha_2^3 \neq \alpha^3.$$

Aus $W_2 - W_4$ folgt dann $\alpha_4^1 = \alpha^1$. Wenn auch $\alpha_4^2 = \alpha^2$, so liegt wieder die zweite Möglichkeit vor (Paar W_1, W_4). Sei daher

$$\alpha_4^2 \neq \alpha^2.$$

Aus $W_3 - W_4$ folgt dann $\alpha_3^3 = \alpha^3$. Wenn auch $\alpha_3^1 = \alpha^1$, so liegt abermals die zweite Möglichkeit vor (Paar W_1, W_3). Sei daher

$$\alpha_3^1 \neq \alpha^1.$$

Die vier Würfel W_1 bis W_4 sind alsdann die folgenden:

$$\begin{aligned} W_1&: \quad \alpha^1, \quad \alpha^2, \quad \alpha^3, \quad e^4\alpha_1^4, \ \ldots, \ e^n\alpha_1^n, \\ W_2&: \quad \alpha^1 - 1, \quad \alpha^2, \quad \alpha_2^3, \quad e^4\alpha_2^4, \ \ldots, \ e^n\alpha_2^n, \\ W_3&: \quad \alpha_3^1, \quad \alpha^2 - 1, \quad \alpha^3, \quad e^4\alpha_3^4, \ \ldots, \ e^n\alpha_3^n, \\ W_4&: \quad \alpha^1, \quad \alpha_4^2, \quad \alpha^3 - 1, \ e^4\alpha_4^4, \ \ldots, \ e^n\alpha_4^n. \end{aligned}$$

[5]) Man beachte, daß in Hilfssatz 2 die Rollentauschung der ersten beiden Koordinaten vorgesehen ist.

Wenn nun $\alpha_3^1 \neq 0$, so ist unter den acht Würfeln außer den vorstehenden vier auch noch der Würfel

$$W_5\colon\ \alpha_3^1 - 1,\ \alpha^2 - 1,\ \alpha^3,\ e^4\beta^4,\ \ldots,\ e^n\beta^n$$

vorhanden, dessen erste drei Koordinaten sich der Reihe nach aus $W_3 - W_5$, $W_2 - W_5$, $W_4 - W_5$ ergeben. Daher liegt wieder die zweite Möglichkeit vor (Paar W_3, W_5). Analog erkennt man, indem man die Rollen der Würfel W_2, W_3, W_4 und ebenso die Rollen der ersten drei Koordinaten zyklisch vertauscht, daß auch für $\alpha_4^2 \neq 0$ die zweite Möglichkeit vorliegt; ebenso für $\alpha_2^3 \neq 0$. Somit bleibt nur noch der Fall zu untersuchen, daß α_3^1, α_4^2, α_2^3 alle drei gleich 0 sind. Die Würfel W_1 bis W_4 sind dann die folgenden:

$$\begin{aligned}
W_1\colon&\ \alpha^1,\ &\alpha^2,\ &\alpha^3,\ &e^4\alpha_1^4,\ \ldots,\ e^n\alpha_1^n,\\
W_2\colon&\ \alpha^1 - 1,\ &\alpha^2,\ &0,\ &e^4\alpha_2^4,\ \ldots,\ e^n\alpha_2^n,\\
W_3\colon&\ 0,\ &\alpha^2 - 1,\ &\alpha^3,\ &e^4\alpha_3^4,\ \ldots,\ e^n\alpha_3^n,\\
W_4\colon&\ \alpha^1,\ &0,\ &\alpha^3 - 1,\ &e^4\alpha_4^4,\ \ldots,\ e^n\alpha_4^n.
\end{aligned}$$

Durch sie werden von den acht Würfeln bereits sieben absorbiert, indem W_2, W_3, W_4 wegen der Nullen zu je zwei Vorzeichenkombinationen gehören. Es bleibt nur noch ein Würfel übrig, nämlich der Würfel

$$W_5\colon\ \alpha^1 - 1,\ \alpha^2 - 1,\ \alpha^3 - 1,\ e^4\alpha_5^4,\ \ldots,\ e^n\alpha_5^n,$$

dessen erste drei Koordinaten sich der Reihe nach aus $W_4 - W_5$, $W_2 - W_5$, $W_3 - W_5$ ergeben. Daher liegt jetzt gerade die dritte in Hilfssatz 2 behauptete Möglichkeit vor, natürlich mit $e^1 = e^2 = e^3 = +1$, da wir bei W_1 die ersten drei Koordinaten positiv angenommen haben. Damit ist der Hilfssatz 2 vollständig bewiesen.

Satz 23. *Für $n \geqq 5$ gibt es in einer lückenlosen Ausfüllung des R_n mit Würfeln stets ein Z_4-Paar, für $n = 5$ also ein Zwillingspaar.*

Beweis. Nach Satz 22 gibt es ein Z_3-Paar, das wir nach § 2 in der Gestalt

$$\begin{aligned}
W_0\colon&\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\\
W_1\colon&\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ \alpha^5,\ \alpha^6,\ \ldots,\ \alpha^n
\end{aligned}$$

annehmen dürfen. Wenn $\alpha^5 = 0$ ist, bilden W_0, W_1 bereits ein Z_4-Paar. Wenn aber $\alpha^5 > 0$, so gibt es noch die acht Würfel

$$W'\colon\ 0,\ \pm\beta^2,\ \pm\beta^3,\ \pm\beta^4,\ 1,\ \beta^6,\ \ldots,\ \beta^n$$

entsprechend den acht Vorzeichenkombinationen; die fünfte und erste Koordinate folgen dabei der Reihe nach aus $W_0 - W'$ und $W_1 - W'$. Wenn diese acht Würfel in einen zusammenfallen ($\beta^2 = \beta^3 = \beta^4 = 0$), so bildet dieser eine mit W_0 zusammen ein Z_4-Paar. Andernfalls kommt nach Hilfssatz 2 nebst Zusatz unter den acht Würfeln W' *entweder* ein Paar vor, bei dem von den Koordinatendifferenzen mit den Nummern 2, 3, 4 eine absolut gleich 1

ist und die anderen zwei gleich 0 sind, so daß jetzt dieses Paar, weil ja auch die erste und fünfte Koordinatendifferenz gleich 0 sind, bereits ein Z_4-Paar bildet; *oder* aber die acht Würfel W' reduzieren sich auf fünf, unter denen nach eventueller Rollentauschung von zwei Koordinaten und Vorzeichenänderung einiger Koordinaten die folgenden drei vorkommen:

$$\begin{aligned} W_2'&: \ 0, \ \beta^2-1, \ \beta^3, \ 0, \ 1, \ \beta_2^6, \ \ldots, \ \beta_2^n, \\ W_3'&: \ 0, \ 0, \ \beta^3-1, \ \beta^4, \ 1, \ \beta_3^6, \ \ldots, \ \beta_3^n, \\ W_4'&: \ 0, \ \beta^2, \ 0, \ \beta^4-1, \ 1, \ \beta_4^6, \ \ldots, \ \beta_4^n. \end{aligned}$$

Nun muß es aber auch die vier Würfel

$$W'': \ \pm\gamma^1, \ 1, \ \beta^3-1, \ \beta^4, \ 1\pm\gamma^5, \ \gamma^6, \ \ldots, \ \gamma^n$$

entsprechend den vier Vorzeichenkombinationen geben; dabei folgen die zweite, dritte, vierte Koordinate der Reihe nach aus $W_3' - W''$, $W_2' - W''$, $W_4' - W''$. Wenn die vier Würfel W'' in einen zusammenfallen ($\gamma^1 = \gamma^5 = 0$), so bildet dieser eine mit W_3' zusammen ein Z_4-Paar. Im anderen Fall kommt nach Hilfssatz 1 nebst Zusatz unter den vier Würfeln W'' ein Paar vor, bei dem von den Koordinatendifferenzen mit den Nummern 1 und 5 die eine absolut gleich 1 und die andere gleich 0 ist. Dieses Paar ist aber, da auch die zweite, dritte und vierte Koordinatendifferenz gleich 0 sind, ein Z_4-Paar.

§ 5.

Ein Hilfssatz.

Hilfssatz 3. *Wenn unter den Würfeln einer lückenlosen Ausfüllung des* R_n ($n \geqq 6$) *mit Würfeln die vier Würfel*

$$\begin{aligned} W_0&: \ 0, \ 0, \ 0, \ 0, \ 0, \ 0, \ \alpha^7, \ \ldots, \ \alpha^n, \\ W_1&: \ 1, \ \beta^2, \ 0, \ 0, \ 0, \ 0, \ \beta^7, \ \ldots, \ \beta^n, \\ W_2&: \ 0, \ 1, \ \gamma^3, \ 0, \ 0, \ 0, \ \gamma^7, \ \ldots, \ \gamma^n, \\ W_3&: \ \delta^1, \ 0, \ 1, \ 0, \ 0, \ 0, \ \delta^7, \ \ldots, \ \delta^n \end{aligned}$$

vorkommen und wenn dabei $\beta^2 > 0$, $\gamma^3 > 0$, $\delta^1 > 0$ *ist, so kommt auch ein* Z_5*-Paar vor.*

Zusatz. *Die Sonderrollen der ersten sechs Koordinaten könnten natürlich ebensogut von irgend sechs Koordinaten übernommen werden.*

Beweis. Unter den Würfeln der lückenlosen Ausfüllung müssen auch die acht Würfel

$$W': \ 1, \ \beta^2-1, \ 0, \ \pm\varepsilon^4, \ \pm\varepsilon^5, \ \pm\varepsilon^6, \ \varepsilon^7, \ \ldots, \ \varepsilon^n$$

entsprechend den acht Vorzeichenkombinationen vorkommen, wobei sich die ersten drei Koordinaten der Reihe nach aus $W_0 - W'$, $W_1 - W'$, $W_3 - W'$ ergeben. Wenn diese acht Würfel in einen zusammenfallen ($\varepsilon^4 = \varepsilon^5 = \varepsilon^6 = 0$),

so bildet dieser eine mit W_1 zusammen bereits ein Z_5-Paar. Andernfalls gibt es unter den acht Würfeln W' nach Hilfssatz 2 nebst Zusatz *entweder* ein Paar, bei dem von den Koordinatendifferenzen mit den Nummern 4, 5, 6 eine absolut gleich 1 ist und die anderen zwei gleich 0 sind, so daß dieses Paar, da auch die ersten drei Koordinatendifferenzen gleich 0 sind, ein Z_5-Paar ist; *oder* aber die acht Würfel W' reduzieren sich auf fünf, unter denen insbesondere die folgenden drei vorkommen:

$$\begin{aligned} W_2'&: \ 1,\ \beta^2-1,\ 0,\ *,\ *,\ 0,\ \varepsilon_2^7,\ \ldots,\ \varepsilon_2^n,\\ W_3'&: \ 1,\ \beta^2-1,\ 0,\ 0,\ *,\ *,\ \varepsilon_3^7,\ \ldots,\ \varepsilon_3^n,\\ W_4'&: \ 1,\ \beta^2-1,\ 0,\ *,\ 0,\ *,\ \varepsilon_4^7,\ \ldots,\ \varepsilon_4^n. \end{aligned}$$

Die Sterne bedeuten dabei ebenso wie später von 0 verschiedene Zahlen zwischen -1 und $+1$.

Analog stößt man auch, indem man die ersten drei Koordinaten ihre Rollen zyklisch tauschen läßt, auf ein Z_5-Paar oder es gibt die folgenden drei Würfel:

$$\begin{aligned} W_2''&: \ 0,\ 1,\ \gamma^3-1,\ *,\ *,\ 0,\ \zeta_2^7,\ \ldots,\ \zeta_2^n,\\ W_3''&: \ 0,\ 1,\ \gamma^3-1,\ 0,\ *,\ *,\ \zeta_3^7,\ \ldots,\ \zeta_3^n,\\ W_4''&: \ 0,\ 1,\ \gamma^3-1,\ *,\ 0,\ *,\ \zeta_4^7,\ \ldots,\ \zeta_4^n. \end{aligned}$$

Und durch abermalige zyklische Vertauschung findet man wieder ein Z_5-Paar oder es gibt die folgenden drei Würfel:

$$\begin{aligned} W_2'''&: \ \delta^1-1,\ 0,\ 1,\ *,\ *,\ 0,\ \eta_2^7,\ \ldots,\ \eta_2^n,\\ W_3'''&: \ \delta^1-1,\ 0,\ 1,\ 0,\ *,\ *,\ \eta_3^7,\ \ldots,\ \eta_3^n,\\ W_4'''&: \ \delta^1-1,\ 0,\ 1,\ *,\ 0,\ *,\ \eta_4^7,\ \ldots,\ \eta_4^n. \end{aligned}$$

Wir brauchen daher nur noch den Fall weiter zu behandeln, daß die neun Würfel W_k', W_k'', W_k''' $(k=2,3,4)$ vorkommen. Nun müssen aber weiter auch die drei Würfel

$$\begin{aligned} W_4&: \ -\vartheta_4^1,\ -\vartheta_4^2,\ -\vartheta_4^3,\ 1,\ \vartheta_4^5,\ \vartheta_4^6,\ \vartheta_4^7,\ \ldots,\ \vartheta_4^n,\\ W_5&: \ -\vartheta_5^1,\ -\vartheta_5^2,\ -\vartheta_5^3,\ \vartheta_5^4,\ 1,\ \vartheta_5^6,\ \vartheta_5^7,\ \ldots.\ \vartheta_5^n,\\ W_6&: \ -\vartheta_6^1,\ -\vartheta_6^2,\ -\vartheta_6^3,\ \vartheta_6^4,\ \vartheta_6^5,\ 1,\ \vartheta_6^7,\ \ldots.\ \vartheta_6^n \end{aligned}$$

vorkommen, wobei die drei Einser aus $W_0 - W_4$, $W_0 - W_5$, $W_0 - W_6$ folgen. Wenn dabei ϑ_4^5, ϑ_4^6 beide gleich 0 sind, so folgt

$$\begin{aligned} &\text{aus} \quad W_2' - W_4: \quad \vartheta_4^1 = 0,\\ &\text{aus} \quad W_2'' - W_4: \quad \vartheta_4^2 = 0,\\ &\text{aus} \quad W_2''' - W_4: \quad \vartheta_4^3 = 0. \end{aligned}$$

Daher bilden jetzt die Würfel W_0, W_4 ein Z_5-Paar. Ebenso erhält man leicht ein Z_5-Paar, wenn ϑ_5^4, ϑ_5^6 beide gleich 0 sind, und auch, wenn ϑ_6^4, ϑ_6^5 beide

gleich 0 sind. Wir nehmen daher jetzt an, daß keiner dieser drei Fälle vorliegt. Indem wir eventuell die fünfte und sechste Koordinate und gleichzeitig die Würfel W_5 und W_6 ihre Rollen tauschen lassen, dürfen wir

$$\vartheta_4^5 \neq 0$$

annehmen. Aus $W_4 - W_5$ folgt dann $\vartheta_5^4 = 0$ und, da ϑ_5^4, ϑ_5^6 nicht beide gleich 0 sind, ist

$$\vartheta_5^6 \neq 0.$$

Aus $W_5 - W_6$ folgt dann weiter $\vartheta_6^5 = 0$ und, da ϑ_6^4, ϑ_6^5 nicht beide gleich 0 sind, ist

$$\vartheta_6^4 \neq 0.$$

Aus $W_4 - W_6$ folgt dann aber $\vartheta_4^6 = 0$, und wir erhalten folgendes Bild:

$$\begin{aligned}
W_4&: \; -\vartheta_4^1, -\vartheta_4^2, -\vartheta_4^3, \; 1, \; \vartheta_4^5, \; 0, \; \vartheta_4^7, \ldots, \vartheta_4^n,\\
W_5&: \; -\vartheta_5^1, -\vartheta_5^2, -\vartheta_5^3, \; 0, \; 1, \; \vartheta_5^6, \; \vartheta_5^7, \ldots, \vartheta_5^n,\\
W_6&: \; -\vartheta_6^1, -\vartheta_6^2, -\vartheta_6^3, \; \vartheta_6^4, \; 0, \; 1, \; \vartheta_6^7, \ldots, \vartheta_6^n.
\end{aligned}$$

Nun muß auch noch der Würfel

$$W_7: \; -\vartheta_7^1, -\vartheta_7^2, -\vartheta_7^3, \; 1, \; \vartheta_4^5 - 1, \; 0, \; \vartheta_7^7, \ldots, \vartheta_7^n$$

vorhanden sein, wobei sich die vierte, fünfte, sechste Koordinate der Reihe nach aus $W_0 - W_7$, $W_4 - W_7$, $W_6 - W_7$ ergeben. Weiter folgt alsdann

$$\begin{aligned}
&\text{aus } W_4 - W_4' : \; \vartheta_4^1 = 0, \quad &&\text{aus } W_7 - W_4' : \; \vartheta_7^1 = 0,\\
&\text{aus } W_4 - W_4'' : \; \vartheta_4^2 = 0, \quad &&\text{aus } W_7 - W_4'' : \; \vartheta_7^2 = 0,\\
&\text{aus } W_4 - W_4''' : \; \vartheta_4^3 = 0, \quad &&\text{aus } W_7 - W_4''' : \; \vartheta_7^3 = 0.
\end{aligned}$$

Demnach bilden jetzt die Würfel W_4, W_7 ein Z_5-Paar, womit der Hilfssatz 3 bewiesen ist.

§ 6.

Die Existenz von Z_5-Paaren; erster Fall.

Satz 24. *Für $n \geqq 6$ gibt es in einer lückenlosen Ausfüllung des R_n mit Würfeln stets ein Z_5-Paar, für $n = 6$ also ein Zwillingspaar.*

Beweis. Nach Satz 23 gibt es ein Z_4-Paar, das wir nach § 2 in der Gestalt

$$\begin{aligned}
W_0&: \; 0, 0, 0, 0, 0, 0, \; 0, \ldots, 0,\\
W_1&: \; 1, 0, 0, 0, 0, \alpha^6, \alpha^7, \ldots, \alpha^n
\end{aligned}$$

annehmen dürfen. Wenn $\alpha^6 = 0$ ist, bilden W_0, W_1 bereits ein Z_5-Paar. Wenn aber $\alpha^6 > 0$, so gibt es noch die 16 Würfel

$$W': \; 0, \pm\beta^2, \pm\beta^3, \pm\beta^4, \pm\beta^5, \; 1, \; \beta^7, \ldots, \beta^n$$

entsprechend den 16 Vorzeichenkombinationen; die sechste und erste Koordinate ergeben sich dabei der Reihe nach aus $W_0 - W'$ und $W_1 - W'$. Nun sind zwei Fälle denkbar:

Erster Fall. Bei jeder Vorzeichenkombination ist wenigstens eine der vier Zahlen β^2, β^3, β^4, β^5 gleich 0.

Zweiter Fall. Bei einer gewissen Vorzeichenkombination sind β^2, β^3, β^4, β^5 alle vier von 0 verschieden.

Wir wollen in diesem Paragraphen den ersten Fall mit seinen verschiedenen Unterfällen behandeln, um dann im nächsten Paragraphen den zweiten Fall zu erledigen.

Fall 1a. Die Zahlen $\beta^2, \beta^3, \beta^4, \beta^5$ sind alle vier gleich 0 (bei einer und folglich bei jeder Vorzeichenkombination). In diesem Fall fallen die 16 Würfel W' in einen zusammen und dieser eine bildet mit W_0 zusammen ein Z_5-Paar.

Fall 1b. Bei jeder Vorzeichenkombination sind drei der Zahlen β^2, β^3, β^4, β^5 gleich 0, aber nicht alle vier. Jetzt reduzieren sich die 16 Würfel W' auf zwei, und zwar bei geeigneter Numerierung der Koordinaten auf die beiden

$$W'_1\colon\ 0,\quad \beta^2,\quad 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ \beta_1^7,\ \ldots,\ \beta_1^n,$$
$$W'_2\colon\ 0,\ \beta^2-1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ \beta_2^7,\ \ldots,\ \beta_2^n.$$

Diese bilden aber ein Z_5-Paar.

Fall 1c. Bei jeder Vorzeichenkombination sind wenigstens zwei der Zahlen β^2, β^3, β^4, β^5 gleich 0, und einmal auch *nur* zwei. Jetzt kommen bei geeigneter Numerierung der Koordinaten und nach eventueller Vorzeichenänderung einiger Koordinaten unter den 16 Würfeln W' die folgenden drei vor:

$$W'_1\colon\ 0,\quad \beta^2,\quad \beta^3,\quad 0,\ 0,\ 1,\ \beta_1^7,\ \ldots,\ \beta_1^n,$$
$$W'_2\colon\ 0,\ \beta^2-1,\quad \beta_2^3,\quad \beta_2^4,\ \beta_2^5,\ 1,\ \beta_2^7,\ \ldots,\ \beta_2^n,$$
$$W'_3\colon\ 0,\quad \beta_3^2,\quad \beta^3-1,\ \beta_3^4,\ \beta_3^5,\ 1,\ \beta_3^7,\ \ldots,\ \beta_3^n.$$

Aus $W'_2 - W'_3$ folgt, daß wenigstens eine der beiden Gleichungen gilt: $\beta_3^2 = \beta^2$, $\beta_2^3 = \beta^3$. Indem wir nötigenfalls die zweite und dritte Koordinate und gleichzeitig die Würfel W'_2 und W'_3 ihre Rollen tauschen lassen, dürfen wir annehmen, daß $\beta_2^3 = \beta^3$ ist. Dann ist aber, da es sich um den Fall 1c handelt, $\beta_2^4 = 0$, $\beta_2^5 = 0$. Daher bilden jetzt die Würfel W'_1, W'_2 ein Z_5-Paar.

Fall 1d. Bei jeder Vorzeichenkombination ist wenigstens eine der Zahlen β^2, β^3, β^4, β^5 gleich 0 und einmal auch *nur* eine. Jetzt kommen bei geeigneter Numerierung der Koordinaten und nach eventueller Vorzeichenänderung einiger Koordinaten unter den 16 Würfeln W' die folgenden vier vor:

$$W'_1\colon\ 0,\quad \beta^2,\quad \beta^3,\quad \beta^4,\quad 0,\quad 1,\ \beta_1^7,\ \ldots,\ \beta_1^n,$$
$$W'_2\colon\ 0,\ \beta^2-1,\quad \beta_2^3,\quad \beta_2^4,\quad \beta_2^5,\ 1,\ \beta_2^7,\ \ldots,\ \beta_2^n,$$
$$W'_3\colon\ 0,\quad \beta_3^2,\quad \beta^3-1,\quad \beta_3^4\ ,\ \beta_3^5,\ 1,\ \beta_3^7,\ \ldots,\ \beta_3^n,$$
$$W'_4\colon\ 0,\quad \beta_4^2,\quad \beta_4^3,\quad \beta^4-1,\ \beta_4^5,\ 1,\ \beta_4^7,\ \ldots,\ \beta_4^n.$$

Wenn nun $\beta_2^3 = \beta^3$ und $\beta_2^4 = \beta^4$, so ist, da der Fall 1d vorliegt, $\beta_2^5 = 0$ und die Würfel W', W'_2 bilden ein Z_5-Paar. Sei also, indem wir nötigenfalls die

dritte und vierte Koordinate und gleichzeitig die Würfel W_3' und W_4' ihre Rollen tauschen lassen,

$$\beta_2^3 \neq \beta^3.$$

Aus $W_2' - W_3'$ folgt dann $\beta_3^2 = \beta^2$. Wenn auch $\beta_3^4 = \beta^4$, so ist $\beta_3^5 = 0$ (wegen Fall 1d) und W_1', W_3' bilden ein Z_5-Paar. Sei daher

$$\beta_3^4 \neq \beta^4.$$

Aus $W_3' - W_4'$ folgt dann $\beta_4^3 = \beta^3$. Wenn auch $\beta_4^2 = \beta^2$, so ist $\beta_4^5 = 0$ (wegen Fall 1d) und W_1', W_4' bilden ein Z_5-Paar. Sei daher

$$\beta_4^2 \neq \beta^2.$$

Aus $W_2' - W_4'$ folgt dann $\beta_2^4 = \beta^4$, und man erhält das Bild

$$\begin{aligned}
W_1'&: \ 0, \quad \beta^2, \quad \beta^3, \quad \beta^4, \quad 0, \ 1, \ \beta_1^7, \ \ldots, \ \beta_1^n,\\
W_2'&: \ 0, \ \beta^2 - 1, \quad \beta_2^3, \quad \beta^4, \quad \beta_2^5, \ 1, \ \beta_2^7, \ \ldots, \ \beta_2^n,\\
W_3'&: \ 0, \quad \beta^2, \quad \beta^3 - 1, \quad \beta_3^4, \quad \beta_3^5, \ 1, \ \beta_3^7, \ \ldots, \ \beta_3^n,\\
W_4'&: \ 0, \quad \beta_4^2, \quad \beta^3, \quad \beta^4 - 1, \ \beta_4^5, \ 1, \ \beta_4^7, \ \ldots, \ \beta_4^n.
\end{aligned}$$

Falls $\beta_2^3 > 0$ ist, kommt unter den 16 Würfeln W' auch noch der folgende vor:

$$W_5'\colon \ 0, \ \beta^2 - 1, \ \beta_2^3 - 1, \ \beta^4, \ \beta_5^5, \ 1, \ \beta_5^7, \ \ldots, \ \beta_5^n;$$

seine zweite, dritte, vierte Koordinate folgen der Reihe nach aus $W_3' - W_5'$, $W_2' - W_5'$, $W_4' - W_5'$. Da der Fall 1d vorliegt, sind aber jetzt auch β_2^5 und β_3^5 gleich 0, so daß die Würfel W_2', W_5' ein Z_5-Paar bilden. Analog ergibt sich auch, indem man die Rollen der zweiten, dritten, vierten Koordinate und gleichzeitig die Rollen der Würfel W_2', W_3', W_4' zyklisch vertauscht, ein Z_5-Paar, falls $\beta_3^4 > 0$, und auch, falls $\beta_4^2 > 0$ ist.

Somit bleibt nur noch die Möglichkeit, $\beta_2^3 = 0$, $\beta_3^4 = 0$, $\beta_4^2 = 0$ zu prüfen. Dann hat man das Bild

(A)
$$\begin{aligned}
W_1'&: \ 0, \quad \beta^2, \quad \beta^3, \quad \beta^4, \quad 0, \ 1, \ \beta_1^7, \ \ldots, \ \beta_1^n,\\
W_2'&: \ 0, \ \beta^2 - 1, \quad 0, \quad \beta^4, \quad \beta_2^5, \ 1, \ \beta_2^7, \ \ldots, \ \beta_2^n,\\
W_3'&: \ 0, \quad \beta^2, \quad \beta^3 - 1, \quad 0, \quad \beta_3^5, \ 1, \ \beta_3^7, \ \ldots, \ \beta_3^n,\\
W_4'&: \ 0, \quad 0, \quad \beta^3, \quad \beta^4 - 1, \ \beta_4^5, \ 1, \ \beta_4^7, \ \ldots, \ \beta_4^n.
\end{aligned}$$

Wenn β_2^5, β_3^5, β_4^5 alle drei gleich 0 sind, erhält man, wenn man durch Parallelverschiebung die ersten sechs Koordinaten von W_1' zu 0 macht und dann bei den ersten vier Koordinaten eine Vorzeichenänderung vornimmt, aus (A) das Bild

$$\begin{aligned}
\overline{W}_1'&: \ 0, \ 0, \ 0, \ 0, \ 0, \ 0, \ \beta_1^7, \ \ldots, \ \beta_1^n,\\
\overline{W}_2'&: \ 0, \ 1, \ \beta^3, \ 0, \ 0, \ 0, \ \beta_2^7, \ \ldots, \ \beta_2^n,\\
\overline{W}_3'&: \ 0, \ 0, \ 1, \ \beta^4, \ 0, \ 0, \ \beta_3^7, \ \ldots, \ \beta_3^n,\\
\overline{W}_4'&: \ 0, \ \beta^2, \ 0, \ 1, \ 0, \ 0, \ \beta_4^7, \ \ldots, \ \beta_4^n.
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich aber nach Hilfssatz 3 nebst Zusatz ein Z_5-Paar.

Wir nehmen daher jetzt an, daß im Bild (A) die Zahlen β_2^5, β_3^5, β_4^5 nicht alle drei gleich 0 sind, und zwar dürfen wir annehmen, daß speziell $\beta_2^5 > 0$ ist, weil sich das nötigenfalls durch zyklische Umnumerierung der zweiten, dritten, vierten Koordinate sowie der Würfel W_2', W_3', W_4' erreichen läßt. Dann kommt unter den 16 Würfeln W' auch noch der Würfel

$$W_5': \quad 0,\ \beta^2 - 1,\ \beta_5^3,\ \beta_5^4,\ \beta_2^5 - 1,\ 1,\ \beta_5^7,\ \ldots,\ \beta_5^n$$

vor, dessen zweite Koordinate aus $W_1' - W_5'$ folgt.

Ist $\beta_4^5 \neq \beta_2^5$, so folgt aus $W_4' - W_5'$: $\beta_5^4 = \beta^4$ und dann ist $\beta_5^3 = 0$ (wegen Fall 1d), so daß jetzt die Würfel W_2', W_5' ein Z_5-Paar bilden. Sei daher jetzt $\beta_4^5 = \beta_2^5$, also insbesondere $\beta_4^5 > 0$. Dann gibt es unter den 16 Würfeln W' auch noch den Würfel

$$W_6': \quad 0,\ \beta_6^2,\ \beta_6^3,\ \beta^4 - 1,\ \beta_4^5 - 1,\ 1,\ \beta_6^7,\ \ldots,\ \beta_6^n,$$

dessen vierte Koordinate aus $W_1' - W_6'$ folgt. Ist $\beta_3^5 \neq \beta_4^5$, so folgt aus $W_3' - W_6'$: $\beta_6^3 = \beta^3$, und dann ist $\beta_6^2 = 0$ (wegen Fall 1d), so daß jetzt die Würfel W_4', W_6' ein Z_5-Paar bilden. Hiernach bleibt nur noch die Möglichkeit $\beta_2^5 = \beta_4^5 = \beta_3^5$ zu untersuchen. Wenn man jetzt durch Parallelverschiebung die ersten sechs Koordinaten von W_2' zu 0 macht und bei der dritten und vierten Koordinate eine Vorzeichenänderung vornimmt, liefern die letzten drei Würfel von (A) das Bild

$$\begin{aligned}
W_2': &\quad 0,\quad 0,\quad\ \ 0,\quad\ \ 0,\ 0,\ 0,\ \beta_2^7,\ \ldots,\ \beta_2^n,\\
W_3': &\quad 0,\quad 1,\quad 1-\beta^3,\ \beta^4,\ 0,\ 0,\ \beta_3^7,\ \ldots,\ \beta_3^n,\\
W_4': &\quad 0,\ 1-\beta^2,\quad -\beta^3,\ 1,\ 0,\ 0,\ \beta_4^7,\ \ldots,\ \beta_4^n.
\end{aligned}$$

Hierzu gibt es nun auch die acht Würfel

$$W'': \quad \pm\gamma^1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \pm\gamma^5,\ \pm\gamma^6,\ \gamma^7,\ \ldots,\ \gamma^n$$

entsprechend den acht Vorzeichenkombinationen; die zweite, dritte, vierte Koordinate folgen dabei der Reihe nach aus $W_3' - W''$, $W_2' - W''$, $W_4' - W''$.

Fallen die acht Würfel W'' in einen zusammen ($\gamma^1 = \gamma^5 = \gamma^6 = 0$), so bildet dieser eine mit W_2' zusammen ein Z_5-Paar. Andernfalls enthalten die acht Würfel W'' nach Hilfssatz 2 nebst Zusatz *entweder* ein Paar, bei dem von den Koordinatendifferenzen mit den Nummern 1, 5, 6 eine absolut gleich 1 ist und die anderen zwei gleich 0 sind, so daß dieses Paar, da auch die zweite, dritte und vierte Koordinatendifferenz gleich 0 sind, ein Z_5-Paar bildet; *oder* aber die acht Würfel W'' reduzieren sich auf fünf, unter denen nach eventueller Vertauschung von Koordinaten und Vorzeichenänderung einiger Koordinaten insbesondere die folgenden vier vorkommen:

$$\begin{aligned}
W_1'': &\quad \gamma^1,\quad 0,\ 1,\ 0,\quad \gamma^5,\quad\ \ \gamma^6,\quad \gamma_1^7,\ \ldots,\ \gamma_1^n,\\
W_2'': &\quad \gamma^1 - 1,\ 0,\ 1,\ 0,\quad \gamma^5,\quad\ \ 0,\quad \gamma_2^7,\ \ldots,\ \gamma_2^n,\\
W_3'': &\quad\ \ 0,\quad 0,\ 1,\ 0,\ \gamma^5 - 1,\quad \gamma^6,\quad \gamma_3^7,\ \ldots,\ \gamma_3^n,\\
W_4'': &\quad \gamma^1,\quad 0,\ 1,\ 0,\quad\ \ 0,\quad \gamma^6 - 1,\ \gamma_4^7,\ \ldots,\ \gamma_4^n.
\end{aligned}$$

Macht man jetzt durch Parallelverschiebung die ersten sechs Koordinaten von W_1'' zu 0 und nimmt bei einigen Koordinaten eine Vorzeichenänderung vor, so ergibt sich das Bild

$$\begin{aligned}
W_1'' &: \quad 0, \ 0, \ 0, \ 0, \ 0, \ 0, \ \gamma_1^7, \ \ldots, \ \gamma_1^n, \\
W_2'' &: \quad 1, \ 0, \ 0, \ 0, \ 0, \ \gamma^6, \ \gamma_2^7, \ \ldots, \ \gamma_2^n, \\
W_3'' &: \quad \gamma^1, \ 0, \ 0, \ 0, \ 1, \ 0, \ \gamma_3^7, \ \ldots, \ \gamma_3^n, \\
W_4'' &: \quad 0, \ 0, \ 0, \ 0, \ \gamma^5, \ 1, \ \gamma_4^7, \ \ldots, \ \gamma_4^n.
\end{aligned}$$

Jetzt lehrt aber, wenn man noch die fünfte und sechste Koordinate und gleichzeitig die Würfel W_3'' und W_4'' miteinander vertauscht, der Hilfssatz 3 nebst Zusatz, daß ein Z_5-Paar vorhanden ist.

§ 7.

Die Existenz von Z_5-Paaren; zweiter Fall.

Wir kommen jetzt zum zweiten der zu Beginn des § 6 unterschiedenen Fälle. Durch eventuelle Vorzeichenänderung einiger Koordinaten können wir erreichen, daß es die Kombination $++++$ ist, bei der die Zahlen β^2, β^3, β^4, β^5 alle vier von 0 verschieden sind. Dann kommen unter den 16 Würfeln W' insbesondere die folgenden fünf vor:

$$\begin{aligned}
W_1' &: \quad 0, \ \beta^2, \ \beta^3, \ \beta^4, \ \beta^5, \ 1, \ \beta_1^7, \ \ldots, \ \beta_1^n, \\
W_2' &: \quad 0, \ \beta^2 - 1, \ \beta_2^3, \ \beta_2^4, \ \beta_2^5, \ 1, \ \beta_2^7, \ \ldots, \ \beta_2^n, \\
W_3' &: \quad 0, \ \beta_3^2, \ \beta^3 - 1, \ \beta_3^4, \ \beta_3^5, \ 1, \ \beta_3^7, \ \ldots, \ \beta_3^n, \\
W_4' &: \quad 0, \ \beta_4^2, \ \beta_4^3, \ \beta^4 - 1, \ \beta_4^5, \ 1, \ \beta_4^7, \ \ldots, \ \beta_4^n, \\
W_5' &: \quad 0, \ \beta_5^2, \ \beta_5^3, \ \beta_5^4, \ \beta^5 - 1, \ 1, \ \beta_5^7, \ \ldots, \ \beta_5^n.
\end{aligned}$$

Aus den sechs paarweisen Differenzen $W_k' - W_l'$ $(k, l = 2, 3, 4, 5)$ folgen dann die sechs Gleichungen

$$(\beta_k^l - \beta^l)(\beta_l^k - \beta^k) = 0 \qquad (k, l = 2, 3, 4, 5; \ k \neq l).$$

Wenn es nun zu jedem Index k höchstens *einen* Index l gäbe, für den $\beta_k^l = \beta^l$ ist, so wären von den sechs Gleichungen höchstens vier erfüllt, weil ja höchstens vier von den zwölf Differenzen $\beta_k^l - \beta^l$ verschwinden würden. Es gibt also einen Index k, zu dem wenigstens zwei solche l gehören. Durch geeignete Permutation der Nummern 2, 3, 4, 5 bei Koordinaten und Würfeln können wir annehmen, daß

$$\beta_2^4 = \beta^4, \quad \beta_2^5 = \beta^5$$

ist. Wir können dann aber weiter annehmen, daß auch

$$\beta_3^5 = \beta^5$$

ist. Wenn nämlich $\beta_3^5 \neq \beta^5$, aber vielleicht $\beta_3^4 = \beta^4$, so wird durch Vertauschung der Nummern 4, 5 bei Koordinaten und Würfeln das Gewünschte erreicht. Wenn aber $\beta_3^5 \neq \beta^5$ und $\beta_3^4 \neq \beta^4$, so ist

$$\beta_5^3 = \beta^3, \ \beta_4^3 = \beta^3$$

und außerdem

$$(\beta_4^5 - \beta^5)(\beta_5^4 - \beta^4) = 0.$$

Falls der erste Faktor des Produktes verschwindet, hat man u. a. die Gleichungen

$$\beta_4^3 = \beta^3, \quad \beta_4^5 = \beta^5, \quad \beta_2^5 = \beta^5$$

und durch die Permutation $\begin{pmatrix} 2, & 3, & 4, & 5 \\ 3, & 4, & 2, & 5 \end{pmatrix}$ bei Koordinaten und Würfeln entsteht das Gewünschte. Falls der zweite Faktor verschwindet, hat man u. a. die Gleichungen

$$\beta_5^3 = \beta^3, \quad \beta_5^4 = \beta^4, \quad \beta_2^4 = \beta^4$$

und durch die Permutation $\begin{pmatrix} 2, & 3, & 4, & 5 \\ 3, & 4, & 5, & 2 \end{pmatrix}$ entsteht das Gewünschte.

Hiernach dürfen wir also annehmen, daß

$$\beta_2^4 = \beta^4, \quad \beta_2^5 = \beta^5, \quad \beta_3^5 = \beta^5$$

ist. Wenn dann außerdem $\beta_2^3 = \beta^3$ ist, so bilden die Würfel W_1', W_2' ein Z_5-Paar. Sei also

$$\beta_2^3 \neq \beta^3$$

und folglich

$$\beta_3^2 = \beta^2.$$

Wenn auch $\beta_3^4 = \beta^4$, so bilden die Würfel W_1', W_3' ein Z_5-Paar. Sei also

$$\beta_3^4 \neq \beta^4.$$

Von den Würfeln W_1' bis W_5' gewinnen nunmehr die ersten drei das folgende Aussehen, während die letzten zwei überhaupt nicht mehr gebraucht werden:

$$\begin{aligned} W_1'&: \ 0, \quad \beta^2, \quad \beta^3, \quad \beta^4, \ \beta^5, \ 1, \ \beta_1^7, \ \ldots, \ \beta_1^n, \\ W_2'&: \ 0, \ \beta^2 - 1, \quad \beta_2^3, \quad \beta^4, \ \beta^5, \ 1, \ \beta_2^7, \ \ldots, \ \beta_2^n, \\ W_3'&: \ 0, \quad \beta^2, \quad \beta^3 - 1, \ \beta_3^4, \ \beta^5, \ 1, \ \beta_3^7, \ \ldots, \ \beta_3^n. \end{aligned}$$

Wenn man jetzt durch Parallelverschiebung die ersten sechs Koordinaten von W_1' zu 0 macht und dann bei einigen Koordinaten eine Vorzeichenänderung vornimmt, erhält man folgendes Bild:

$$\begin{aligned} W_1'&: \ 0, \ 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \ 0, \ \beta_1^7, \ \ldots, \ \beta_1^n, \\ W_2'&: \ 0, \ 1, \ \beta^3 - \beta_2^3, \quad 0, \quad 0, \ 0, \ \beta_2^7, \ \ldots, \ \beta_2^n, \\ W_3'&: \ 0, \ 0, \quad 1, \quad \beta^4 - \beta_3^4, \ 0, \ 0, \ \beta_3^7, \ \ldots, \ \beta_3^n. \end{aligned}$$

Nun müssen aber auch die acht Würfel

$$W'': \ \pm\gamma^1,\ 0,\ 1,\ \beta^1-\beta_3^1+1,\ \pm\gamma^5,\ \pm\gamma^6,\ \gamma^7,\ \ldots,\ \gamma^n$$

entsprechend den acht Vorzeichenkombinationen vorhanden sein; die vierte, dritte, zweite Koordinate folgen dabei der Reihe nach aus $W_3' - W''$, $W_1' - W''$, $W_2' - W''$. Wenn die acht Würfel W'' in einen zusammenfallen ($\gamma^1 = \gamma^5 = \gamma^6 = 0$), so bildet dieser eine mit W_3' zusammen ein Z_5-Paar. Andernfalls enthalten die acht Würfel nach Hilfssatz 2 nebst Zusatz *entweder* ein Paar, bei dem von den Koordinatendifferenzen mit den Nummern 1, 5, 6 eine absolut gleich 1 ist und die anderen zwei gleich 0 sind, so daß dieses Paar, da auch die zweite, dritte und vierte Koordinatendifferenz gleich 0 sind, ein Z_5-Paar bildet; *oder* aber die acht Würfel reduzieren sich auf fünf, unter denen nach eventueller Vertauschung von Koordinaten und Vorzeichenänderung einiger Koordinaten insbesondere die folgenden vier vorkommen:

$$\begin{aligned}
W_1'': &\quad \gamma^1,\ 0,\ 1,\ \beta^1-\beta_3^1+1,\ \gamma^5,\ \gamma^6,\ \gamma_1^7,\ \ldots,\ \gamma_1^n,\\
W_2'': &\quad \gamma^1-1,\ 0,\ 1,\ \beta^1-\beta_3^1+1,\ \gamma^5,\ 0,\ \gamma_2^7,\ \ldots,\ \gamma_2^n,\\
W_3'': &\quad 0,\ 0,\ 1,\ \beta^1-\beta_3^1+1,\ \gamma^5-1,\ \gamma^6,\ \gamma_3^7,\ \ldots,\ \gamma_3^n,\\
W_4'': &\quad \gamma^1,\ 0,\ 1,\ \beta^1-\beta_3^1+1,\ 0,\ \gamma^6-1,\ \gamma_4^7,\ \ldots,\ \gamma_4^n.
\end{aligned}$$

Macht man jetzt durch Parallelverschiebung die ersten sechs Koordinaten von W_1'' zu 0 und nimmt dann bei einigen Koordinaten eine Vorzeichenänderung vor, so erhält man das Bild

$$\begin{aligned}
W_1'': &\quad 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \gamma_1^7,\ \ldots.\ \gamma_1^n,\\
W_2'': &\quad 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \gamma^6,\ \gamma_2^7,\ \ldots.\ \gamma_2^n,\\
W_3'': &\quad \gamma^1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ \gamma_3^7,\ \ldots,\ \gamma_3^n,\\
W_4'': &\quad 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \gamma^5,\ 1,\ \gamma_4^7,\ \ldots,\ \gamma_4^n,
\end{aligned}$$

welches mit dem Schlußbild des § 6 übereinstimmt. Genau wie dort folgt daraus die Existenz eines Z_5-Paares. Damit ist der Beweis von Satz 24 beendet.

(Eingegangen am 17. November 1939.)

Über die Differentiation von Maßfunktionen.

Seinem Freunde Perron zum 60. Geburtstag am 7. Mai 1940 gewidmet.

Von

C. Carathéodory in München.

1. H. Lebesgue hat bekanntlich gezeigt, daß man jede summierbare Funktion $f(P)$, bis auf eine Nullmenge, aus ihrem unbestimmten Integral

$$F(e) = \int_e f(P)\, dm \tag{1.1}$$

mit Hilfe von Operationen wiedergewinnen kann, welche denen der gewöhnlichen Differentiation nachgebildet sind[1]). Ein ähnliches Resultat kann nun auch abgeleitet werden, wenn man das Integral $F(e)$ und das Lebesguesche Maß $m(e)$ durch Maßfunktionen ersetzt, welche ganz abstrakt definiert sind. Die Derivierten, mit denen Lebesgue arbeitet, können aber hier nicht mehr gebildet werden, und man muß diese überraschende Tatsache mit ganz anderen Schlüssen begründen.

Auf den folgenden Seiten soll, ohne auf die Beweise einzugehen, die Methode skizziert werden, welche zu diesem Ergebnis führt. Die Ausführungen hierzu sind im zweiten Bande meiner (neuen) reellen Funktionen enthalten, dessen Erscheinen in absehbarer Zeit beabsichtigt ist.

2. Die allgemeinsten Maßfunktionen $\varphi(A)$, die man sich denken kann, sind Funktionen von *Somen*, d. h. von Dingen, für welche die Operationen der Vereinigung $A + B$, des Durchschnitts AB und der Differenz $(A - AB)$ erklärt sind, und für welche auch die Vereinigung (und der Durchschnitt) von abzählbar vielen Somen existieren[2]).

Im folgenden werden wir das leere Soma mit O bezeichnen; ferner werden wir für die Tatsache, daß zwei Somen A und B fremd sind, $A \circ B$ und für die Tatsache, daß A Teil von B ist, $A \subseteq B$ schreiben.

Jede Menge $\mathfrak{A}$ von Somen, für welche mit $A_j \in \mathfrak{A}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ auch $\sum_j + A_j \in \mathfrak{A}$ ist und außerdem $(A_j - A_j A_k) \in \mathfrak{A}$ ist, soll ein *vollkommener Ring* von Somen genannt werden[3]).

---

[1]) Siehe z. B. C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig und Berlin, Teubner 1918 (2. Aufl., 1927), Kap. IX.

[2]) Vgl. C. Carathéodory, Entwurf für eine Algebraisierung des Integralbegriffs, Münch. Sitzungsber. 1938, S. 27.

[3]) In der unter [2]) zitierten Arbeit habe ich, dem Gebrauch der Mengenlehre folgend, von vollkommenen *Körpern* von Somen gesprochen. Die Somen können aber am bequemsten als Elemente einer *Booleschen Algebra* angesehen werden, und vom Standpunkte dieser Algebra ist $\mathfrak{A}$ ein *Ring*.

Wird nun jedem Soma X eines vollkommenen Ringes $\mathfrak{A}$ eine reelle Zahl $\varphi(X) > -\infty$ zugeordnet und ist immer mit

$$X \in \mathfrak{A}, \quad Y_j \in \mathfrak{A}\ (j = 1, 2, \ldots), \quad X \subseteq \sum_j \dot{+}\, Y_j \tag{2.1}$$

die Relation

$$\varphi(X) \leqq \sum_j \varphi(Y_j) \tag{2.2}$$

erfüllt, so soll $\varphi(X)$ eine *Maßfunktion* genannt werden. Aus dieser Definition folgt, daß $\varphi(X) \geqq 0$ sein muß, nicht aber, daß $\varphi(X)$ immer endlich sein soll; eine Maßfunktion darf für gewisse Somen den Wert $+\infty$ annehmen.

Ein Soma U heißt *meßbar* für $\varphi(X)$, wenn für alle $X \in \mathfrak{A}$ die Gleichung

$$\varphi(X) = \varphi(X\,U) + \varphi(X - X\,U) \tag{2.3}$$

immer besteht. Ist $\varphi(O) > 0$, so zeigt man, daß überhaupt keine Somen aus $\mathfrak{A}$ meßbar sein können. Gibt es aber meßbare Somen, so bildet ihre Gesamtheit $\mathfrak{M}_\varphi$ einen vollkommenen Ring, den *Meßbarkeitsring* von $\varphi(X)$. Auf ihrem Meßbarkeitsring ist jede Maßfunktion *totaladditiv*: sind m. a. W. endlich oder abzählbar unendlich viele, paarweise fremde Somen $U_1, U_2, \ldots$ aus $\mathfrak{M}_\varphi$ vorhanden, und setzt man

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots. \tag{2.4}$$

so muß man haben

$$\varphi(U) = \sum_j \varphi(U_j). \tag{2.5}$$

Der Meßbarkeitsring enthält alle *Nullsomen* von $\varphi(X)$, d. h. alle Somen N, für welche

$$\varphi(N) = 0 \tag{2.6}$$

ist. Die Gesamtheit $\mathfrak{N}_\varphi$ der Nullsomen ist ebenfalls ein vollkommener Ring, den wir den *Nullring* von $\varphi(X)$ nennen werden.

3. Es ist bequem, noch folgende Terminologie einzuführen: es seien $\varphi(X)$ und $\psi(X)$ zwei Maßfunktionen mit demselben Definitionsbereich $\mathfrak{A}$, den Meßbarkeitsringen $\mathfrak{M}_\varphi$ und $\mathfrak{M}_\psi$ und den Nullringen $\mathfrak{N}_\varphi$ und $\mathfrak{N}_\psi$.

Ist dann erstens $\mathfrak{M}_\varphi < \mathfrak{M}_\psi$, d. h. ist jedes für $\varphi(X)$ meßbares Soma auch für $\psi(X)$ meßbar, so soll $\psi(X)$ *totalmeßbar* relativ zu $\varphi(X)$ genannt werden.

Ist andererseits $\mathfrak{N}_\varphi < \mathfrak{N}_\psi$, so soll $\psi(X)$ *totalstetig* relativ zu $\varphi(X)$ genannt werden.

Kann man endlich jedem Soma X aus $\mathfrak{A}$ ein Soma Y aus $\mathfrak{A}$ zuordnen, für welches man gleichzeitig hat

$$\varphi(Y) = 0, \quad \psi(X) = \psi(XY), \tag{3.1}$$

so soll $\psi(X)$ *entartet* relativ zu $\varphi(X)$ genannt werden.

4. Der Nullring $\mathfrak{N}_\varphi$ einer Maßfunktion $\varphi(X)$ hat folgende Eigenschaft:

(4. 1) Aus $X \in \mathfrak{N}$, $Y \in \mathfrak{A}$ und $Y \subset X$ folgt $Y \in \mathfrak{N}$.

Die Bedingung (4. 1) ist nun identisch mit dem Kriterium, welches in der Algebra ein *Ideal* charakterisiert. Man kann in der Tat $\mathfrak{N}$ als Ideal benutzen und die Restklassen von $\mathfrak{A}$ mod $\mathfrak{N}$ bilden[4]). Diese Restklassen können nun als neue Somen X' betrachtet werden, welche durch eine Homomorphie

$$X' = \sigma X$$

mit den alten verbunden sind. Durch diese Homomorphie wird die Maßfunktion $\varphi(X)$ auf eine Maßfunktion

$$\varphi'(X') = \varphi'(\sigma X) = \varphi(X)$$

maßtreu abgebildet. Der Nullring $\mathfrak{N}'$ der Maßfunktion $\varphi'(X')$ besteht aus dem leeren Soma O' allein. Eine Maßfunktion, deren Nullring kein anderes Soma als das leere Soma enthält, soll eine *reduzierte* Maßfunktion genannt werden.

5. Um Integrale definieren zu können, brauchen wir den Begriff der *Ortsfunktion*. Der Definitionsbereich einer Ortsfunktion soll immer aus allen Somen X aus $\mathfrak{A}$ bestehen, welche Teile eines festen Somas M von $\mathfrak{A}$ sind. Wird allen diesen Somen immer ein und dieselbe Zahl h zugeordnet, so haben wir die konstante Ortsfunktion $f \equiv h$ vor uns. Durch die Formel

$$\text{(5. 1)} \qquad \begin{cases} M = M_1 + M_2 + \ldots + M_p, \\ f \equiv h_j \quad \text{auf } M_j \quad \text{für } j = 1, 2, \ldots, p \end{cases}$$

wird eine *endlichwertige* Ortsfunktion definiert. Auf jedem *nicht leeren* Soma $X \subseteq M$ ist dann die *untere Grenze* $\alpha(X)$ und die *obere Grenze* $\beta(X)$ einer gegebenen endlichwertigen Ortsfunktion f in naheliegender Weise berechenbar.

Ferner kann man mit endlichwertigen Ortsfunktionen ebenso wie mit gewöhnlichen reellen Zahlen rechnen und z. B. aus zwei solchen Funktionen f und g die weiteren Funktionen

$$\text{(5. 2)} \qquad f \pm g,\ f\,g,\ f/g \quad \text{usf.}$$

bestimmen.

Man kann auch den Begriff von *gleichmäßig konvergenten* Folgen von endlichwertigen Ortsfunktionen bilden, und diesen dazu benutzen, um allgemeinere Ortsfunktionen zu definieren.

Es ist aber bequemer, die Theorie der Ortsfunktionen auf den Begriff der *Somenskalen* zu begründen: wir ordnen jeder endlichen reellen Zahl y ein Soma $S(y)$ zu, und nehmen an, daß mit $y < z$ immer $S(y) \subseteq S(z)$ ist. Der Inbegriff aller Somenskalen $S(y)$, $T(y)$, ..., für welche gilt

$$\text{(5. 3)} \qquad \text{aus } y < z \text{ folgt } S(y) \subseteq T(z) \text{ und } T(y) \subseteq S(z)$$

[4]) Vgl. hierzu C. Carathéodory, Die Homomorphien von Somen und die Multiplikation von Inhaltsfunktionen. Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa (II) **8** (1939), S. 105—130.

stellt eine Ortsfunktion dar. Für jedes nicht leere Soma X ist dann $\alpha(X)$ gleich der oberen Grenze der Zahlen y, für welche $X \circ S(y)$ und $\beta(X)$ gleich der unteren Grenze der Zahlen z, für welche $X \subseteq S(z)$ ist. Jede durch eine der ihr zugeordneten Somenskalen definierte beschränkte Ortsfunktion kann durch monoton wachsende, gleichmäßig konvergente Folgen von endlichwertigen Ortsfunktionen dargestellt werden. Diese Eigenschaft erlaubt die Operationen (5. 2) auch für beliebige Ortsfunktionen zu definieren.

6. Ist nun $\mathfrak{M}$ ein vollkommener Ring von Somen, so gibt es Ortsfunktionen f, welche durch Somenskalen $S(y)$ definiert werden, für welche $S(y) \in \mathfrak{M}$ $(-\infty < y < +\infty)$ ist. Die Gesamtheit dieser speziellen Ortsfunktionen bildet einen *Körper von Ortsfunktionen mit dem Fundamentalring* $\mathfrak{M}$.

Ist ferner $\mathfrak{M}$ gleich dem Meßbarkeitsring $\mathfrak{M}_\varphi$ einer Maßfunktion $\varphi(X)$, so heißen die verschiedenen Funktionen des Körpers *meßbar* für $\varphi(X)$. Auf meßbare Ortsfunktionen kann man den bekannten Satz von Egoroff übertragen: ist auf einem Soma M, für welches $\varphi(M) < +\infty$ ist, eine Folge von Ortsfunktionen $f_1, f_2, \ldots$ konvergent, so kann man jeder positiven Zahl ε ein Teil M_ε von M zuordnen, so daß erstens $\varphi(M_\varepsilon) < \varepsilon$ ist, und daß zweitens die Folge der f_i auf $(M - M_\varepsilon)$ *gleichmäßig* konvergiert.

7. Wir wollen jetzt das Integral

$$\psi(X) = \int_X f \, d\varphi \tag{7. 1}$$

definieren. Ist erstens die Funktion f unter dem Integral *endlichwertig*, also z. B. gleich der Funktion (5. 1), so setze man

$$\psi(X) = h_1 \varphi(XM_1) + h_2 \varphi(XM_2) + \ldots + h_p \varphi(XM_p). \tag{7. 2}$$

Man sieht sofort ein, daß die Meßbarkeit von f eine *notwendige* Voraussetzung ist, falls für $h_1 = h_2 = \ldots = h_p = h$ die Gleichung $\psi(X) = h \varphi(X)$ bestehen soll. Wir wollen also das Integral (7. 1) nur für solche Ortsfunktionen f bilden, die meßbar für $\varphi(X)$ sind.

Hierauf kann man versuchen, das Integral (7. 1) für beliebige meßbare, nicht negative Ortsfunktionen f mit Hilfe eines Grenzüberganges zu berechnen, indem man f durch endlichwertige Ortsfunktionen approximiert und auf diese die Formel (7. 2) anwendet. Es stellt sich heraus, daß es immer eine und nur eine Somenfunktion $\psi(X)$ gibt, welche den folgenden Bedingungen genügt:

Die Funktion $\psi(X)$ ist eine relativ zu $\varphi(X)$ totalmeßbare und totalstetige Maßfunktion, welche die Relation

$$\alpha(A) \cdot \varphi(A) \leqq \psi(A) \leqq \beta(A) \cdot \varphi(A) \tag{7. 3}$$

wenigstens für diejenigen Somen A erfüllt, für welche $0 < \varphi(A) < +\infty$ ist.

Hierbei soll der Definitionsbereich M von f ein für $\varphi(X)$ meßbares Soma sein, für welches $\varphi(M) < +\infty$ ist, oder aus der Vereinigung von höchstens abzählbar vielen derartigen Somen bestehen.

Mit dieser Definition des Integrals gelten sämtliche Sätze der Lebesgueschen Theorie. Insbesondere folgt aus

$$\int_X f\,d\varphi = \int_X g\,d\varphi \tag{7.4}$$

für alle Teile X eines festen Somas M, daß f und g *äquivalent* sein müssen, womit folgendes verstanden wird: es gibt ein Nullsoma N von $\varphi(X)$, so daß auf $(M - N)$ die Gleichung $f = g$ besteht. Ist also $\varphi(X)$ eine reduzierte Maßfunktion, so ist $N = O$ und der Begriff der Äquivalenz ist von dem der Identität nicht verschieden.

Man beachte, daß die soeben gegebene Definition des Integrals allgemeiner ist als diejenige, welche von anderen Autoren oder von mir selbst benutzt worden ist. Bisher hatte ich nämlich immer vorausgesetzt, daß die Maßfunktion $\varphi(X)$ eine *reguläre* Maßfunktion sein mußte (vgl. § 11). Es ist aber nicht schwer, die früheren Beweise so zu modifizieren, daß sie auch unter den hier angegebenen Voraussetzungen gelten, und man hat den Vorteil, daß die kompliziertere Theorie der regulären Maßfunktionen zurückgeschoben und nicht mehr auf Sätze angewandt wird, die man auf einfachstem Wege erhalten kann.

Ein wichtiger Satz ist noch folgender: es sei $\chi(u_1, \ldots, u_m)$ eine beschränkte, stetige Funktion von m Veränderlichen; wir geben uns beliebige Zahlen $v_1, \ldots, v_m$ und $w_1, \ldots, w_m$, welche den Bedingungen $v_k \leqq w_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ genügen und bezeichnen mit $\psi(v_k, w_k)$, $\Psi(v_k, w_k)$ die untere bzw. die obere Grenze von $\chi(u_k)$ auf der Punktmenge $v_k \leqq u_k \leqq w_k$ $(k = 1, \ldots, m)$.

Sind dann $f_1, \ldots, f_m$ beschränkte Ortsfunktionen, welche für $\varphi(X)$ meßbar sind, so gibt es höchstens eine Maßfunktion $\psi(X)$, für welche die Ortsfunktionen f_k ebenfalls meßbar sind, und für welche die Ungleichheit

$$\psi(\alpha_k(X), \beta_k(X))\,\varphi(X) \leqq \psi(X) \leqq \Psi(\alpha_k(X), \beta_k(X))\,\varphi(X)$$

für alle $X \subseteq M$ erfüllt ist.

8. Wir halten jetzt die Maßfunktion $\varphi(X)$ fest und nehmen für f alle möglichen nichtnegativen, für $\varphi(X)$ meßbaren, endlichen Ortsfunktionen. Durch (7. 1) wird dann eine Menge von Maßfunktionen $\psi(X)$ definiert, welche in eigentümlicher Weise miteinander verwandt sind.

Wir betrachten zuerst zwei Ortsfunktionen f und g mit demselben Definitionsbereich M, für welche gilt

$$0 < f < +\infty, \quad 0 < g < +\infty, \tag{8.1}$$

so daß auch die Quotienten

$$\frac{f}{g} \text{ und } \frac{g}{f} \tag{8. 2}$$

auf M definiert sind, und setzen

$$\psi(X) = \int_X f\, d\varphi, \quad \chi(X) = \int_X g\, d\varphi. \tag{8. 3}$$

Aus den Eigenschaften der Ortsfunktionen (8. 2) und aus denjenigen des Integrals erhält man dann mit Benutzung des Satzes am Ende des vorigen Paragraphen die Beziehungen

$$\psi(X) = \int_X \frac{f}{g}\, d\chi, \quad \chi(X) = \int_X \frac{g}{f}\, d\psi. \tag{8. 4}$$

Diese Gleichungen hängen mit der „Differentiation" der Maßfunktionen $\psi(X), \chi(X)$ zusammen; man kann z. B. die Schreibweise

$$d\psi = f\, d\varphi, \quad d\chi = g\, d\varphi \tag{8. 5}$$

an Stelle von (8. 3) einführen. Dann zeigt (8. 4), daß man mit solchen Differentialen formal rechnen kann.

Freilich dürfen immer in solchen Gleichungen die auftretenden Ortsfunktionen durch relativ zu $\varphi(X)$ äquivalente Ortsfunktionen ersetzt werden, und nur für den Fall, daß $\varphi(X)$ eine reduzierte Maßfunktion ist, ist die „Derivierte"

$$\frac{d\psi}{d\chi} = \frac{f}{g} \tag{8. 6}$$

eindeutig bestimmt.

Wir betrachten jetzt den allgemeineren Fall, in welchem f und g auf gewissen Teilsomen von M verschwinden. Dann kann man immer

$$\psi(X) = \psi'(X) + \psi''(X), \quad \chi(X) = \chi'(X) + \chi''(X) \tag{8. 7}$$

setzen, so daß jede der Funktionen $\psi'(X)$ und $\chi'(X)$ *totalstetig* und jede der Funktionen $\psi''(X)$ und $\chi''(X)$ *entartet* relativ zu $\chi(X)$ bzw. $\psi(X)$ ist. Man kommt hier auf die einfachste Weise zur gegenseitigen *Lebesgueschen Zerlegung* der Maßfunktionen $\psi(X)$ und $\chi(X)$, welche übrigens eindeutig bestimmt ist.

9. Diese Überlegungen bilden die naturgemäße Verallgemeinerung der Lebesgueschen Resultate, welche am Anfang dieses Aufsatzes erwähnt wurden. Sie sind aber sämtlich recht naheliegende Folgerungen des Integralbegriffs und enthalten kein Analogon für den viel tieferliegenden Satz von Lebesgue, der besagt, daß jede monotone Funktion $f(x)$ einer Veränderlichen x fast überall differentiierbar ist. Um ein derartiges Analogon zu erhalten, müssen wir eine Eigenschaft der Menge von Maßfunktionen (7. 1) in den Vordergrund stellen, welche von der Integraldarstellung dieser Funktionen unabhängig ist.

Sind nämlich zwei Integrale

$$\psi(X) = \int_X f\, d\varphi, \quad \chi(X) = \int_X g\, d\varphi \tag{9. 1}$$

gegeben, und bedeutet y eine feste positive Zahl, so kann die Somenfunktion

$$y\,\psi(X) - \chi(X) = \int_X (yf - g)\, d\varphi$$

als Differenz von zwei Maßfunktionen dargestellt werden, *von denen jede relativ zur anderen entartet ist.*

Nun seien umgekehrt $\psi(X)$ und $\chi(X)$ zwei gegebene Maßfunktionen, von denen wir nicht voraussetzen, daß sie in der Gestalt (9. 1) geschrieben werden können. Ein Soma M sei meßbar für $\psi(X)$ und $\chi(X)$ und es seien außerdem die Zahlen $\psi(M)$ und $\chi(M)$ endlich. Wir betrachten die Linearform

$$y\,\psi(X) - \chi(X) \tag{9. 2}$$

und bezeichnen mit $y_1, y_2, \ldots$ eine Folge von positiven Zahlen, welche überall dicht auf der Halbachse $0 < y < +\infty$ liegt. Jeder der Zahlen y_k soll eine Zerlegung

$$M = M_k' + M_k'' \tag{9. 3}$$

von M zugeordnet werden können, für welche folgendes gilt: die Somen M_k', M_k'' sind meßbar sowohl für $\psi(X)$ als auch für $\chi(X)$ und für jedes Soma $X \subseteq M$ gelten die Relationen

$$y_k\,\psi(XM_k') - \chi(XM_k') \geqq 0, \tag{9. 4}$$

$$y_k\,\psi(XM_k'') - \chi(XM_k'') \leqq 0. \tag{9. 5}$$

Wenn die Maßfunktionen $\psi(X)$, $\chi(X)$ diesen Bedingungen genügen, sollen sie *konjugiert* heißen.

Jeder Zahl $y > 0$ ordnen wir die Indizes $p_1, p_2, \ldots$ zu, für welche in der Folge der y_k die Ungleichheit $y_{p_j} < y$ erfüllt ist, und setzen

$$S(y) = \sum_j \dot{+} M_{p_j}'. \tag{9. 6}$$

Wir erhalten auf diese Weise eine Somenskala für eine Ortsfunktion f, welche nichtnegativ ist und welche für $\psi(X)$ und für $\chi(X)$ meßbar ist.

Es sei n eine natürliche Zahl und A sei ein nicht leeres Soma, für welches

$$A \subseteq S(n) \tag{9. 7}$$

ist. Dann ist jedenfalls die obere Grenze $\beta(A)$ der Ortsfunktion f nicht größer als n. Wir setzen in (9. 6) die Zahl $y > \beta(A)$; dann können wir A als Summe

$$A = A_1 + A_2 + \ldots$$

von Somen A_j darstellen, für welche gilt

$$\psi(A) = \sum_j \psi(A_j), \qquad \chi(A) = \sum_j \chi(A_j) \tag{9.8}$$

$$A_j \subseteq M'_{p_j} \ (j = 1, 2, \ldots). \tag{9.9}$$

Aus (9. 4) erhält man nun

$$y_{p_j} \psi(A_j M'_{p_j}) - \chi(A_j M'_{p_j}) \geqq 0$$

und entnimmt hieraus weil $y > y_{p_j}$ ist,

$$y \psi(A_j) - \chi(A_j) \geqq 0. \tag{9.10}$$

Wegen (9. 8) hat man also auch $y \psi(A) - \chi(A) \geqq 0$, und weil diese Relation für alle $y > \beta(A)$ gilt, hat man schließlich

$$\chi(A) \leqq \beta(A) \psi(A). \tag{9.11}$$

Zweitens setzen wir, falls die untere Grenze $\alpha(A)$ von f auf A positiv ist, $y = \alpha(A)$ in (9. 6). Dann haben wir $A \circ M'_{p_j}$ und folglich $A \subseteq M''_{p_j}$; es ist also auch

$$y_{p_j} \psi(A) - \chi(A) \leqq 0$$

und schließlich

$$\chi(A) \geqq \alpha(A) \psi(A). \tag{9.12}$$

10. Wir führen die Bezeichnungen ein

$$M_0 = \lim_{n=\infty} S(n), \quad N = M - M_0. \tag{10.1}$$

Der Satz am Ende des § 7 erlaubt jetzt zu schließen, daß die Gleichung gilt

$$\chi(X) = \int_X f \, d\psi \qquad (X \subseteq M_0). \tag{10.2}$$

Aus $N \subseteq M''_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ folgt nun

$$\psi(N) \leqq \frac{\chi(N)}{y_k} \leqq \frac{\chi(M)}{y_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{10.3}$$

und hieraus schließt man, daß N ein Nullsoma von $\psi(X)$ ist. Ferner ist aber N auch für $\chi(X)$ meßbar, und es ist daher für alle Teile X von M

$$\chi(X) = \int_X f \, d\psi + \chi(XN), \qquad \psi(N) = 0. \tag{10.4}$$

Für konjugierte Maßfunktionen existieren also die Lebesgueschen Zerlegungen der einen relativ zur anderen.

11. Es handelt sich jetzt darum, konkrete Fälle anzugeben, auf welche man die vorhergehende, ganz abstrakte Theorie anwenden kann. Zu diesem Zweck entwickeln wir zuerst ein reguläres Rechenverfahren für die Bildung der allgemeinsten Maßfunktionen.

Es sei $\mathfrak{A}$ ein vollkommener Ring von Somen und $\mathfrak{B}$ sei eine beliebige Teilmenge aus $\mathfrak{A}$. Jedem Soma U von $\mathfrak{B}$ ordnen wir eine endliche, nicht negative Zahl $p(U)$ zu, d. h. wie definieren auf $\mathfrak{B}$ eine ganz beliebige *Gewichtsfunktion*. Ist dann X ein beliebiges Soma aus $\mathfrak{A}$, so soll die zu konstruierende

Maßfunktion $\varphi(X) = +\infty$ gesetzt werden, falls es nicht möglich ist, Folgen $U_1, U_2, \ldots$ von Somen von $\mathfrak{B}$ zu konstruieren, deren Vereinigung $\sum_j \dot{+} U_j$ das Soma X als Teil enthält. Im anderen Fall ordnen wir jeder „Überdeckungsfolge" $\{U_j\}$ von X die Zahl $\sum_j p(U_j)$ zu und setzen $\varphi(X)$ gleich der unteren Grenze aller auf diese Weise gebildeten Zahlen. Es zeigt sich, daß $\varphi(X)$ die größte Maßfunktion ist, welche für jedes Soma U aus $\mathfrak{B}$ der Bedingung $\varphi(U) \leqq p(U)$ genügt. Sie wird deshalb die *maximale Maßfunktion* unter $p(U)$ genannt, und $\mathfrak{B}$ heißt eine *Basis* von $\varphi(X)$.

Jede beliebige Maßfunktion $\varphi(X)$ kann auf diese Weise berechnet werden; im allgemeinen gibt es viele Möglichkeiten für die Auswahl der Basis $\mathfrak{B}$ und der Gewichtsfunktion $p(U)$, welche hierbei zu benutzen sind. Die Bedeutung dieser Konstruktion beruht nun darauf, daß man aus gewissen Eigenschaften der Basis $\mathfrak{B}$ Schlüsse ziehen kann, welche sich auf $\varphi(X)$ beziehen.

So können z. B. die *regulären Maßfunktionen* oder *äußeren Maße* $\mu^* X$, d. h. die Maßfunktionen, für welche $\mu^* X$ gleich der unteren Grenze aller Zahlen μU ist, wobei $U \supseteq X$ und meßbar sein soll, auch folgendermaßen charakterisiert werden: die Funktion $\mu^* X$ besitzt mindestens eine Basis $\mathfrak{B}$, deren Somen U alle für $\mu^* X$ meßbar sind.

12. Sind nun zwei äußere Maße $\lambda^* X$ und $\mu^* X$ konjugiert im Sinne des § 9, so müssen sie mindestens eine gemeinsame Basis $\mathfrak{B}$ besitzen, welche in den Meßbarkeitsringen $\mathfrak{M}_\lambda$ und $\mathfrak{M}_\mu$ enthalten ist. Aber auch umgekehrt sind zwei äußere Maße, welche eine derartige gemeinsame Basis besitzen, immer konjugiert. Das letztere folgt aus einem Satze, den Hans Hahn für totaladditive Funktionen aufgestellt hat[4]).

Es seien auf einem vollkommenen Ring $\mathfrak{A}$ zwei totaladditive Funktionen $\lambda X, \mu X$ gegeben, und M sei ein Soma von $\mathfrak{A}$, welches man als Vereinigung von höchstens abzählbar vielen Somen M_j darstellen kann, für welche λM_j und μM_j beide endlich sind. Außerdem sei μX totalstetig relativ zu λX. Die Somenfunktionen λX und μX sind äußere Maße mit der gemeinsamen Basis $\mathfrak{A}$; auf jedem der Somen M_j sind sie konjugiert. Nach dem § 10 gibt es hier eine Ortsfunktion f, für welche man schreiben kann,

$$\mu X = \int_X f \, d\lambda \qquad (X \subseteq M).$$

Dieses ist ein bekanntes Resultat, das O. Nikodym entdeckt hat [5]).

[4]) H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen, S. 404, Satz IX. Berlin, Jul. Springer, 1921.

[5]) O. Nikodym, Sur une généralisation des intégrales de M. Radon, Fund. Math. **15** (1930), S. 131—179.

(Eingegangen am 12. März 1940.)

Über die mit Lineal und Zirkel und die mit dem rechten Zeichenwinkel lösbaren Konstruktionsaufgaben. I.

Herrn Oskar Perron zum 60. Geburtstag am 7. Mai 1940 gewidmet.

Von

Heinrich Tietze in München.

1. Vor etwas mehr als drei Jahrzehnten habe ich in einer kleinen Note[1]) die Ausführbarkeit von Konstruktionen mit Lineal und Zirkel behandelt und insbesondere besprochen, in welcher Hinsicht das gewöhnlich für die Konstruierbarkeit mit Lineal und Zirkel angegebene Kriterium zu berichtigen bzw. zu ergänzen ist. Wenn dabei auf die Frage hinzuweisen war, inwieweit *Anordnungs*beziehungen bei einer Konstruktion mit verwendet werden oder nicht, so war diese Frage naheliegend in einer Zeit, die durch die rasch einander folgenden Auflagen von Hilberts „Grundlagen der Geometrie" ein wesentliches Gepräge erhielt. Es war leicht zu sehen, daß bei vielen Konstruktionen mit Lineal und Zirkel außer diesen beiden Instrumenten noch Anordnungsbeziehungen mit verwendet werden, um aus mehreren durch die Konstruktion erhaltenen Punkten (bzw. Geraden usw.) das eine gesuchte Element eindeutig auszusondern. Wurde dagegen die Verwendung von Anordnungsbeziehungen als zusätzliches Hilfsmittel ausgeschlossen, gleichwohl aber Eindeutigkeit des Konstruktionsergebnisses gefordert, so ergab sich ein gegenüber dem üblichen Kriterium wesentlich eingeschränkter Bereich von „eindeutig" nur mit Lineal und Zirkel konstruierbaren Elementen. Dabei erwies sich die Gesamtheit der Punkte und Geraden dieses eingeschränkten Bereiches als übereinstimmend mit dem Bereich jener Punkte und Geraden, die ohne Zirkel durch Konstruktionen mit dem rechten Zeichenwinkel erhältlich sind[2]).

---

[1]) Sitzungsberichte d. Wien. Akad. d. Wiss., Mathem.-naturw. Klasse, Bd. 118, Abt. IIa (1909), S. 735—757; vgl. auch Akad. Anzeiger d. Wien. Akademie, Nr. XIII (21. Mai 1909).

[2]) Wie in Nr. 2 näher ausgeführt, soll dabei der Zeichenwinkel, außer als Lineal, nur zum Ziehen der Senkrechten (Normalen) durch einen Punkt zu einer Geraden verwendet werden und jene zweite Verwendungsart des Zeichenwinkels ausgeschlossen bleiben, bei der man ihn gleiten läßt. Vgl. über die beiden Verwendungsarten den Artikel von A. Giacomini in dem Buch von F. Enriques, Questioni riguardanti la geometria elementare, Bologna 1900 [deutsche Ausgabe von H. Fleischer, Art. III in Bd. 2 (1907), S. 103], bzw. 3. Auflage, Bologna 1926, Bd. 2, S. 230.

In den folgenden Aufsätzen komme ich auf diese Dinge zurück, weil sich das fragliche Kriterium (für den engeren Konstruierbarkeitsbereich) in anderer, etwas allgemeinerer und vielleicht übersichtlicherer Gestalt als l. c.[1]) aussprechen läßt. Auch gehe ich etwas ausführlicher auf die Beweise ein, deren Durchrechnung damals vorwiegend dem Leser überlassen war. Ich beginne in diesem ersten Aufsatz mit den Konstruktionen mit dem rechten Zeichenwinkel. Das in § 1 (Satz 1) aufgestellte Konstruierbarkeitskriterium wird in §§ 2 und 3 bewiesen.

§ 1.

Das Kriterium für Konstruierbarkeit mit dem rechten Zeichenwinkel.

2. Die Ausgangsfigur einer Konstruktion mit dem rechten Zeichenwinkel bestehe aus Punkten und Geraden[3]). Die Konstruktion selbst bestehe aus einer endlichen Anzahl von Schritten folgender Art: Erweiterung der Figur um

α) die Verbindungsgerade zweier Punkte,

β) den Schnittpunkt zweier (nicht-paralleler) Geraden,

γ) die Senkrechte zu einer Geraden durch einen Punkt.

Bei einem Schritt von der Art γ) sollen Gerade und Punkt der Figur bereits angehören, d. h. zu den gegebenen bzw. bis dahin in den vorhergehenden Schritten konstruierten Elementen gehören. Entsprechendes gilt für die in α) bzw. β) genannten zwei Punkte bzw. zwei Geraden.

Als „*konstruierbar mit dem rechten Zeichenwinkel*" bezeichnen wir dann alle Elemente (Punkte oder Geraden), die zu den gegebenen Elementen der Ausgangsfigur gehören oder aus ihnen durch eine Konstruktion, wie sie eben beschrieben wurde, gewonnen werden können.

3. Wir beschränken uns auf den Fall, daß die Ausgangsfigur nur Punkte in endlicher Anzahl (und keine Geraden) enthält und daß diese Punkte nicht alle derselben Geraden angehören. Dann gilt der folgende Satz[4]):

Satz 1. *Besteht die Ausgangsfigur aus* $n+1$ *Punkten* $A_0, A_1, \ldots, A_n$, *die nicht alle in einer Geraden liegen* ($n \geqq 2$) *und sind bezüglich eines cartesischen Koordinatensystems mit* A_0 *als Anfangspunkt die Koordinaten dieser Punkte* $(0, 0)$, (a_1, b_1), $\ldots$, (a_n, b_n), *so bilde man alle Größen*

$$p_{\mu\nu} = a_\mu a_\nu + b_\mu b_\nu,$$

---

[3]) Da zwar nicht in diesem I. Aufsatz, wohl aber später auch der projektive Standpunkt zur Geltung kommt und auch imaginäre Elemente mit einbezogen werden, so mag betont werden, daß es sich hier nur um reelle eigentliche Punkte bzw. Gerade der euklidischen Ebene handelt.

[4]) Eine vorläufige Mitteilung darüber in Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Mathem.-naturw. Abt., Jahrgang 1937, S. 4*.

(d. h. alle inneren Produkte $p_{\mu\nu} = \mathfrak{a}_\mu \mathfrak{a}_\nu$ zweier Vektoren $\mathfrak{a}_\mu = A_0 A_\mu$, $\mathfrak{a}_\nu = A_0 A_\nu$); sei $\mathfrak{R}_0$ der Rationalitätsbereich, der aus allen Quotienten[5]) *zweier $p_{\mu\nu}$ oder, was auf dasselbe hinausläuft, aus allen Größen $\frac{p_{\mu\nu}}{p_{11}}$ erzeugt wird:*

$$\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}\left(1, \frac{p_{12}}{p_{11}}, \frac{p_{22}}{p_{11}}, \ldots, \frac{p_{nn}}{p_{11}}\right).$$

Dann sind mit dem rechten Zeichenwinkel konstruierbar (im oben erklärten Sinne) alle und nur jene Punkte $X = (x, y)$, deren Koordinaten in der Gestalt

$$(1) \qquad x = \sum_{\nu=1}^{n} \varrho_\nu a_\nu, \quad y = \sum_{\nu=1}^{n} \varrho_\nu b_\nu$$

sich darstellen lassen[6]) *mit Koeffizienten ϱ_ν aus $\mathfrak{R}_0$; und es sind mit dem rechten Zeichenwinkel konstruierbar alle und nur jene Geraden*

$$(2) \qquad ux + vy + w = 0,$$

deren Gleichungskoeffizienten (nach Multiplikation mit einem geeigneten gemeinsamen Faktor) sich in der Gestalt darstellen lassen[7]):

$$(3) \qquad u = \sum_{\nu=1}^{n} \varrho_\nu a_\nu, \quad v = \sum_{\nu=1}^{n} \varrho_\nu b_\nu, \quad w = \varrho_0 p_{11}$$

mit Koeffizienten $\varrho_0, \varrho_1, \ldots, \varrho_n$ aus $\mathfrak{R}_0$.

In der Formulierung dieses Satzes spielt übrigens, wie sogleich bemerkt sei, der zum Koordinatenanfangspunkt gewählte Punkt A_0 nur scheinbar eine vor den übrigen Punkten A_ν ausgezeichnete Rolle. Betrachtet man nämlich *alle* inneren Produkte p zweier Vektoren $A_\mu A_\nu$ und $A_\varkappa A_\lambda$, so fällt der durch alle Quotienten zweier solcher Produkte p erzeugte Rationalitätsbereich mit dem in Satz 1 eingeführten Bereich $\mathfrak{R}_0$ zusammen, wie aus $(\mathfrak{a}_\nu - \mathfrak{a}_\mu) \cdot (\mathfrak{a}_\lambda - \mathfrak{a}_\varkappa) = p_{\nu\lambda} - p_{\mu\lambda} - p_{\nu\varkappa} + p_{\mu\varkappa}$ ersichtlich ist. Es ist also bei Bildung von $\mathfrak{R}_0$ kein Punkt A_ν vor den anderen ausgezeichnet. Andererseits sind bei Verlegung des Anfangspunktes in den Punkt A_μ die neuen Koordinaten $x^* = x - a_\mu$, $y^* = y - b_\mu$ von der gleichen Gestalt (1) wie die Koordinaten x, y, da die statt ϱ_μ einzusetzende Zahl $\varrho_\mu - 1$ zugleich

---

[5]) Natürlich sind nicht alle $p_{\mu\nu}$ null; so ist sicherlich jedes $p_{\nu\nu}$, im besonderen $p_{11} = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_1 \neq 0$.

[6]) Anders gesagt bedeutet dies, daß der Vektor $\mathfrak{x} = A_0 X$ eine Darstellung $\mathfrak{x} = \sum_{\nu=1}^{n} \varrho_\nu \mathfrak{a}_\nu$ zuläßt. Eine solche Darstellung ist übrigens für $n > 2$, wenn überhaupt, so auf verschiedene Weise möglich; vgl. Anm. [13]).

[7]) Anders gesagt bedeutet dies (vgl. Nr. 11), daß (2) sich vektoriell in der Gestalt schreiben läßt:

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{x} - \mathfrak{b}) = 0,$$

unter $\mathfrak{a} = A_0 A$, $\mathfrak{b} = A_0 B$ Vektoren zu konstruierbaren Punkten $A (\neq A_0)$ und B verstanden ($\mathfrak{a} = \Sigma \varrho_\nu \mathfrak{a}_\nu$, $\mathfrak{b} = \Sigma \sigma_\nu \mathfrak{a}_\nu$, ϱ_ν und σ_ν in $\mathfrak{R}_0$).

mit ϱ_μ zu $\mathfrak{R}_0$ gehört. Es erfährt also bei einer solchen Verlegung des Anfangspunktes das Kriterium für die Konstruierbarkeit eines Punktes $X = (x, y)$ keine Änderung; und dasselbe gilt für die Konstruierbarkeitsbedingungen (3) einer Geraden (2), da diese die Gestalt $u x^* + v y^* + w^* = 0$ annimmt mit $w^* = w + u a_\mu + v b_\mu = \varrho_0 p_{11} + \sum \varrho_\nu p_{\nu\mu} = \varrho_0^* p_{11}$, wobei

$$\varrho_0^* = \varrho_0 + \sum \varrho_\nu \frac{p_{\nu\mu}}{p_{11}}$$

zugleich mit $\varrho_0, \varrho_1, \ldots, \varrho_n$ zu $\mathfrak{R}^0$ gehört.

4. Wir wollen noch feststellen, daß das Konstruierbarkeitskriterium des Satzes 1 sich inhaltlich deckt mit dem l. c.[1]) angegebenen Kriterium. Hierzu werde das verwendete cartesische Koordinatensystem so spezialisiert, daß A_1 die Koordinaten $(1, 0)$ erhält. Da die Punkte A_ν nach Voraussetzung nicht alle auf der Geraden $A_0 A_1$ liegen, sind die Koordinaten $b_2, \ldots, b_n$ nicht alle Null und es werde etwa $b_2 \neq 0$ angenommen. Es wird dann $p_{11} = 1$, $p_{\nu 1} = a_\nu$ und $\mathfrak{R}_0$ wird der durch die Zahlen a_ν und $b_\mu b_\nu$ $(\mu, \nu \geqq 2)$ erzeugte Rationalitätsbereich. $\mathfrak{R}_0$ ist also dann nichts anderes als die Gesamtheit der Zahlen, die sich darstellen lassen als rationalzahlige rationale Funktionen $f(a_2, \ldots, a_n, b_2, \ldots, b_n)$ der a_ν und b_ν, die speziell in den b_ν gerade sind, wobei wir von einer in den b_ν geraden bzw. ungeraden Funktion f sprechen, wenn $f(a_2, \ldots, a_n, -b_2, \ldots, -b_n) = f(a_2, \ldots, a_n, b_2, \ldots, b_n)$ bzw. $= -f(a_2, \ldots, a_n, b_2, \ldots, b_n)$ ist. Konstruierbar sind dann nach Satz 1 die Punkte

$$x = \varrho_1 + \sum_2^n \varrho_\nu a_\nu = \varrho', \quad y = \sum_2^n \varrho_\nu b_\nu = b_2 \sum_2^n \varrho_\nu \frac{b_\nu b_2}{b_2 b_2} = b_2 \varrho'',$$

wo ϱ', ϱ'' selbst zu $\mathfrak{R}_0$ gehören. Es ist also *x als eine in den b_ν gerade, y als eine in den b_ν ungerade rationalzahlige rationale Funktion der a_ν und b_ν darstellbar.* Diese nach Satz 1 für die Konstruierbarkeit notwendige Bedingung ist aber nach Satz 1 auch hinreichend. Denn wenn umgekehrt x und y als solche Funktionen der a_ν und b_ν darstellbar sind, also $x = \varrho'$, $y = b_2 \varrho''$ ist, wobei ϱ' und ϱ'' zu $\mathfrak{R}_0$ gehören, so braucht man nur $\varrho_2 = \varrho''$, $\varrho_1 = \varrho' - a_2 \varrho''$ zu setzen und erhält $x = \varrho_1 + \varrho_2 a_2$, $y = \varrho_2 b_2$, woraus nach Satz 1 die Konstruierbarkeit des Punktes (x, y) hervorgeht.

Die hiermit für die speziellere Koordinatenwahl gegebene Kennzeichnung der mit dem rechten Zeichenwinkel konstruierbaren Punkte (x, y) deckt sich nun genau mit der l. c.[1]), S. 754, angegebenen Bedingung. Allerdings ist dort auch der Fall, daß alle $n + 1$ gegebenen Punkte in einer Geraden liegen und der Fall, daß nur 2 Punkte gegeben sind — schon im Hinblick auf die Zirkelkonstruktionen — mit berücksichtigt. Für uns scheiden diese Fälle natürlich aus, da man bei Konstruktionen im Sinne von Nr. 2 überhaupt nicht über den Bereich der gegebenen $n + 1$ Punkte, der einen gemeinsamen

Verbindungsgeraden g und der $n+1$ Normalen auf g in den Punkten A_ν hinauskäme. (Das ändert sich — nebenbei erwähnt — sofort, wenn man die Einführung „willkürlicher Hilfselemente" — vgl. l. c., S. 737 — beispielsweise eines außerhalb g liegenden Punktes F zuläßt; es tritt nämlich dann auch für die erwähnten Fälle von $n+1 \geqq 2$ gegebenen auf einer Geraden liegenden Punkten das l. c. angegebene Kriterium in Kraft, und zwar auch für die Konstruktionen mit dem rechten Zeichenwinkel, und nicht nur für die — dort zunächst betrachteten — „eindeutigen" Lineal- und Zirkelkonstruktionen.)

5. Zum Beweis des Satzes 1 werden wir in § 2 zeigen, daß man den durch (1), (2), (3) gekennzeichneten Bereich von Punkten und Geraden, den wir den *Bereich* $\mathfrak{B}_0$ nennen wollen, bei Konstruktionen mit dem rechten Zeichenwinkel nicht verläßt. — Hierauf in § 3, daß alle Punkte und Geraden dieses Bereichs $\mathfrak{B}_0$ tatsächlich mit dem rechten Zeichenwinkel konstruierbar sind.

§ 2.

Die angegebene Konstruierbarkeitsbedingung ist notwendig.

6. Es sollen $A_0, A_1, \ldots, A_n$ und $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ ebenso $p_{\mu\nu}$ und $\mathfrak{R}_0$ dieselbe Bedeutung haben wie in Nr. **3** ($p_{\mu\nu} = \mathfrak{a}_\mu \mathfrak{a}_\nu$). Es sei $\mathfrak{R}$ ein Rationalitätsbereich reeller Zahlen, dem alle Zahlen von $\mathfrak{R}_0$ angehören [8]). Mit $\mathfrak{B}$ werde der Bereich aller durch (1) bzw. (2) und (3) gekennzeichneten Punkte und Geraden bezeichnet, wenn dabei die Koeffizienten $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ bzw. $\varrho_0, \varrho_1, \ldots, \varrho_n$ irgendwelche Zahlen aus $\mathfrak{R}$ sind. Wird speziell $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0$ gewählt, so fällt $\mathfrak{B}$ zusammen mit dem in Nr. 5 genannten Bereich $\mathfrak{B}_0$. Wir wollen nun in diesem § 2 zeigen, daß man, wie immer $\mathfrak{R}$ als ein $\mathfrak{R}_0$ umfassender Rationalitätsbereich gewählt sei, *bei Konstruktionen mit dem rechten Zeichenwinkel den zugehörigen Bereich* $\mathfrak{B}$ *von Punkten und Geraden nicht verläßt*. Im besonderen gilt das dann für den Bereich $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0$, womit die in Satz 1 ausgesprochene Konstruierbarkeitsbedingung als notwendig nachgewiesen sein wird.

7. Ein Vektor [9]) $\mathfrak{x}$ soll als „*zum Rationalitätsbereich* $\mathfrak{R}$ *gehörig*" bezeichnet werden, wenn er sich in der Gestalt $\mathfrak{x} = \sum_{\nu=1}^{n} \varrho_\nu \mathfrak{a}_\nu$ mit Koeffizienten ϱ_ν aus $\mathfrak{R}$

---

[8]) Für den Beweis des Satzes 1 würde es genügen, $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0$ zu nehmen. Die Verallgemeinerung auf irgendeinen $\mathfrak{R}_0$ umfassenden Rationalitätsbereich $\mathfrak{R}$ geschieht im Hinblick auf spätere Betrachtungen, die für unsere Konstruktionen mit dem rechten Zeichenwinkel noch keine Rolle spielen.

[9]) Es hat natürlich keine Schwierigkeit, den Beweis der in Nr. 6 aufgestellten Behauptung so durchzuführen, daß bei den bezüglichen Rechnungen aus der analytischen Geometrie kein Gebrauch von vektorieller Schreibweise gemacht wird. Doch gestattet diese eine knappere Darstellung.

darstellen läßt [10]). Die Gesamtheit der zu $\Re$ gehörigen Vektoren ist natürlich nichts anderes als die Gesamtheit der Vektoren A_0X, die vom Anfangspunkt zu irgendeinem Punkt X des Bereiches $\mathfrak{B}$ gezogen werden.

Ferner deckt sich die Gesamtheit der Geraden des Bereiches $\mathfrak{B}$ mit der Gesamtheit der Geraden, deren Gleichung vektoriell

$$\mathfrak{a}\mathfrak{x} + \varrho_0 p_{11} = 0 \tag{4}$$

geschrieben werden kann, wenn $\mathfrak{a}$ ein zu $\Re$ gehöriger (vom Nullvektor verschiedener) Vektor und ϱ_0 eine Zahl aus $\Re$ ist, wobei $\mathfrak{x}$ den Vektor von A_0 zu einem Punkt $X = (x, y)$ der Geraden bedeutet. In der Tat braucht man ja, wenn eine (2) und (3) erfüllende Gerade mit Zahlen ϱ_ν aus $\Re$ vorliegt, für $\mathfrak{a}$ nur den Vektor von A_0 zum Punkt mit den Koordinaten (u, v) zu nehmen und man erhält $ux + vy = \mathfrak{a}\mathfrak{x}$.

8. Die folgenden Hilfssätze (a), (b) und (c) werden später Verwendung finden.

(a) Sind λ', λ'' Zahlen aus $\Re$ und gehoren die Vektoren $\mathfrak{a}', \mathfrak{a}''$ zu $\Re$, so gehört auch der Vektor $\lambda'\mathfrak{a}' + \lambda''\mathfrak{a}''$ zu $\Re$.

Es folgt dies unmittelbar aus der Definition der zu $\Re$ gehörigen Vektoren.

(b) Das innere Produkt $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ zweier zu $\Re$ gehöriger Vektoren kann in der Gestalt ϱp_{11} geschrieben werden, unter ϱ eine Zahl aus $\Re$ verstanden.

Ist nämlich $\mathfrak{x} = \sum_{\mu=1}^{n} \varrho_\mu \mathfrak{a}_\mu$, $\mathfrak{y} = \sum_{\nu=1}^{n} \sigma_\nu \mathfrak{a}_\nu$, unter ϱ_μ, σ_ν Zahlen aus $\Re$ verstanden, so folgt (b) wegen

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y} = \sum_{\mu,\nu} \varrho_\mu \sigma_\nu \mathfrak{a}_\mu \mathfrak{a}_\nu$$

einfach daraus, daß jedes innere Produkt $\mathfrak{a}_\mu \mathfrak{a}_\nu = p_{\mu\nu}$ in der Gestalt ϱp_{11} darstellbar ist.

(c) Sind $\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'', \mathfrak{b}', \mathfrak{b}''$ zu $\Re$ gehörige Vektoren, wobei die „Gramsche Determinante" $\Gamma(\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'') = (\mathfrak{a}'\mathfrak{a}')(\mathfrak{a}''\mathfrak{a}'') - (\mathfrak{a}'\mathfrak{a}'')^2$ von Null verschieden sei, dann gehören die durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda'(\mathfrak{a}'\mathfrak{a}') + \lambda''(\mathfrak{a}'\mathfrak{a}'') &= \mathfrak{a}'\mathfrak{b}' \\ \lambda'(\mathfrak{a}''\mathfrak{a}') + \lambda''(\mathfrak{a}''\mathfrak{a}'') &= \mathfrak{a}''\mathfrak{b}'' \end{aligned} \tag{5}$$

bestimmten Zahlen λ', λ'' zum Rationalitätsbereich $\Re$.

---

[10]) Nebenbei bemerkt, sind dabei im Falle $n > 2$ die Koeffizienten ϱ_ν aus $\Re$ in der Darstellung eines Vektors $\mathfrak{x} = \Sigma \varrho_\nu \mathfrak{a}_\nu$ nicht eindeutig bestimmt; vgl. hierüber Anm. [13]).

(c) folgt unmittelbar daraus, daß alle Koeffizienten des Gleichungssystems, wenn man sie durch p_{11} dividiert, gemäß (b) Zahlen aus $\mathfrak{R}$ sind. Die Ungleichung $\Gamma(\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'') \neq 0$ bedeutet dabei bekanntlich, daß von den Vektoren $\mathfrak{a}', \mathfrak{a}''$ keiner aus dem anderen durch Multiplikation mit einem Zahlenfaktor erhältlich ist, oder, anders ausgedrückt, wenn A', A'' die Endpunkte der von A_0 aus aufgetragenen Vektoren $\mathfrak{a}', \mathfrak{a}''$ sind, daß die drei Punkte A_0, A', A'' nicht in einer Geraden liegen[11]).

9. Da nach Voraussetzung die Punkte $A_0, A_1, \ldots, A_n$ nicht alle in einer Geraden liegen, so gibt es unter den Vektoren $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ zwei unabhängige. Seien etwa $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ unabhängig (A_0, A_1, A_2 nicht in einer Geraden), also $\Gamma(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) = p_{11} p_{22} - (p_{12})^2 \neq 0$. Es läßt sich dann jeder Vektor unserer Ebene in der Gestalt $\lambda_1 \mathfrak{a}_1 + \lambda_2 \mathfrak{a}_2$ mit geeigneten Koeffizienten λ_1, λ_2 darstellen. Es ist nun leicht zu sehen:

(d) Ein Vektor $\mathfrak{b} = \lambda_1 \mathfrak{a}_1 + \lambda_2 \mathfrak{a}_2$ ist dann und nur dann zu $\mathfrak{R}$ gehörig, wenn λ_1 und λ_2 Zahlen aus $\mathfrak{R}$ sind.

---

[11]) Bekanntlich hat für ein System von n Vektoren $(\mathfrak{x}) = (\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n)$ des m-dimensionalen cartesischen Raumes $\mathfrak{S}^m$ ($m \geqq n$) die Gramsche Determinante $\Gamma(\mathfrak{x}) = \Gamma(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n) = |\mathfrak{x}_\mu \mathfrak{x}_\nu|$ den Wert null, wenn die $\mathfrak{x}_\nu$ linear-abhängig sind und ist andernfalls gleich dem Quadrat des n-dimensionalen Inhalts des vom n-Bein der $\mathfrak{x}_\nu$ aufgespannten Parallelotops; $\Gamma(\mathfrak{x})$ ist ein spezieller Fall des „inneren Produktes" $\Gamma(\mathfrak{x}; \mathfrak{y}) = \Gamma(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n; \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n) = |\mathfrak{x}_\mu \mathfrak{y}_\nu|$ zweier Vektor-n-tupel; dieses hat den Wert null, wenn die $\mathfrak{x}_\nu$ oder die $\mathfrak{y}_\nu$ ein System linear-abhängiger Vektoren bilden und ist andernfalls gleich dem mit $\varepsilon = \pm 1$ multiplizierten Produkt der Inhalte zweier Parallelotope, aufgespannt vom n-Bein $(\mathfrak{x})$ und vom n-Bein $(\mathfrak{z}) = (\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n)$, wobei $\mathfrak{z}_\nu$ die orthogonale Projektion von $\mathfrak{y}_\nu$ in den von $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ aufgespannten n-dimensionalen Teilraum des $\mathfrak{S}^m$ ist ($\mathfrak{y}_\nu - \mathfrak{z}_\nu + \mathfrak{n}_\nu = \sum_{\lambda=1}^{n} c_{\nu\lambda} \mathfrak{x}_\lambda + \mathfrak{n}_\nu$ mit $\mathfrak{n}_\nu \mathfrak{x}_\lambda = 0$ für alle λ); das Vorzeichen ε ist, falls die $\mathfrak{z}_\nu$ linear-unabhängig sind, gleich $+1$ oder -1, je nachdem das n-Bein $(\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n)$ — in dieser Reihenfolge der $\mathfrak{z}_\nu$ — mit dem n-Bein $(\mathfrak{x}) = (\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n)$ gleichsinnig oder ungleichsinnig orientiert ist, d. h. je nachdem $|c_{\nu\lambda}| > 0$ oder < 0 ist; also: $\Gamma(\mathfrak{x}; \mathfrak{y}) = \Gamma(\mathfrak{x}; \mathfrak{z}) = |c_{\nu\lambda}| \cdot \Gamma(\mathfrak{x})$. Für $n = m = 2$ ist also, falls sowohl $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$ als $(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2)$ ein Paar unabhängiger Vektoren in der Ebene $\mathfrak{S}^2$ ist, $\Gamma(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2; \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2)$ gleich dem Produkt der von den Vektoren $\mathfrak{x}_1 = AX_1$, $\mathfrak{x}_2 = AX_2$ bzw. $\mathfrak{y}_1 = AY_1$, $\mathfrak{y}_2 = AY_2$ aufgespannten Parallelogramme, multipliziert mit $+1$ oder -1, je nachdem der Umlaufsinn des Dreiecks AX_1X_2 (in der angeschriebenen Reihenfolge der Ecken) mit dem des Dreiecks AY_1Y_2 übereinstimmt oder nicht (A der Koordinaten-Anfangspunkt). — In dem Sonderfall $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}''$ ($= \mathfrak{b}$) des Gleichungssystems (5) erhält man mittels der genannten Determinanten

$$(6) \qquad \lambda' = \frac{\Gamma(\mathfrak{a}', \mathfrak{a}''; \mathfrak{b}, \mathfrak{a}'')}{\Gamma(\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'')}, \qquad \lambda'' = \frac{\Gamma(\mathfrak{a}', \mathfrak{a}''; \mathfrak{a}', \mathfrak{b})}{\Gamma(\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'')}$$

als Lösung der Aufgabe, zu gegebenen unabhängigen Vektoren $\mathfrak{a}', \mathfrak{a}''$ und gegebenen Werten von $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}''\mathfrak{b}$ den Vektor $\mathfrak{b} = \lambda'\mathfrak{a}' + \lambda''\mathfrak{a}''$ zu bestimmen.

Offenbar ist dazu nur nötig zu zeigen, daß wenn $\mathfrak{b}$ zu $\mathfrak{R}$ gehört, dann λ_1, λ_2 Zahlen aus $\mathfrak{R}$ sein müssen (da das Umgekehrte selbstverständlich ist). Nun ergeben sich λ_1, λ_2 aus dem Gleichungssystem[12])

$$\lambda_1(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_1) + \lambda_2(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2) = \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}$$

$$\lambda_1(\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_1) + \lambda_2(\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_2) = \mathfrak{a}_2\mathfrak{b},$$

also gemäß (c) als Zahlen aus $\mathfrak{R}$, wie behauptet[13]).

10. Ein weiterer Hilfssatz, den wir benutzen werden, und der eine Art Umkehrung zu (b) darstellt, lautet:

(e) Zu jeder vorgegebenen Zahl ϱ aus $\mathfrak{R}$ und zu jedem zu $\mathfrak{R}$ gehörigen Vektor $\mathfrak{a} = \sum \varrho_\nu \mathfrak{a}_\nu$, der vom Nullvektor verschieden ist, gibt es stets einen zu $\mathfrak{R}$ gehörigen Vektor $\mathfrak{b}$, für den $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \varrho p_{11}$ ist (Übrigens ist $\mathfrak{b}$ hierdurch nicht eindeutig bestimmt).

Da nämlich (vgl. Nr. 9) $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ zwei unabhängige Vektoren sind, können $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_2$ nicht beide verschwinden (weil $\mathfrak{a}$ nicht zu jedem der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ orthogonal sein kann) und aus dem gleichen Grunde ist jeder Vektor $\mathfrak{b}$ unserer Ebene in der Gestalt $\lambda_1\mathfrak{a}_1 + \lambda_2\mathfrak{a}_2$ darstellbar. Soll dann $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \varrho p_{11}$ sein, so muß

$$\lambda_1 \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1}{p_{11}} + \lambda_2 \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_2}{p_{11}} = \varrho$$

sein. Da in dieser Gleichung die Koeffizienten $\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1}{p_{11}}$ und $\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_2}{p_{11}}$ nicht beide Null, dabei gemäß (b) Zahlen aus $\mathfrak{R}$ sind, so sind auch λ_1 und λ_2 als Zahlen aus $\mathfrak{R}$ bestimmbar, womit (e) bewiesen ist.

11. Aus (e) folgt:

(f) Die Gesamtheit der Geraden des Bereichs $\mathfrak{B}$ (vgl. Nr. **6**) fällt zusammen mit der Gesamtheit der Geraden

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{x} - \mathfrak{b}) = 0, \tag{7}$$

wenn dabei $\mathfrak{b}$ alle zu $\mathfrak{R}$ gehörigen Vektoren und $\mathfrak{a}$ alle vom Nullvektor verschiedenen zu $\mathfrak{R}$ gehörigen Vektoren durchläuft.

Dies wird nämlich aus der Gestalt (4) für die Gleichung einer Geraden aus $\mathfrak{B}$ sofort ersichtlich, wenn man beachtet, daß gemäß (b) und (e) jedes Produkt $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ in die Gestalt $-\varrho_0 p_{11}$ und jede Zahl $-\varrho_0 p_{11}$ in die Gestalt $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ gebracht werden kann (ϱ_0, $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zu $\mathfrak{R}$ gehörig).

---

[12]) Hier liegt gerade der in Anm. [11]) [Formel (6)] erwähnte Fall vor.

[13]) Im Falle $n > 2$ gestattet gemäß (d) beispielsweise der Vektor $\mathfrak{a}_3$ sowohl eine Darstellung $\sum_{\nu=1}^{3} \varrho_\nu \mathfrak{a}_\nu$ mit $\varrho_3 = 0$ als auch die Darstellung mit $\varrho_1 = \varrho_2 = 0$, $\varrho_3 = 1$. Es sind also die Koeffizienten ϱ_ν in der Darstellung eines Vektors $\Sigma \varrho_\nu \mathfrak{a}_\nu$, wie schon in Anm. [10]) erwähnt, nicht eindeutig bestimmt.

12. Wählt man in (e) speziell $\varrho = 0$, so ergibt sich:

(g) Zu jedem zu $\mathfrak{R}$ gehörigen Vektor $\mathfrak{a}$ gibt es solche ebenfalls zu $\mathfrak{R}$ gehörige und vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\mathfrak{b}$, die zu $\mathfrak{a}$ orthogonal sind ($\mathfrak{a}\mathfrak{b} = 0$).

13. Nunmehr sind wir in der Lage, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 2. *Ist $\mathfrak{R}$ ein Rationalitätsbereich reeller Zahlen, dem alle Zahlen des* (in Nr. 3 erklärten) *Rationalitätsbereiches $\mathfrak{R}_0$ angehören und ist $\mathfrak{B}$ der Bereich aller Punkte X und aller Geraden $\mathfrak{a}(\mathfrak{x} - \mathfrak{b}) = 0$, für welche die Vektoren A_0X, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ zu $\mathfrak{R}$ gehören*, d. h. *in der Gestalt $\sum_{\nu=1}^{n} \varrho_\nu \mathfrak{a}_\nu$ mit Koeffizienten ϱ_ν aus $\mathfrak{R}$ darstellbar sind, dann verbleibt man in diesem Bereich $\mathfrak{B}$ sowohl bei Konstruktion der Verbindungsgeraden zweier Punkte, als auch bei Konstruktion des Schnittpunktes zweier Geraden und ebenso auch bei Konstruktion der Senkrechten durch einen Punkt zu einer Geraden.*

14. Zum Beweis betrachten wir zunächst zwei verschiedene Punkte X', X'' des Bereiches $\mathfrak{B}$, für die also jeder der Vektoren $\mathfrak{x}' = A_0X' = \Sigma \varrho'_\nu \mathfrak{a}_\nu$, $\mathfrak{x}'' = A_0X'' = \Sigma \varrho''_\nu \mathfrak{a}_\nu$ und somit auch der Vektor $\mathfrak{x}'' - \mathfrak{x}'$ zu $\mathfrak{R}$ gehört. Man kann dann gemäß (g), Nr. **12**, einen vom Nullvektor verschiedenen, zu $\mathfrak{R}$ gehörigen und zu $\mathfrak{x}'' - \mathfrak{x}'$ orthogonalen Vektor $\mathfrak{a}$, sowie gemäß (e), Nr. **10**, einen zu $\mathfrak{R}$ gehörigen und der Gleichung $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{x}'$ genügenden Vektor $\mathfrak{b}$ bestimmen. Dann stellt $\mathfrak{a}(\mathfrak{x} - \mathfrak{b}) = 0$ die Verbindungsgerade $X'X''$ dar. Diese Gerade gehört also zum Bereich $\mathfrak{B}$, wie in Satz 2 behauptet.

15. Seien ferner $\mathfrak{a}'(\mathfrak{x} - \mathfrak{b}') = 0$ und $\mathfrak{a}''(\mathfrak{x} - \mathfrak{b}'') = 0$ zwei zum Bereich $\mathfrak{B}$ gehörende nicht-parallele Gerade (also $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$ unabhängige Vektoren); es seien demgemäß $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$ zu $\mathfrak{R}$ gehörende Vektoren. Bedeutet X den Schnittpunkt der beiden Geraden und wird der Vektor $\mathfrak{x} = A_0X$ in der Gestalt $\lambda'\mathfrak{a}' + \lambda''\mathfrak{a}''$ dargestellt, so ergeben sich λ', λ'' aus den Gleichungen

$$\lambda'(\mathfrak{a}'\,\mathfrak{a}') + \lambda''(\mathfrak{a}'\,\mathfrak{a}'') = \mathfrak{a}'\,\mathfrak{b}'$$

$$\lambda'(\mathfrak{a}''\mathfrak{a}') + \lambda''(\mathfrak{a}''\mathfrak{a}'') = \mathfrak{a}''\mathfrak{b}''$$

gemäß Hilfssatz (c) als Zahlen aus $\mathfrak{R}$, so daß $\mathfrak{x} = A_0X$ gemäß (a) ein zu $\mathfrak{R}$ gehöriger Vektor ist. Es gehört also der Schnittpunkt X zweier Geraden des Bereiches $\mathfrak{B}$ selbst zu $\mathfrak{B}$, wie in Satz 2 behauptet.

16. Sei endlich $\mathfrak{a}'(\mathfrak{x} - \mathfrak{b}') = 0$ eine Gerade g' aus $\mathfrak{B}$ und X'' ein Punkt aus $\mathfrak{B}$, wobei also die Vektoren $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{x}'' = A_0X''$ zu $\mathfrak{R}$ gehören. Sei gemäß (g), Nr. **12**, $\mathfrak{a}''$ ein vom Nullvektor verschiedener zu $\mathfrak{R}$ gehöriger und zu

$\mathfrak{a}'$ orthogonaler Vektor. Die Gleichung der Normalen zu g' durch X'' kann dann geschrieben werden

$$\mathfrak{a}''(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}'') = 0.$$

Diese Normale gehört also auch zum Bereich $\mathfrak{B}$.

Damit ist Satz 2 in allen Teilen bewiesen.

§ 3.

Die angegebene Konstruierbarkeitsbedingung ist hinreichend.

17. Wenn in einer Konstruktion, wie sie in Nr. 2 beschrieben wurde, kein Schritt von der Art γ) vorkommt, vielmehr nur Schritte von den Arten α) und β) vorkommen, dann soll von einer Konstruktion allein mit dem Lineal gesprochen werden. Wir werden von folgendem bekannten Satz[14]) über solche Linealkonstruktionen Gebrauch zu machen haben:

Satz 3. *Wenn in der Ausgangsfigur eine Gerade g und eine von g verschiedene und zu g parallele Gerade h gegeben ist, wenn ferner ein weder auf g noch auf h liegender Punkt F gegeben ist sowie $n + 1$ auf der Geraden g liegende Punkte ($n \geqq 1$), deren Abszissen für eine auf g geeignet eingeführte Abszissenzählung gleich $0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ sind, dann sind von den Punkten auf g mit dem Lineal allein konstruierbar alle und nur jene Punkte, deren Abszisse gleich c_1 mal einer Zahl des Rationalitätsbereiches $\mathfrak{R}\left(1, \frac{c_2}{c_1}, \ldots, \frac{c_n}{c_1}\right)$ ist.*

18. Ferner werden wir die folgenden einfachen Aussagen benutzen:

(h) mit dem rechten Zeichenwinkel läßt sich zu einer Geraden g durch einen nicht auf g liegenden Punkt X die Parallele konstruieren.

Man braucht dazu nur die Normale n durch X auf g und dann die Normale durch X auf n zu ziehen.

(i) Zu drei nicht in einer Geraden liegenden Punkten A, B, F läßt sich mit dem rechten Zeichenwinkel eine nicht durch F gehende Parallele h zur Geraden $g = AB$ konstruieren.

Sei nämlich n die Normale durch F auf g und setzt man voraus, daß n nicht durch A geht (andernfalls hätte man nur die Rolle von A und B zu vertauschen), so konstruiere man die Normale n_1 auf AF durch F, dann den Schnittpunkt D von n_1 mit g, dann die Normale n_2 auf g durch D, dann den Schnittpunkt E von n_2 und AF, schließlich die Normale h auf n_2 durch E.

---

[14]) Vgl. den Artikel von G. Castelnuovo in dem in Anm. [2]) zitierten Buch von F. Enriques (deutsche Ausg., Bd. 2, Art. IV, §§ 1 und 3). Dort wird das Kriterium in der speziellen Form ausgesprochen, die man für $c_1 = 1$ erhält. Auf die obige allgemeinere Form ist hingewiesen in der 3. Auflage der „Questioni", Band 2 (Bologna 1926), Anm. auf S. 236.

19. Zur Abkürzung diene noch folgende Bezeichnung. Es seien irgend m Punkte X_ν $(1 \leqq \nu \leqq m)$ betrachtet, deren Koordinaten bezüglich des in Satz 1 (Nr. 3) genannten Koordinatensystems (x_ν, y_ν) seien; dann soll mit

$$\sum_{\nu=1}^{m} \lambda_\nu X_\nu$$

der Punkt mit den Koordinaten $x = \sum_{\nu=1}^{m} \lambda_\nu x_\nu$, $y = \sum_{\nu=1}^{m} \lambda_\nu y_\nu$ bezeichnet werden, anders gesagt der Endpunkt des vom Punkt A_0 aus abgetragenen Vektors $\sum_{\nu=1}^{m} \lambda_\nu (A_0 X_\nu)$. Die Punkte des in Nr. 5 erklärten Bereiches $\mathfrak{B}_0$ sind dann die Punkte $\sum_{\nu=1}^{n} \varrho_\nu A_\nu$, unter ϱ_ν Zahlen aus $\mathfrak{R}_0$ verstanden. Wir wollen nun (in Nr. **20** bis **23**) zeigen: *Jeder Punkt $\Sigma\, \varrho_\nu A_\nu$ mit Zahlen ϱ_ν aus $\mathfrak{R}_0$ ist mit dem rechten Zeichenwinkel konstruierbar.*

20. Hierzu stellen wir zunächst fest:

(k) Wenn A und B zwei Punkte sind, die sich, ausgehend von den in Satz 1 genannten Punkten A_ν, mit dem rechten Zeichenwinkel konstruieren lassen, dann ist stets auch der Punkt $A + B$ konstruierbar, das ist der Endpunkt des Vektors $A_0A + A_0B$.

Wir unterscheiden beim Nachweis drei Fälle.

Falls einer der Punkte, etwa A, gleich A_0 ist, dann ist $A + B = B$ und die Behauptung ist trivial.

Sind ferner A und B von A_0 verschieden und liegen sie mit A_0 auf einer Geraden g (wobei auch $B = A$ sein darf), dann läßt sich $A + B$ gemäß Satz 3 durch bloße Linealkonstruktion aus A_0, A und B gewinnen, sobald eine Parallele h zu g und ein weder auf g noch auf h liegender Punkt F konstruiert ist. Denn wenn für eine geeignete Abszissenzählung auf g die Abszissen von A_0, A, B gleich 0, a, b sind, so hat der Punkt $A + B$ die Abszisse $a + b = ar$, wobei $r = 1 + \frac{b}{a}$ dem Rationalitätsbereich $\mathfrak{R}\left(1, \frac{b}{a}\right)$ angehört, wie es die Konstruierbarkeit mit dem Lineal (Satz 3) verlangt[15]). Andererseits muß es sicher — und zwar schon unter den Punkten der Ausgangsfigur — einen nicht auf g liegenden Punkt F geben, da ja nach Voraussetzung diese Punkte nicht alle auf einer Geraden liegen; eine nicht durch F gehende Parallele h zu g kann dann gemäß (i), Nr. **18**, konstruiert werden.

Sind endlich A und B zwei Punkte, die nicht mit A_0 in einer Geraden liegen, so braucht man nur durch A die Parallele p_1 zu A_0B und durch B

[15]) Im Falle $A = B$ hat $A + B$ die Abszisse $2a = ra$, wobei $r = 2$ dem Rationalitätsbereich $\mathfrak{R}(1)$ angehört, wie es Satz 3 für den Fall $n = 1$ verlangt.

die Parallele p_2 zu A_0A zu konstruieren, — was gemäß (h), Nr. 18, ausführbar ist — und man erhält $A + B$ als Schnittpunkt von p_1 und p_2.

Damit ist (k) in allen Fällen bestätigt.

21. Nunmehr ist es nur noch nötig, für jede Zahl ϱ aus $\mathfrak{R}_0$ die Konstruierbarkeit der Punkte ϱA_ν zu beweisen, da aus der Konstruierbarkeit der Punkte $\varrho_\nu A_\nu$ gemäß (k) sofort die Konstruierbarkeit des Punktes $\sum_{\nu=1}^{n} \varrho_\nu A_\nu$ folgt. Um aber die Konstruierbarkeit der Punkte ϱA_ν, etwa der Punkte ϱA_1 für jedes ϱ aus $\mathfrak{R}_0$ zu zeigen, ist es ausreichend diese Konstruierbarkeit von ϱA_1 für alle Werte $\varrho = \frac{p_{\mu\nu}}{p_{11}}$ festzustellen, da diese Werte den Rationalitätsbereich $\mathfrak{R}_0$ erzeugen und somit nach Satz 3 aus diesen Punkten durch bloße Linealkonstruktionen alle Punkte ϱA_1 mit ϱ aus $\mathfrak{R}_0$ zu gewinnen sind[16]).

22. Beginnen wir mit den Punkten[17]) $\frac{p_{12}}{p_{11}} A_1$ und $\frac{p_{22}}{p_{11}} A_2$. Um die Konstruierbarkeit dieser Punkte festzustellen, unterscheiden wir verschiedene Fälle bezüglich der Lage von A_2; wir bezeichnen dabei mit g_1 die Gerade A_0A_1 und mit k_1 die Senkrechte zu g_1 durch A_0.

Liegt nun A_2 auf g_1, so ist[18]) $p_{11}p_{22} - p_{12}p_{12} = 0$ und $A_2 = \frac{p_{12}}{p_{11}} A_1 = \frac{p_{22}}{p_{12}} A_1$; somit zählt für $\varrho = \frac{p_{12}}{p_{11}} = \frac{p_{22}}{p_{12}}$ der Punkt ϱA_1 (als gegebener Punkt) zu den konstruierbaren Punkten. Nach Satz 3 ist dann daraus durch bloße Linealkonstruktionen jeder Punkt ϱA_1 zu gewinnen, für den ϱ dem aus $\frac{p_{12}}{p_{11}} = \frac{p_{22}}{p_{12}}$ erzeugten Rationalitätsbereich angehört, insbesondere also auch der Punkt $\frac{p_{12}}{p_{11}} \cdot \frac{p_{22}}{p_{12}} A_1 = \frac{p_{22}}{p_{11}} A_1$.

Liegt andernfalls A_2 nicht auf g_1, jedoch auf k_1 (wo dann $p_{12} = 0$ ist), so sei f die Verbindungsgerade von A_2 mit dem Punkt $-A_1$, der nach Satz 3 durch bloße Linealkonstruktionen aus den gegebenen Punkten zu zu gewinnen ist; dann wird g_1 von der durch A_2 gehenden Senkrechten zu f

---

[16]) Wie man sich dabei eine zur Geraden $g = A_0A_1$ parallele Gerade h und einen weder auf g noch auf h liegenden Punkt F verschafft, ist klar: Einen Punkt F findet man bereits unter den Ausgangspunkten A_ν und h konstruiert man gemäß (i), Nr. 18.

[17]) Wir machen im folgenden (abweichend von Nr. 9 in § 2) keinerlei Voraussetzungen darüber, ob A_2 mit A_0, A_1 auf einer Geraden liegt oder nicht. Unsere Entwicklungen bezüglich der Punkte $\frac{p_{12}}{p_{11}} A_1$ und $\frac{p_{22}}{p_{11}} A_1$ gelten dann analog für irgendwelche Punkte $\frac{p_{\mu\nu}}{p_{\nu\nu}} A_\nu$ und $\frac{p_{\mu\mu}}{p_{\nu\nu}} A_\nu$.

[18]) Vgl. bezüglich $p_{11}p_{22} - p_{12}p_{12} = \Gamma(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ das in Nr. 8 über $\Gamma(\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'') \neq 0$ Gesagte.

im Punkte $\frac{p_{22}}{p_{11}} A_1$ geschnitten, woraus hervorgeht, daß $\frac{p_{22}}{p_{11}} A_1$ und natürlich auch $\frac{p_{12}}{p_{11}} A_1$ $(= A_0)$ zu den konstruierbaren Punkten gehört.

Liegt endlich A_2 weder auf g_1 noch auf k_1, so berechnet man sofort, daß die durch A_2 zu den Geraden g_1 und $A_0 A_2$ gezogenen Senkrechten die Gerade g_1 in den Punkten $\frac{p_{12}}{p_{11}} A_1$ und $\frac{p_{22}}{p_{12}} A_1$ schneiden. Diese Punkte gehören also zu den konstruierbaren; und mit ihnen wieder nach Satz 3 alle Punkte ϱA_1, für die ϱ dem Rationalitätsbereich aus $\frac{p_{12}}{p_{11}}$ und $\frac{p_{22}}{p_{12}}$ angehört, insbesondere also auch der Punkt $\frac{p_{22}}{p_{11}} A_1$.

Damit ist in allen Fällen gezeigt, daß die Punkte $\frac{p_{12}}{p_{11}} A_1$ und $\frac{p_{22}}{p_{11}} A_1$ konstruierbar sind, desgleichen analog (vgl. Anm. [17]) alle Punkte $\frac{p_{\mu 1}}{p_{\nu\nu}} A_\nu$ und $\frac{p_{\mu\mu}}{p_{\nu\nu}} A_\nu$.

23. Um nun noch (wenn $n \geqq 3$ ist) die Konstruierbarkeit der Punkte $\frac{p_{\mu\nu}}{p_{\lambda\lambda}} A_\lambda$ für $\mu \neq \lambda$, $\nu \neq \lambda$, $\mu \neq \nu$ beispielsweise des Punktes $\frac{p_{23}}{p_{11}} A_1$ nachzuweisen, können wir von dem Falle absehen, daß die *beiden* Punkte A_2, A_3 auf $g_1 = A_0 A_1$ liegen. Denn da dann gemäß Nr. **22** sowohl $A_2 = \frac{p_{12}}{p_{11}} A_1$ als auch $\frac{p_{23}}{p_{22}} A_2 = \frac{p_{23}}{p_{22}} \cdot \frac{p_{22}}{p_{12}} A_1 = \frac{p_{23}}{p_{12}} A_1$ zu den konstruierbaren Punkten zählen, so gilt — weil $\frac{p_{23}}{p_{11}} = \frac{p_{12}}{p_{11}} \cdot \frac{p_{23}}{p_{12}}$ rational aus $\frac{p_{12}}{p_{11}}$ und $\frac{p_{23}}{p_{12}}$ erhältlich ist — gemäß Satz 3 das Gleiche für den Punkt $\frac{p_{23}}{p_{11}} A_1$. Liegt aber von den beiden Punkten A_2, A_3 wenigstens der eine, etwa A_2, nicht auf g_1, so beachten wir, daß $\frac{p_{23}}{p_{22}} A_2$ und $\frac{p_{11}}{p_{22}} A_2$ gemäß Nr. **22** zu den konstruierbaren Punkten gehören. Dann aber wird $\frac{p_{23}}{p_{11}} A_1$ erhalten, indem man zur Verbindungsgeraden von A_1 mit $\frac{p_{11}}{p_{22}} A_2$ die Parallele durch $\frac{p_{23}}{p_{22}} A_2$ zieht und diese mit g_1 zum Schnitt bringt.

Damit sind alle Punkte $\frac{p_{\mu\nu}}{p_{11}} A_1$ als konstruierbar erkannt, daher auch (für jedes ϱ aus $\mathfrak{R}_0$) alle Punkte ϱA_1 und analog alle Punkte ϱA_ν womit, wie schon gesagt (Nr. **21**), die Konstruierbarkeit aller Punkte $\Sigma \varrho_\nu A_\nu$, d. h. aller Punkte des Bereiches $\mathfrak{B}_0$, nachgewiesen ist.

24. Nunmehr ist es leicht zu sehen, daß auch alle Geraden des in Nr. **5** erklärten Bereiches $\mathfrak{B}_0$ mit dem rechten Zeichenwinkel konstruierbar sind. Nehmen wir nämlich drei nicht in einer Geraden liegende unter den gegebenen Punkten $A_0, A_1, \ldots, A_n$; es seien dies etwa (wie in Nr. **9**) A_0, A_1, A_2. Wenn

wir durch eine Ecke des Dreiecks $A_0A_1A_2$ die Parallele zur Gegenseite ziehen, so ist natürlich jede dieser drei Geraden gemäß (h), Nr. 18, mit dem rechten Zeichenwinkel konstruierbar. Zu jeder von diesen drei Geraden verschiedenen Geraden g gibt es dann (wenigstens) zwei Seiten des Dreiecks $A_0A_1A_2$, etwa g' und g'', so daß die Schnittpunkte $gg' = X'$ und $gg'' = X''$ zwei voneinander verschiedene Punkte sind. Gehört nun g zum Bereich $\mathfrak{B}_0$, so gehören gemäß § 2 auch X' und X'' zu $\mathfrak{B}_0$ (da ja g', g'' als Verbindungsgerade gegebener Punkte A_ν nach § 2 selbstverständlich zu $\mathfrak{B}_0$ gehören). Gemäß dem in Nr. 20 bis 23 Bewiesenen sind aber dann X', X'' konstruierbar und das Gleiche gilt also auch von ihrer Verbindungsgeraden g.

Ebenso wie alle Punkte sind also auch alle Geraden des in Nr. 5 gekennzeichneten Bereiches $\mathfrak{B}_0$ mit dem rechten Zeichenwinkel konstruierbar und Satz 1 ist in allen Teilen bewiesen.

(Eingegangen am 14. März 1940.)

Über die isoperimetrische Aufgabe im n-dimensionalen Raum konstanter negativer Krümmung.

I. Die isoperimetrischen Ungleichungen in der hyperbolischen Ebene und für Rotationskörper im n-dimensionalen hyperbolischen Raum.

Herrn Oskar Perron zum 60. Geburtstag am 7. Mai 1940 gewidmet.

Von

Erhard Schmidt in Berlin.

Einleitung.

In dieser Arbeit, deren erste Hälfte hier vorliegt, soll ein Beweis für die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises und der Kugel im n-dimensionalen Raum konstanter negativer Krümmung gegeben werden.

Der Bereich der Vergleichskörper wird nicht durch die Forderung der Konvexität eingeschränkt. Auch über die topologische Struktur der in Betracht gezogenen Körper und ihrer Oberflächen werden keinerlei Voraussetzungen gemacht.

Es wird im wesentlichen und kurz gesagt lediglich vorausgesetzt, daß die Berandung aller Dimensionenzahlen aus endlich vielen zweimal stetig differenzierbaren Stücken besteht.

Das Beweisverfahren folgt dem von H. A. Schwarz gewiesenen Wege in einer überraschenden Analogie mit den Beweisen, welche in meiner Arbeit „Über das isoperimetrische Problem im Raum von n Dimensionen“[1]) für den Euklidischen Raum entwickelt worden sind.

Endlich darf noch auf die sich ergebenden Verschärfungen der isoperimetrischen Ungleichungen hingewiesen werden, die sich geometrisch als sehr einfach und anschaulich darstellen und eine bemerkenswerte Übereinstimmung mit den analogen Verschärfungen an den Tag legen, welche in der genannten Arbeit für den Euklidischen Raum bewiesen worden sind.

In einer demnächst erscheinenden Arbeit werden mit ähnlichen Methoden die analogen isoperimetrischen Sätze für den n-dimensionalen sphärischen Raum hergeleitet werden.

Inhaltsverzeichnis.

§ 1. Die isoperimetrischen Ungleichungen in der Ebene konstanter negativer Krümmung 205

---

[1]) Math. Zeitschr. 44 (1939), S. 689—788.

§ 2. Feststellung der geschlossenen Kurven, welche in den isoperimetrischen Ungleichungen die Gleichheit erreichen 210
§ 3. Die isoperimetrische Aufgabe für Rotationskörper im n-dimensionalen Raum konstanter negativer Krümmung 218

§ 1.

Die isoperimetrischen Ungleichungen in der Ebene konstanter negativer Krümmung.

Wir stellen die hyperbolische Ebene dar, indem wir der gewöhnlichen Halbebene $x > 0$ mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y die Maßbestimmung aufprägen

$$(1) \qquad dS^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{x^2} = \frac{ds^2}{x^2}.$$

Für das hyperbolische Flächenelement dT erhält man dementsprechend

$$(2) \qquad dT = \frac{dx\,dy}{x^2}.$$

Die Maßbestimmung bleibt bekanntlich invariant gegenüber den Verschiebungen parallel zur y-Achse, den Ähnlichkeitstransformationen mit dem Ähnlichkeitszentrum auf der y-Achse und den Spiegelungen an den Orthogonalkreisen zur y-Achse, zu welchen natürlich auch die Parallelen zur x-Achse zählen.

Es seien $x(s)$ und $y(s)$ die laufenden Koordinaten einer geschlossenen Kurve C als Funktionen der Euklidischen Bogenlänge. Ihre ersten Ableitungen seien bis auf höchstens endlich viele Punkte bestimmt und stetig.

Man verschiebe nun den Koordinatenanfangspunkt längs der y-Achse dergestalt, daß der scheinbare Größenwinkel 2α, unter welchem die Kurve C von diesem Punkt aus gesehen wird, durch die x-Achse halbiert wird. Der Winkel 2α kann sinngemäß als ein Breitenwinkel von C bezeichnet werden. Ist nämlich C eingeschrieben in die Figur, welche von zwei Abstandskurven begrenzt wird, die auf beiden Seiten einer hyperbolischen Geraden Γ in gleichem Abstand verlaufen, so ist es natürlich, den doppelten Abstand als Breite von C in bezug auf die Mittelgrade Γ zu betrachten. Die Mittelgeraden eines Kreises gehen dann alle durch seinen hyperbolischen Mittelpunkt und seine Breite in bezug auf jede dieser Mittelgeraden wird gleich dem hyperbolischen Durchmesser. Die beiden Schenkel des Breitenwinkels 2α sind nun aber in der Tat symmetrische Abstandskurven in bezug auf die x-Achse als Mittelgerade.

Man führe jetzt Polarkoordinaten ein:

$$(3) \qquad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2, \quad dx\,dy = r\,dr\,d\varphi.$$

Dann erhält man für die Breite B der Kurve C in bezug auf die x-Achse als Mittelgerade

$$B = 2\int_0^{\alpha} \frac{r\,d\varphi}{r\cos\varphi} = -2\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right). \tag{4}$$

B ist dann auch der hyperbolische Durchmesser aller Kreise mit dem Breitenwinkel 2α.

Es bezeichne nun $2\alpha'$ den Breitenwinkel des Kreises gleichen Umfangs, d. h. des Kreises, der denselben hyperbolischen Umfang besitzt wie C. Ebenso bezeichne $2\alpha''$ den Breitenwinkel des Kreises gleichen Inhalts, d. h. des Kreises, der denselben hyperbolischen Inhalt umschließt wie C.

Das Hauptergebnis dieses Paragraphen besteht dann in dem folgenden Satz: *Es ist*

$$\cos\alpha'' \geqq \frac{\cos\alpha'}{\cos(\alpha - \alpha')}. \tag{5}$$

Hieraus folgt a fortiori die gewöhnliche isoperimetrische Ungleichung

$$\alpha'' \leqq \alpha'. \tag{6}$$

Bei vorgegebenem α' und α gibt es für $\alpha \leqq \alpha'$ eine und nur eine geschlossene einfache Kurve C, welche in (5) *die Gleichheit erreicht; für $\alpha = \alpha'$ ist das der Kreis.*

Für $\alpha > \alpha'$ kann, wie im § 2 gezeigt werden wird, die Ungleichung (5) noch verschärft werden. *In der so verschärften Ungleichung wird die Gleichheit von einer und nur einer geschlossenen einfachen Kurve erreicht.*

Beweis. Es bezeichne N die äußere Normale von C und (Nr) und $(N\varphi)$ die Winkel, welche sie mit dem Radius Vektor und der senkrecht zu ihm nach dem wachsenden φ weisenden Richtung bildet.

Man setze nun ein für allemal den Durchlaufungssinn der Kurve C so fest, daß die äußere Normale N zu der im Durchlaufungssinn gerichteten Tangente so liegt wie der Radius Vektor zu der senkrecht zu ihm nach dem wachsenden φ weisenden Richtung. Dann ist

$$\cos(Nr) = r\frac{d\varphi}{ds}, \quad \cos(N\varphi) = -\frac{dr}{ds}. \tag{7}$$

Es bezeichne L die hyperbolische Länge der Kurve C und J den hyperbolischen Inhalt des von ihr umschlossenen Gebietes T. Dann ist wegen (1) und (2)

$$L = \int_C \frac{ds}{r\cos\varphi}, \quad J = \int_T \frac{r\,dr\,d\varphi}{r^2\cos^2\varphi} = \int_C \frac{tg\,\varphi\cos(N\varphi)}{r}\,ds. \tag{8}$$

Man führe nun einen Parameter q ein, der lediglich der Beschränkung

$$q \geqq \sin\alpha$$

unterworfen sei.

Dann ist das innere Produkt des Vektors, dessen erste Komponente gleich $\sin\varphi$, zweite gleich $+\sqrt{q^2-\sin^2\varphi}$ und Länge gleich q ist, mit dem Einheitsvektor, dessen erste Koordinate gleich $\cos(N\varphi)$ und zweite gleich $|\cos(Nr)|$ ist, nicht größer als das Produkt der Längen der beiden Vektoren, d. h. es ist

$$\sin\varphi\cos(N\varphi)+\sqrt{q^2-\sin^2\varphi}\,|\cos(Nr)|\leqq q$$

$$\frac{tg\,\varphi\cos(N\varphi)}{r}\leqq\frac{q}{r\cos\varphi}-\frac{\sqrt{q^2-\sin^2\varphi}}{r\cos\varphi}|\cos(Nr)|. \tag{9}$$

Das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn

$$\sin\varphi=q\cos(N\varphi) \tag{10}$$

ist. Aus (8) und (9) folgt

$$J\leqq qL-\int_C\frac{\sqrt{q^2-\sin^2\varphi}}{r\cos\varphi}|\cos(Nr)|\,ds.$$

Wegen (7) ist also

$$J\leqq qL-\int_C\frac{\sqrt{q^2-\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}\left|\frac{d\varphi}{ds}\right|ds. \tag{11}$$

Das Gleichheitszeichen gilt hier dann und nur dann, wenn (10) identisch erfüllt ist.

Die Extremalwerte $\varphi=\pm\alpha$ können natürlich beliebig oft angenommen werden. Es sei nun P' ein Punkt, in welchem $\varphi=\alpha$ ist. Man durchlaufe C von P' aus in dem oben festgesetzten Durchlaufungssinn. Dann sei P_1 der erste Punkt, in welchem $\varphi=-\alpha$ wird, und auf dem Wege von P' nach P_1 P_0 der letzte Punkt, in welchem $\varphi=\alpha$ ist. Weiter sei P_3 der erste auf P_1 folgende Punkt, in welchem wieder $\varphi=\alpha$ ist, und auf dem Wege von P_1 nach P_3 P_2 der letzte Punkt, für welchen $\varphi=-\alpha$ ist. Mißt man jetzt die Euklidische Bogenlänge s auf C von P_0 ab und bezeichnet mit $s_1s_2s_3$ die Bogenlängen in $P_1P_2P_3$, so erhält man

$$\varphi(0)=\alpha,\quad \varphi(s_1)=-\alpha,\quad \varphi(s_2)=-\alpha,\quad \varphi(s_3)=\alpha, \tag{12}$$

und es ist

$$|\varphi(s)|<\alpha\quad\text{für}\quad 0<s<s_1\quad\text{und}\quad s_2<s<s_3. \tag{13}$$

Jetzt ist

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\sqrt{q^2-\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}\,d\varphi=\int_{s_1}^{0}\frac{\sqrt{q^2-\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}\frac{d\varphi}{ds}\,ds\leqq\int_0^{s_1}\frac{\sqrt{q^2-\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}\left|\frac{d\varphi}{ds}\right|ds$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\sqrt{q^2-\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}\,d\varphi=\int_{s_2}^{s_3}\frac{\sqrt{q^2-\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}\frac{d\varphi}{ds}\,ds\leqq\int_{s_2}^{s_3}\frac{\sqrt{q^2-\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}\left|\frac{d\varphi}{ds}\right|ds.$$

Die Addition ergibt

$$(14)\qquad 4\int_0^{\alpha}\frac{\sqrt{q^2-\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}\,d\varphi \leqq \int_0^{s_1}\frac{\sqrt{q^2-\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}\left|\frac{d\varphi}{ds}\right|ds + \int_{s_2}^{s_3}\frac{\sqrt{q^2-\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}\left|\frac{d\varphi}{ds}\right|ds \leqq \int_C\frac{\sqrt{q^2-\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}\left|\frac{d\varphi}{ds}\right|ds.$$

Das Gleichheitszeichen gilt hier dann und nur dann, wenn φ als Funktion von s in folgender Weise verläuft:

$$(15)\quad \begin{cases} \text{für } 0<s<s_1 & \frac{d\varphi}{ds}\leqq 0,\ |\varphi|<\alpha \text{ und wegen (7) } \cos(Nr)\leqq 0,\\ \text{für } s_1<s<s_2 & \frac{d\varphi}{ds}\equiv 0,\ \varphi\equiv-\alpha,\ \cos(N\varphi)=-1 \text{ und wegen (7) } \frac{dr}{ds}=1,\\ \text{für } s_2<s<s_3 & \frac{d\varphi}{ds}\geqq 0,\ |\varphi|<\alpha \text{ und wegen (7) } \cos(Nr)\geqq 0,\\ \text{für } s_3<s<l & \frac{d\varphi}{ds}\equiv 0,\ \varphi\equiv\alpha,\ \cos(N\varphi)=1 \text{ und wegen (7) } \frac{dr}{ds}=-1. \end{cases}$$

Dabei bedeutet l die Euklidische Länge von C, und die Vorzeichenbestimmung von $\cos(N\varphi)$ für $s_1<s<s_2$ und $s_3<s<l$ ergibt sich daraus, daß die äußere Normale der in den Winkel $-\alpha\leqq\varphi\leqq\alpha$ eingeschriebenen Kurve C auf der Begrenzungsstrecke $\varphi\equiv-\alpha$ in die Richtung des fallenden φ weisen muß und auf der Strecke $\varphi\equiv\alpha$ in die Richtung des wachsenden.

Aus (11) und (14) folgt

$$(16)\qquad J\leqq qL-4\int_0^{\alpha}\frac{\sqrt{q^2-\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}\,d\varphi = \Gamma(L,\alpha,q).$$

Das Gleichheitszeichen gilt hier dann und nur dann, wenn (10) und (15) erfüllt sind.

Spezialisiert man

$$q=\sin\alpha,$$

so ergibt (16)

$$(17)\qquad J\leqq L\sin\alpha-4\int_0^{\alpha}\frac{\sqrt{\sin^2\alpha-\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}\,d\varphi = \Gamma(L,\alpha,\sin\alpha).$$

Nun wollen wir zunächst zeigen, daß in der letzten Ungleichung (17) das Gleichheitszeichen gilt, wenn C ein Kreis mit dem Breitenwinkel 2α ist. Dazu bedarf es lediglich des Nachweises, daß für einen solchen Kreis (10) bei $q=\sin\alpha$ und (15) erfüllt sind. Wird nun der Kreis in dem oben festgelegten Sinn durchlaufen, so genügt der zum laufenden Punkt gehörige Winkel φ als Funktion von s offenbar den Forderungen (15), wenn s vom

Berührungspunkt mit der Geraden $\varphi = +\alpha$ gemessen wird, und daher s_1 die Bogenlänge im Berührungspunkte mit der Geraden $\varphi = -\alpha$ angibt, während $s_2 = s_1$ und $s_3 = l$ werden.

Um ferner einzusehen, daß auch (10) erfüllt ist, betrachte man das Dreieck OPM, wobei O den Koordinatenanfangspunkt bedeutet, P den laufenden Punkt des Kreises und M seinen Mittelpunkt, der natürlich auf der x-Achse liegen muß. Der Sinussatz ergibt

$$|\sin\varphi| = \frac{\overline{MP}}{\overline{OM}}\,|\sin(Nr)|. \tag{18}$$

Ist insbesondere P einer der Berührungspunkte des Kreises mit den Geraden $\varphi = \pm\alpha$, so folgt

$$\sin\alpha = \frac{\overline{MP}}{\overline{OM}}.$$

Also ist

$$|\sin\varphi| = \sin\alpha\,|\sin(Nr)| = \sin\alpha\,|\cos(N\varphi)|. \tag{19}$$

Nun stimmt das Vorzeichen von $\cos(N\varphi)$ mit dem Vorzeichen von φ überein; also gilt (10) bei $q = \sin\alpha$.

Bezeichnet $\bar{J}(\alpha)$ den hyperbolischen Inhalt und $\bar{L}(\alpha)$ den hyperbolischen Umfang des Kreises mit dem Breitenwinkel 2α, so ist also, wie eben gezeigt, gemäß (17)

$$\bar{J}(\alpha) = \bar{L}(\alpha)\sin\alpha - 4\int_0^{\alpha} \frac{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\varphi}}{\cos\varphi}\,d\varphi = \Gamma(\bar{L}(\alpha), \alpha, \sin\alpha). \tag{20}$$

Daher läßt sich die Ungleichung (17) auch in folgender Gestalt schreiben:

$$J \leqq L\sin\alpha - (\bar{L}(\alpha)\sin\alpha - \bar{J}(\alpha)) = \Gamma(L, \alpha, \sin\alpha). \tag{21}$$

Für den Radius R des Kreises mit dem Breitenwinkel 2α hat man gemäß (4)

$$R = -\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Nach den bekannten Formeln für den Umfang $\bar{L}\{R\}$ und den Inhalt $\bar{J}\{R\}$ des Kreises mit Radius R ist nun

$$\bar{L}(\alpha) = \bar{L}\{R\} = \pi(e^R - e^{-R}), \qquad \bar{J}(\alpha) = \bar{J}\{R\} = \pi(e^R + e^{-R} - 2). \tag{22}$$

Also ergibt sich

$$\bar{L}(\alpha) = 2\pi\operatorname{tg}\alpha, \qquad \bar{J}(\alpha) = 2\pi\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right). \tag{23}$$

So erhält (21) die Gestalt

$$J \leqq L\sin\alpha - 2\pi(1 - \cos\alpha). \tag{24}$$

Bedeuten nun $2\alpha'$ und $2\alpha''$ die Breitenwinkel der Kreise gleichen Umfangs und gleichen Inhalts, so ist gemäß (23)

$$L = 2\pi \operatorname{tg}\alpha', \qquad J = 2\pi\left(\frac{1}{\cos\alpha''} - 1\right). \tag{25}$$

Führt man diese Ausdrücke in (24) ein, so ergibt sich die Ungleichung (5), w. z. b. w.

Für die majorisierende Seite der Ungleichungen (17), (21), (24) erhält man noch die Darstellung

$$\Gamma(L, \alpha, \sin\alpha) = 2\pi\left(\frac{\cos(\alpha - \alpha')}{\cos\alpha'} - 1\right) \tag{26}$$

und es ist in Übereinstimmung mit dem eben Ausgeführten für $\alpha \neq \alpha'$

$$\Gamma(L, \alpha, \sin\alpha) < \Gamma(L, \alpha', \sin\alpha') = \bar{J}(\alpha'). \tag{27}$$

Die weiteren im Anschluß an den Satz (5) gemachten Behauptungen werden im nächsten Paragraphen bewiesen.

Zum Schluß darf noch auf die bemerkenswerte Analogie zu den entsprechenden Ungleichungen in der Euklidischen Ebene hingewiesen werden. Bedeutet nämlich 2ϱ die Breite eines der gegebenen geschlossenen Kurve umschriebenen Parallelstreifens, l ihre Euklidische Länge und J den Euklidischen Inhalt des umschlossenen Gebietes, so entspricht der Ungleichung (21) die Ungleichung

$$J \leqq l\varrho - (2\pi\varrho\cdot\varrho - \pi\varrho^2) = l\varrho - \pi\varrho^2 = \frac{l^2}{4\pi} - \frac{\pi}{4}\left(\frac{l}{\pi} - 2\varrho\right)^2.$$

§ 2.

Feststellung der geschlossenen Kurven, welche in den isoperimetrischen Ungleichungen die Gleichheit erreichen.

Das Gleichheitszeichen in (16) gilt, wie nochmals hervorgehoben werden darf, dann und nur dann, wenn (15) und (10) erfüllt sind.

Gemäß (15) ist für

$$s_1 < s < s_2 \quad \text{und} \quad s_3 < s < l \quad |\sin\varphi| \equiv \sin\alpha \quad |\cos(N\varphi)| \equiv 1, \tag{28}$$

woraus wegen (10)

$$q = \sin\alpha$$

folgen würde. Ist also

$$q > \sin\alpha,$$

so folgt

$$s_1 = s_2, \quad s_3 = l. \tag{29}$$

Ist andererseits

$$q = \sin\alpha$$

und verläuft die geschlossene Kurve C so, daß für

$$s_1 < s < s_2 \quad \varphi \equiv -\alpha \quad \text{und für} \quad s_3 < s < l \quad \varphi \equiv \alpha$$

wird, so sind (15) und (10) in diesen beiden Intervallen von s erfüllt; denn da C in den Winkelraum $|\varphi| \leqq \alpha$ eingeschrieben ist, so weist die äußere Normale für $\varphi \equiv -\alpha$ in die Richtung des fallenden φ und für $\varphi \equiv \alpha$ in die Richtung des wachsenden und daher stimmt auch das Vorzeichen von $\cos(N\varphi)$ mit dem von $\sin\varphi$ überein, wodurch (10) gesichert ist.

Jetzt wollen wir den Verlauf von C in den beiden Intervallen $0 < s < s_1$ und $s_2 < s < s_3$ untersuchen. Auf beiden Kurvenbögen ist gemäß (15) $|\varphi| < \alpha$ und mithin wegen (10) $|\cos(N\varphi)| < 1$, also $\cos(Nr) \neq 0$. Wegen (15) ist also auf dem $0 < s < s_1$ entsprechenden Kurvenbogen $\cos(Nr) < 0$, d. h. der Kurvenbogen begrenzt das umschlossene Gebiet mit seiner vom Koordinatenanfangspunkt O abgewandten Seite. Ebenso ist wegen (15) für $s_2 < s < s_3$ $\cos(Nr) > 0$, d. h. der Kurvenbogen begrenzt das umschlossene Gebiet mit seiner dem Koordinatenanfangspunkt O zugewandten Seite.

Nun ist wegen (7)

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{\cos(N\varphi)}{\cos(Nr)} = -\operatorname{sign}(\cos(Nr))\frac{\cos(N\varphi)}{\sqrt{1-\cos^2(N\varphi)}}, \tag{30}$$

wobei die Quadratwurzel hier wie durchweg später mit dem positiven Vorzeichen zu nehmen ist.

Die Einführung von (10) ergibt

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi} = -\operatorname{sign}(\cos(Nr))\frac{\sin\varphi}{\sqrt{q^2-\sin^2\varphi}}; \tag{31}$$

gilt umgekehrt (31), so ist auch (10) erfüllt. Für einen $s_2 < s < s_3$ entsprechenden und also das Gebiet mit seiner O zugewandten Seite begrenzenden Kurvenbogen gilt also

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{\sin\varphi}{\sqrt{q^2-\sin^2\varphi}} \tag{32}$$

und für einen $0 < s < s_1$ entsprechenden und also das Gebiet mit seiner O abgekehrten Seite begrenzenden Kurvenbogen

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{q^2-\sin^2\varphi}}. \tag{33}$$

Nun ergeben sich die Lösungskurven der Differentialgleichung (32) durch eine Quadratur und können durch eine Ähnlichkeitstransformation von O aus alle ineinander übergeführt werden. Dasselbe gilt für die Lösungskurven von (33). Bei der Spiegelung an einem Kreise mit dem Mittelpunkt O wechselt $\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi}$ das Vorzeichen, d. h. es werden die Lösungskurven von (32) und (33)

miteinander vertauscht. Daher sind die Lösungskurven von (32) miteinander hyperbolisch kongruent und zu den ebenso miteinander hyperbolisch kongruenten Lösungskurven von (33) hyperbolisch symmetrisch.

Ferner zeigen die Gleichungen (32), (33), daß jede der Lösungskurven durch Spiegelung an der x-Achse in sich selber übergeht und daher insbesondere die beiden Geraden $\varphi = \pm \alpha$ in Punkten schneidet, die von O gleich weit entfernt sind.

Da endlich auf einer Lösungskurve von (32) r mit wachsendem φ bei negativem φ wächst und bei positivem φ abnimmt, so verläuft sie außerhalb des Kreises mit dem Mittelpunkt O, der durch die beiden Schnittpunkte mit den Geraden $\varphi = \pm \alpha$ geht. Ebenso folgt, daß eine Lösungskurve von (33) innerhalb dieses Kreises verläuft.

Jetzt wollen wir die Lösungskurven von (32) bestimmen.

Dazu betrachte man den Kreis, dessen Mittelpunkt M auf der positiven x-Achse in der Entfernung $\frac{1}{q}$ von O liegt, und dessen Radius gleich 1 ist. Bedeutet P den laufenden Punkt des Kreises, so lehrt die Anwendung des Sinussatzes auf das Dreieck OPM

$$|\sin \varphi| = \frac{\overline{MP}}{\overline{OM}} |\sin(Nr)| = q\,|\sin(Nr)| = q\,|\cos(N\varphi)|.$$

Die Einführung dieser Gleichung in die Identität (30) ergibt zunächst die Gleichheit der absoluten Beträge beider Seiten von (32). Für denjenigen durch den Winkel $|\varphi| \leqq \alpha$ aus dem Kreise ausgeschnittenen Bogen, der dem Koordinatenanfangspunkt O die konkave Seite zukehrt, stimmen aber auch die Vorzeichen. Denn $\frac{dr}{d\varphi}$ und φ haben auf ihm entgegengesetztes Vorzeichen. Also verläuft die Kurve C für $s_2 < s < s_3$ in einem solchen Kreisbogen, der das umschlossene Gebiet mit seiner O zugewandten, konkaven Seite begrenzt und für

$$0 < s < s_1$$

in seinem Spiegelbild an einem Kreise mit dem Mittelpunkt O, welches das Gebiet mit seiner O abgekehrten Seite begrenzt.

Für

$$q = \sin \alpha$$

berührt der Kreisbogen die beiden Geraden $\varphi = \pm \alpha$. Er wird durch Spiegelung an dem Kreise mit dem Mittelpunkt O, der durch die beiden Berührungspunkte geht, in seinem Komplementärkreisbogen übergeführt und ist daher ein hyperbolischer Halbkreis.

Damit ist festgestellt:

I. Es sei

$$q = \sin \alpha.$$

Dann gilt in der isoperimetrischen Ungleichung (16) das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn die Kurve C die folgende Gestalt hat:

C besteht aus zwei in bezug auf die x-Achse zueinander symmetrischen Strecken auf den beiden Geraden $\varphi = \pm \alpha$ und zwei auf diesen mit der konvexen Seite nach außen aufgestülpten Kreisbögen, welche die Geraden berühren und daher hyperbolische Halbkreise sind.

Es bezeichne D die hyperbolische Länge dieser Strecken. Dann ergibt sich für den Umfang $\bar{L}_{\mathrm{I}}(\alpha, D)$ dieser Figur

$$\bar{L}_{\mathrm{I}}(\alpha, D) = \bar{L}(\alpha) + 2D, \tag{34}$$

wobei, wie in § 1, $\bar{L}(\alpha)$ den Umfang des Kreises mit dem Breitenwinkel 2α bezeichnet.

Es gibt also bei vorgegebenem L und α dann und nur dann eine Figur dieser Figurenschar I, wenn

$$\bar{L}(\alpha) \leqq L \text{ oder, was damit gleichbedeutend, } \alpha \leqq \alpha' \tag{35}$$

ist, wobei, wie in § 1, $2\alpha'$ den durch die Gleichung

$$\bar{L}(\alpha') = L \tag{36}$$

definierten Breitenwinkel des Kreises gleichen Umfanges bezeichnet. Dabei wird D durch die Gleichung

$$\bar{L}(\alpha) + 2D = L \tag{37}$$

bestimmt.

Bei der Spezialisierung

$$q = \sin \alpha$$

geht die Ungleichung (16) in die Ungleichung (17) über, die wieder mit den Ungleichungen (21), (24), (26), (5) gleichbedeutend ist. Wie eben festgestellt, *gibt es also im Falle*

$$\alpha \leqq \alpha', \text{ also } \bar{L}(\alpha) \leqq L,$$

eine und nur eine geschlossene einfache Kurve, welche in diesen isoperimetrischen Ungleichungen die Gleichheit erreicht. Diese Kurve ist eine Figur der Schar I, wobei D durch (37) bestimmt ist. Für $\alpha = \alpha'$ verschwindet D, d. h. die Kurve ist der Kreis mit dem Breitenwinkel $2\alpha'$. Damit ist zugleich bewiesen, *daß*

der Kreis die einzige Figur ist, welche in der aus (5) *a fortiori folgenden gewöhnlichen isoperimetrischen Ungleichung* (6) *die Gleichheit erreicht.*

II. Es sei

$$q > \sin\alpha.$$

Dann gilt in der isoperimetrischen Ungleichung (16) das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn die Kurve C, für welche wegen (29) $s_1 = s_2$ und $s_3 = l$ sein muß, die folgende Gestalt hat:

C besteht aus zwei innerhalb des Winkels $-\alpha \leqq \varphi \leqq \alpha$ verlaufenden, sich auf den beiden Schenkeln schneidenden Kreisbögen, die durch Spiegelung an dem Kreise mit dem Mittelpunkt O, der durch die beiden Schnittpunkte geht, ineinander übergehen. Man kann dabei durch eine Ähnlichkeitstransformation von O aus erreichen, daß der das umschlossene Gebiet mit seiner O zugekehrten Seite begrenzende, also außerhalb des den Spiegel bildenden Kreises verlaufende Bogen einem Kreise mit dem Radius 1 angehört, dessen Mittelpunkt M auf der positiven x-Achse in der Entfernung $\frac{1}{q}$ von O liegt. Für $q < 1$ gehören die beiden Begrenzungsbögen hyperbolischen Kreisen an, für $q = 1$ Orizyklen und für $q > 1$ Abstandskurven. Für $q = \sin\alpha$ geht die Figur in den Kreis mit dem Breitenwinkel 2α über. Für $q \to \infty$ konvergiert M gegen O und die Figur gegen den doppelt durchlaufenen Bogen des Kreises mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkt O, welcher die beiden Punkte $r = 1$, $\varphi = \pm\alpha$ verbindet, d. h. gegen das doppelt durchlaufene hyperbolische Geradenstück zwischen diesen beiden Punkten.

Es bezeichne nun $C_{\mathrm{II},\alpha,q}$ die geschlossene Umgrenzungskurve, $\overline{J}_{\mathrm{II}}(\alpha, q)$ den Inhalt und $\overline{L}_{\mathrm{II}}(\alpha, q)$ den Umfang der zu α und q gehörenden Figur der eben erörterten Schar II. Da die Figur, wie oben festgestellt, für $q = \sin\alpha$ in den Kreis mit dem Breitenwinkel 2α übergeht, so ist

$$\overline{J}_{\mathrm{II}}(\alpha, \sin\alpha) = \overline{J}(\alpha), \quad \overline{L}_{\mathrm{II}}(\alpha, \sin\alpha) = \overline{L}(\alpha), \tag{38}$$

wobei $\overline{J}(\alpha)$ und $\overline{L}(\alpha)$ wie in § 1 Inhalt und Umfang des Kreises mit dem Breitenwinkel 2α bezeichnen. Man erhält ferner gemäß (8) bei Berücksichtigung von (10)

$$\overline{J}_{\mathrm{II}}(\alpha, q) = \int_{C_{\mathrm{II},\alpha,q}} \frac{\sin\varphi\cos(N\varphi)}{\cos\varphi}\,\frac{1}{r}\,ds = \int_{C_{\mathrm{II},\alpha,q}} \frac{\sin^2\varphi}{q\cos\varphi}\,\frac{1}{r}\,ds.$$

Wegen (32) und (33) ist nun

$$\left(\frac{1}{r}\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + 1 = \frac{q^2}{q^2 - \sin^2\varphi}. \tag{39}$$

Bei Einführung dieses Ausdrucks werden die Integrale längs den beiden Kreisbögen, aus welchen $C_{\mathrm{II},\alpha,q}$ zusammengesetzt ist, einander gleich, und man erhält

$$(40)\qquad \bar{J}_{\mathrm{II}}(\alpha,q) = 2\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sin^2\varphi}{q\cos\varphi}\,\frac{q}{\sqrt{q^2-\sin^2\varphi}}\,d\varphi = 4\int_{0}^{\alpha} \frac{\operatorname{tg}\varphi\sin\varphi}{\sqrt{q^2-\sin^2\varphi}}.$$

Ebenso ergibt sich aus (8) bei Einführung von (39)

$$(41)\qquad \bar{L}_{\mathrm{II}}(\alpha,q) = \int_{C_{\mathrm{II},\alpha,q}} \frac{1}{\cos\varphi}\,\frac{1}{r}\,ds = 4\int_{0}^{\alpha} \frac{d\varphi}{\cos\varphi\sqrt{1-\dfrac{\sin^2\varphi}{q^2}}}.$$

Die Darstellungen (40) und (41) zeigen, daß $\bar{J}_{\mathrm{II}}(\alpha,q)$ und $\bar{L}_{\mathrm{II}}(\alpha,q)$ bei festem α mit wachsendem q monoton abnehmen, und zwar wird

$$(42)\qquad \lim_{q\to\infty} \bar{J}_{\mathrm{II}}(\alpha,q) = 0$$

und gemäß (4)

$$(43)\qquad \lim_{q\to\infty} \bar{L}_{\mathrm{II}}(\alpha,q) = -4\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Nun ist für jede geschlossene einfache Kurve C mit dem Breitenwinkel 2α

$$(44)\qquad L > -4\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Denn C muß mindestens vier bis auf die Endpunkte punktfremde Bögen enthalten, welche die x-Achse mit einer der Abstandskurven $\varphi = \pm\alpha$ verbinden, und ein solcher Verbindungsbogen muß mindestens so lang sein wie der durch (4) gegebene Abstand der beiden Abstandskurven von der x-Achse.

Nun gibt es zu vorgegebenem L und α dann und nur dann eine Figur der Schar II, wenn die Gleichung

$$(45)\qquad \bar{L}_{\mathrm{II}}(\alpha,q) = L$$

eine Lösung

$$q = q^* = q^*(L,\alpha)$$

besitzt. Die linke Seite dieser Gleichung nimmt, wie oben festgestellt, wenn q von $\sin\alpha$ bis ∞ wächst, von $\bar{L}(\alpha)$ bis $-4\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$ monoton ab. Bei Berücksichtigung von (44) folgt daher, daß die Gleichung (45) dann und nur dann eine Lösung besitzt, wenn

$$(46)\qquad \bar{L}(\alpha) \geqq L, \text{ also } \alpha \geqq \alpha'$$

ist, wobei α' wie früher durch (36) definiert ist. Sie hat dann nur eine einzige Lösung.

Wie aus der Darstellung (41) hervorgeht, nimmt die linke Seite der Gleichung (45) bei festem q mit wachsendem α monoton zu und, wie wiederholt werden darf, bei festem α mit wachsendem q monoton ab. Also nimmt $q^*(L, \alpha)$ bei festem L mit wachsendem α monoton zu. Wegen (36) und (38) wird

$$q^*(L, \alpha') = \sin \alpha'. \tag{47}$$

Wegen (38) bleibt für

$$\alpha > \alpha' \quad q^*(L, \alpha) > \sin \alpha. \tag{48}$$

Nun muß wegen (44)

$$\alpha < \alpha_0$$

bleiben, wobei α_0 definiert ist durch die Gleichung

$$-4 \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_0}{2}\right) = L.$$

Aus der Darstellung (41) folgt jetzt leicht

$$q^*(L, \alpha) \to \infty, \quad \alpha \to \alpha_0. \tag{49}$$

Diese Gleichung und (40) ergeben endlich

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \bar{J}_{II}(\alpha, q^*(L, \alpha)) = 0. \tag{50}$$

Man bezeichne nun die rechte Seite der Ungleichung (16), wie schon dort geschehen, mit $\Gamma(L, \alpha, q)$. Dann erhält man durch die Spezialisierung

$$q = q^* = q^*(L, \alpha)$$

die isoperimetrische Ungleichung

$$J \leqq \Gamma(L, \alpha, q^*(L, \alpha)). \tag{51}$$

In dieser Ungleichung wird die Gleichheit von einer und nur einer Figur erreicht, nämlich von C_{II, α, q^*}.

Es gilt also

$$\bar{J}_{II}(\alpha, q^*) = \Gamma(L, \alpha, q^*). \tag{52}$$

Die Ungleichung (16) gilt für alle Werte von $q \geqq \sin \alpha$, also gilt auch für

$$q \neq q^* \quad \bar{J}_{II}(\alpha, q^*) \leqq \Gamma(L, \alpha, q).$$

Aber hier ist nach dem oben Festgestellten das Gleichheitszeichen ausgeschlossen. Also ist für

$$q \neq q^* \quad \Gamma(L, \alpha, q^*) < \Gamma(L, \alpha, q). \tag{53}$$

Insbesondere ist also auch wegen (48) für

$$\alpha > \alpha' \quad \Gamma(L, \alpha, q^*) < \Gamma(L, \alpha, \sin \alpha).$$

Damit ist gezeigt, daß die durch die isoperimetrische Ungleichung (51) gegebene Schranke in der Tat kleiner ist als diejenige, welche die mit der Ungleichung (5) gleichbedeutende Ungleichung (17) liefert.

Nun ist

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \Gamma(L, \alpha, q^*(L, \alpha)) = \Gamma_\alpha(L, \alpha, q^*) + \Gamma_q(L, \alpha, q^*) \frac{\partial q^*}{\partial \alpha},$$

$$\frac{\partial}{\partial L} \Gamma(L, \alpha, q^*(L, \alpha)) = \Gamma_L(L, \alpha, q^*) + \Gamma_q(L, \alpha, q^*) \frac{\partial q^*}{\partial L}.$$

Da wegen (53) und (48) für $\alpha > \alpha'$

$$\Gamma_q(L, \alpha, q^*) = 0$$

ist, so folgt aus der durch die rechte Seite von (16) gegebenen Darstellung von $\Gamma(L, \alpha, q)$ für $\alpha > \alpha'$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \Gamma(L, \alpha, q^*(L, \alpha)) = -4 \cdot \frac{\sqrt{q^{*2} - \sin^2 \alpha}}{\cos \alpha}, \tag{54}$$

$$\frac{\partial}{\partial L} \Gamma(L, \alpha, q^*(L, \alpha)) = q^*. \tag{55}$$

$\Gamma(L, \alpha, q^*(L, \alpha))$ nimmt also bei festem L mit wachsendem α monoton ab.

Wegen (52), (47), (38) hat man

$$\Gamma(L, \alpha', q^*(L, \alpha')) = \overline{J}(\alpha') \tag{56}$$

und wegen (50)

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \Gamma(L, \alpha, q^*(L, \alpha)) = 0. \tag{57}$$

Endlich ist wegen (47), (54)

$$\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \Gamma(L, \alpha, q^*(L, \alpha))\right)_{\alpha = \alpha'} = 0. \tag{58}$$

Hierbei ist auf der linken Seite natürlich nur der vordere Differentialquotient gemeint, da die Funktion nur für $\alpha \geqq \alpha'$ definiert ist.

Man definiere jetzt unter Berücksichtigung von (24), (26) die Funktion $G(L, \alpha)$ durch die Gleichungen

$$\begin{cases} \text{für } \alpha \leqq \alpha' \quad G(L, \alpha) = \Gamma(L, \alpha, \sin \alpha) = L \sin \alpha - 2\pi(1 - \cos \alpha) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = 2\pi\left(\frac{\cos(\alpha - \alpha')}{\cos \alpha'} - 1\right), \\ \text{für } \alpha > \alpha' \quad G(L, \alpha) = \Gamma(L, \alpha, q^*(L, \alpha)). \end{cases} \tag{59}$$

Wie (27), (56), (58), (55), (47) zeigen, bleibt die Funktion $G(L, \alpha)$ auch an der „Nahtstelle" $\alpha = \alpha'$ mit ihren ersten Ableitungen nach L und α stetig, und zwar wird

$$G(L, \alpha') = \overline{J}(\alpha'), \quad G_L(L, \alpha') = \sin \alpha', \quad G_\alpha(L, \alpha') = 0. \tag{60}$$

Für $\alpha \leqq \alpha'$ nimmt $G(L, \alpha)$ bei festem L mit wachsendem α monoton zu; für $\alpha \geqq \alpha'$ nimmt $G(L, \alpha)$ mit wachsendem α monoton ab und konvergiert mit $\alpha_0 - \alpha$ gegen Null.

Nun gilt für alle Werte von L und $\alpha < \alpha_0$ die genaue isoperimetrische Ungleichung

(61) $$J \leqq G(L, \alpha).$$

wobei die Gleichheit immer von einer und nur einer geschlossenen einfachen Kurve erreicht wird.

Damit sind alle im Anschluß an die Aufstellung der isoperimetrischen Ungleichungen (5) und (6) gemachten Behauptungen bewiesen.

§ 3.

Die isoperimetrische Aufgabe für Rotationskörper im n-dimensionalen Raum konstanter negativer Krümmung.

Wir stellen den n-dimensionalen hyperbolischen Raum dar, indem wir dem gewöhnlichen Halbraum $x > 0$ mit den rechtwinkligen Koordinaten $x, y_1 y_2 \ldots y_{n-1}$ die Maßbestimmung aufprägen

(62) $$dS^2 = \frac{dx^2 + \sum_1^{n-1} dy_\nu^2}{x^2} = \frac{ds^2}{x^2}.$$

Bedeutet ds_p das Euklidische Flächenelement einer p-dimensionalen Fläche. so ergibt sich für das entsprechende hyperbolische Flächenelement dS_p

(63) $$dS_p = \frac{ds_p}{x^p}.$$

Für das hyperbolische Volumenelement dT erhält man also

(64) $$dT = \frac{dx\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_{n-1}}{x^n}.$$

Die Maßbestimmung bleibt bekanntlich invariant gegenüber den Euklidischen Bewegungen und Symmetrien, die x ungeändert lassen, gegenüber den Ähnlichkeitstransformationen mit dem Ähnlichkeitszentrum auf der Ebene $x = 0$ und den Spiegelungen an den n-dimensionalen Kugeln, d. h. den Kugeln mit $(n-1)$-dimensionaler Oberfläche, welche zur Ebene $x = 0$ orthogonal sind, und zu welchen natürlich auch die zu dieser Ebene orthogonalen $(n-1)$-dimensionalen Ebenen gehören.

Es bezeichne $\mathfrak{K}$ einen Rotationskörper, d. h. einen Körper, der bei allen hyperbolischen Bewegungen, welche die Punkte einer hyperbolischen Geraden, der Rotationsachse, fest lassen, in sich selber übergeht. Wir setzen noch voraus, daß die Oberfläche des Körpers mit der Rotationsachse zwei und nur zwei Punkte gemein hat.

Bringt man den Körper durch eine hyperbolische Bewegung in eine solche Lage, daß die Rotationsachse in die x-Achse fällt, so stellt er sich als ein Euklidischer Rotationskörper mit der x-Achse als Rotationsachse dar.

Es seien $x(s)$ und $\varrho(s) \geqq 0$ die laufenden Koordinaten der Meridiankurve C' als Funktionen der Euklidischen Bogenlänge. Ihre ersten Ableitungen seien bis auf höchstens endlich viele Punkte bestimmt und stetig. Gemäß der oben gemachten Voraussetzung schneidet C' die x-Achse in zwei und nur zwei verschiedenen Punkten.

Die Oberfläche von $\mathfrak{R}$ wird dann gegeben durch die Gleichungen

$$x = x(s), \quad \sum_1^{n-1} {}_\nu \, y_\nu^2 = \varrho^2(s). \tag{65}$$

Die $\mathfrak{R}$ erfüllenden Punkte sind also durch die Gleichungen gegeben

$$x = x_i, \quad \sum_1^{n-1} {}_\nu \, y_\nu^2 = \varrho_i^2, \tag{66}$$

wobei der Punkt (x_i, ϱ_i) in der (x, ϱ)-Ebene alle Punkte des von der Kurve C' und der x-Achse umschlossenen Gebietes T' durchläuft.

Es bezeichne E_m das Volumen der Euklidischen Einheitskugel im m-dimensionalen Raum und mithin mE_m den Flächeninhalt ihrer Oberfläche.

Dem Element $d\varrho\, dx$ in der Meridianebene entspricht bei der Rotation das Volumenelement[2])

$$(n-1)\, E_{n-1}\, \varrho^{n-2}\, d\varrho\, dx.$$

Man erhält also für das Euklidische Volumen des Rotationskörpers

$$\int_{T'} (n-1)\, E_{n-1}\, \varrho^{n-2}\, d\varrho\, dx.$$

Dem Element ds der Meridiankurve entspricht bei der Rotation das Oberflächenelement

$$(n-1)\, E_{n-1}\, \varrho(s)^{n-2}\, ds.$$

Man erhält also für den Euklidischen Flächeninhalt $|O|$ der Oberfläche O des Rotationskörpers

$$|O| = \int_{C'} (n-1)\, E_{n-1}\, \varrho(s)^{n-2}\, ds.$$

Dementsprechend ergibt sich für das hyperbolische Volumen von $\mathfrak{R}$, das mit J bezeichnet werden möge,

$$J = (n-1)\, E_{n-1} \int_{T'} \frac{\varrho^{n-2}}{x^n}\, d\varrho\, dx. \tag{67}$$

Ebenso erhält man für den hyperbolischen Oberflächeninhalt von $\mathfrak{R}$, der mit L bezeichnet werden möge,

$$L = (n-1)\, E_{n-1} \int_{C'} \frac{\varrho(s)^{n-2}}{x(s)^{n-1}}\, ds. \tag{68}$$

---

[2]) Eine ausführlichere Begründung dieser und der nachfolgenden Formeln findet sich in der unter [1]) zitierten Arbeit, S. 706—708.

Jetzt führe man Polarkoordinaten ein.

(69) $x = r\cos\varphi, \quad \varrho = r\sin\varphi, \quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2, \quad d\varrho\, dx = r\, dr\, d\varphi,$

wobei wegen $\varrho \geqq 0$, $0 \leqq \varphi < \frac{\pi}{2}$ bleibt.

Man erhält

(70) $$L = (n-1) E_{n-1} \int_{C'} \frac{1}{\cos\varphi} \operatorname{tg}^{n-2}\varphi \frac{1}{r}\, ds.$$

(71) $$J = (n-1) E_{n-1} \int_{T'} \frac{1}{\cos^2\varphi} \operatorname{tg}^{n-2}\varphi \frac{1}{r}\, dr\, d\varphi$$
$$= E_{n-1} \int_{C'} \operatorname{tg}^{n-1}\varphi \cos(N\varphi) \frac{1}{r}\, ds,$$

wobei wie in den vorangehenden Paragraphen N die äußere Normale bedeutet und $(N\varphi)$ den Winkel, den diese mit der senkrecht zum Radius Vektor nach dem wachsenden φ weisenden Richtung bildet.

Man bezeichne mit C'' das Spiegelbild von C' an der x-Achse. C'' verläuft also im Quadranten $x > 0$, $\varrho \leqq 0$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi \leqq 0$. Mit C bezeichne man endlich die geschlossene einfache Kurve, die aus C' und C'' zusammengesetzt ist. Dann ist

$$\int_{C'} \frac{1}{\cos\varphi} \operatorname{tg}^{n-2}\varphi \frac{1}{r}\, ds = \int_{C''} \frac{1}{\cos\varphi} |\operatorname{tg}\varphi|^{n-2} \frac{1}{r}\, ds.$$

Da ferner $\cos(N\varphi)$ in symmetrischen Punkten auf C' und C'' das Vorzeichen wechselt, und dasselbe für $\operatorname{tg}\varphi$ gilt, so ist

$$\int_{C'} \operatorname{tg}^{n-1}\varphi \cos(N\varphi) \frac{1}{r}\, ds = \int_{C''} |\operatorname{tg}\varphi|^{n-2} \operatorname{tg}\varphi \cos(N\varphi) \frac{1}{r}\, ds.$$

Also ist

(72) $$L = \frac{n-1}{2} E_{n-1} \int_{C} \frac{1}{\cos\varphi} |\operatorname{tg}\varphi|^{n-2} \frac{1}{r}\, ds.$$

(73) $$J = \tfrac{1}{2} E_{n-1} \int_{C} \frac{|\operatorname{tg}\varphi|^{n-2}}{\cos\varphi} \sin\varphi \cos(N\varphi) \frac{1}{r}\, ds.$$

Man bezeichne mit $K_\alpha^{(n)}$ die n-dimensionale Kugel mit dem Breitenwinkel 2α, d. h. diejenige Kugel, welche durch Rotation eines Kreises mit dem Breitenwinkel 2α um einen seiner verlängerten Durchmesser erzeugt wird. Bringt man durch eine hyperbolische Bewegung die Rotationsachse in die x-Achse, so spielt also der Kreis mit dem Breitenwinkel 2α für die Kugel $K_\alpha^{(n)}$ dieselbe Rolle wie die oben erklärte geschlossene Kurve C für den allgemeinen Rotationskörper $\mathfrak{R}$.

Gemäß (4) erhält man für den Radius R der Kugel $K_\alpha^{(n)}$

$$R = -\log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right). \tag{74}$$

Wie bekannt und am Schluß dieses Paragraphen noch nachgewiesen werden wird, werden der Oberflächeninhalt $\bar{L}_{\{R\}}^{(n)}$ und das Volumen $\bar{J}_{\{R\}}^{(n)}$ der n-dimensionalen Kugel mit dem Radius R gegeben durch die Formeln

$$\bar{L}_{\{R\}}^{(n)} = n E_n \left(\frac{e^R - e^{-R}}{2}\right)^{n-1}, \quad \bar{J}_{\{R\}}^{(n)} = n E_n \int_0^R \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^{n-1} dt. \tag{75}$$

Bezeichnet also $\bar{L}^{(n)}(\alpha)$ den Oberflächeninhalt der Kugel $K_\alpha^{(n)}$ und $\bar{J}^{(n)}(\alpha)$ ihr Volumen, so folgt durch Einführung von (74) in (75)

$$\bar{L}^{(n)}(\alpha) = \bar{L}_{\{R\}}^{(n)} = n E_n \operatorname{tg}^{n-1}\alpha, \quad \bar{J}^{(n)}(\alpha) = \bar{J}_{\{R\}}^{(n)} = n E_n \int_0^\alpha \frac{\operatorname{tg}^{n-1}\beta}{\cos\beta}\, d\beta \tag{76}$$

und man hat

$$\frac{d\,\bar{J}^{(n)}(\alpha)}{d\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}\,\bar{L}^{(n)}(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{n-1}\,\frac{d\,\bar{L}^{(n)}(\alpha)}{d\alpha}. \tag{77}$$

Das Hauptergebnis dieses Paragraphen besteht nun in den folgenden Sätzen:

Es bezeichne wie oben L den Oberflächeninhalt und J das Volumen des Rotationskörpers $\mathfrak{R}$. Es sei 2α der Breitenwinkel der oben erklärten geschlossenen einfachen Kurve C, d. h. also des durch Spiegelung an der Rotationsachse verdoppelten Meridianschnittes.

Dann gilt

$$J \leqq \frac{\sin\alpha}{n-1} L - \left(\frac{\sin\alpha}{n-1}\,\bar{L}^{(n)}(\alpha) - \bar{J}^{(n)}(\alpha)\right) = H(L, \alpha). \tag{78}$$

Wegen (77) ist

$$\frac{\partial H(L,\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\cos\alpha}{n-1}\left(L - \bar{L}^{(n)}(\alpha)\right). \tag{79}$$

Bezeichnet nun $2\alpha'$ den Breitenwinkel der Kugel gleichen Oberflächeninhalts wie $\mathfrak{R}$, d. h. ist also

$$\bar{L}^{(n)}(\alpha') = L, \tag{80}$$

so zeigt (79), daß $H(L, \alpha)$ bei festem L mit wachsendem α für $\alpha \leqq \alpha'$ monoton wächst und für $\alpha \geqq \alpha'$ monoton abnimmt.

Also folgt aus (78) *a fortiori*

$$J \leqq H(L, \alpha') = \bar{J}^{(n)}(\alpha'). \tag{81}$$

Das ist der gewöhnliche Isoperimetriesatz.

Für

$$\alpha \leqq \alpha'$$

gibt es einen und nur einen Rotationskörper, der in der Ungleichung (78) *die Gleichheit erreicht.* Er wird erzeugt, indem man diejenige Figur der Schar I, § 2, die ja alle symmetrisch zur x-Achse liegen, um diese rotieren läßt, welche dabei eine Oberfläche vom Flächeninhalt L beschreibt. *Damit ist zugleich bewiesen, daß die Kugel die einzige Rotationsfläche ist, welche in der Ungleichung* (81), *also der gewöhnlichen isoperimetrischen Ungleichung, die Gleichheit erreicht.*

Für

$$\alpha > \alpha'$$

kann die durch (78) *gegebene Schranke durch eine kleinere ersetzt werden. Diese ist gleich dem Volumen des Rotationskörpers, der erzeugt wird, indem man diejenige Figur der Schar* II, § 2, *die ja alle symmetrisch zur x-Achse liegen, um diese rotieren läßt, welche dabei eine Oberfläche vom Flächeninhalt L beschreibt. Dieser Körper ist dann auch der einzige Rotationskörper, der gegenüber der so verschärften Schranke die Gleichheit erreicht.*

Beweis. Man führe wie im § 1 einen Parameter q ein, der lediglich der Beschränkung

$$q \geqq \sin \alpha$$

unterworfen ist. Dann ist wegen (9)

$$\frac{|\operatorname{tg}\varphi|^{n-2}}{r\cos\varphi}\sin\varphi\cos(N\varphi) \leqq q\,\frac{|\operatorname{tg}\varphi|^{n-2}}{r\cos\varphi} - \frac{|\operatorname{tg}\varphi|^{n-2}}{r\cos\varphi}\sqrt{q^2-\sin^2\varphi}\,|\cos(Nr)|,$$

wobei das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn (10) erfüllt ist.

Bei Einführung dieser Gleichung in (73) ergibt sich bei Berücksichtigung von (72)

$$J \leqq \frac{q}{n-1}L - \frac{E_{n-1}}{2}\int_C \frac{|\operatorname{tg}\varphi|^{n-2}}{\cos\varphi}\sqrt{q^2-\sin^2\varphi}\,|\cos(Nr)|\,\frac{1}{r}\,ds.$$

Wegen (7) ist also

$$J \leqq \frac{q}{n-1}L - \frac{E_{n-1}}{2}\int_C \frac{|\operatorname{tg}\varphi|^{n-2}}{\cos\varphi}\sqrt{q^2-\sin^2\varphi}\left|\frac{d\varphi}{ds}\right| ds.$$

Das Gleichheitszeichen gilt hierbei dann und nur dann, wenn (10) erfüllt ist. Aus der letzten Ungleichung folgt genau so wie im § 1

$$(82)\qquad J \leqq \frac{q}{n-1}L - 2E_{n-1}\int_0^{\alpha}\frac{\operatorname{tg}^{n-2}\varphi}{\cos\varphi}\sqrt{q^2-\sin^2\varphi}\,d\varphi = \Gamma^{(n)}(L,\alpha,q).$$

Dabei gilt das Gleichheitszeichen (82) dann und nur dann, wenn (10) und (15) erfüllt sind.

Für $q = \sin\alpha$ erhält man

$$(83)\quad J \leqq \frac{\sin\alpha}{n-1} L - 2E_{n-1} \int_0^{\alpha} \frac{\operatorname{tg}^{n-2}\varphi}{\cos\varphi} \sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\varphi}\, d\varphi = \Gamma^{(n)}(L, \alpha, \sin\alpha).$$

Nun sind, wie im § 1 beim Beweise von (21) gezeigt, bei $q = \sin\alpha$ (10) und (15) für den Kreis mit dem Breitenwinkel 2α erfüllt. Also gilt für diesen das Gleichheitszeichen, d. h. es ist

$$(84)\quad \overline{J}^{(n)}(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{n-1} \overline{L}^{(n)}(\alpha) - 2E_{n-1} \int_0^{\alpha} \frac{\operatorname{tg}^{n-2}\varphi}{\cos\varphi} \sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\varphi}\, d\varphi.$$

Durch Einführung von (84) in (83) ergibt sich die zu beweisende Ungleichung (78) und man erhält

$$(85)\quad H(L, \alpha) = \Gamma^{(n)}(L, \alpha, \sin\alpha).$$

Wie in § 2 gezeigt, sind die Kurven der Scharen I und II die einzigen, für welche (10) und (15) erfüllt sind. *Daher gilt in der aus* (82) *für* $q = \sin\alpha$ *hervorgehenden Ungleichung* (78) *das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn C der Schar* I *angehört. Ebenso gilt in* (82) *für* $q = \sin\alpha$ *das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn C der Schar* II *angehört.*

I. Man betrachte jetzt eine zu $q = \sin\alpha$ gehörende Figur der Schar I. Es bedeute D wie in (34) die hyperbolische Länge der auf den beiden Euklidischen Geraden $\varphi = \pm\alpha$ liegenden Begrenzungsstrecken der Figur und $\overline{L}_{\mathrm{I}}^{(n)}(\alpha, D)$ den Oberflächeninhalt des von der Figur erzeugten Rotationskörpers. Dann erhält man wegen (72)

$$(86)\quad \overline{L}_{\mathrm{I}}^{(n)}(\alpha, D) = \overline{L}^{(n)}(\alpha) + (n-1) E_{n-1} \operatorname{tg}^{n-2}\alpha D.$$

Es gibt also zu vorgegebenem L und α dann und nur dann eine Figur der Schar I als Meridianschnitt, wenn

$$(87)\quad \overline{L}^{(n)}(\alpha) \leqq L$$

ist. Dabei wird D durch die Gleichung

$$(88)\quad \overline{L}^{(n)}(\alpha) + (n-1) E_{n-1} \operatorname{tg}^{n-2}\alpha D = L$$

bestimmt.

Es sei $2\alpha'$ der durch (80) definierte Breitenwinkel der Kugel gleichen Oberflächeninhalts. Dann gilt nach dem oben Festgestellten:

Für

$$\alpha \leqq \alpha' \text{ oder gleichbedeutend } \overline{L}^{(n)}(\alpha) \leqq L$$

gibt es zu vorgegebenem L und α einen und nur einen Rotationskörper, der in der isoperimetrischen Ungleichung (78) *die Gleichheit erreicht. Er wird durch Rotation einer Figur der Schar* I *um die x-Achse erzeugt, wobei D durch* (88) *bestimmt ist. Für $\alpha = \alpha'$ verschwindet D und der Rotationskörper ist die Kugel.*

Damit ist also auch bewiesen, daß die Kugel der einzige Rotationskörper ist, welcher in der aus (78) *a fortiori folgenden gewöhnlichen isoperimetrischen Ungleichung* (81) *die Gleichheit erreicht.*

II. Man betrachte nunmehr eine Figur der Schar II, die wie in § 2 mit $C_{\mathrm{II},\alpha,q}$ bezeichnet werden möge. Es bezeichne $\overline{J}^{(n)}_{\mathrm{II}}(\alpha, q)$ das hyperbolische Volumen des durch Rotation von $C_{\mathrm{II},\alpha,q}$ um die x-Achse erzeugten Rotationskörpers und $\overline{L}^{(n)}(\alpha, q)$ seinen hyperbolischen Oberflächeninhalt. Da die Figur, wie in § 2 festgestellt, für $q = \sin\alpha$ in den Kreis mit dem Breitenwinkel 2α übergeht, so ist

$$\overline{J}^{(n)}_{\mathrm{II}}(\alpha, \sin\alpha) = \overline{J}^{(n)}(\alpha), \qquad \overline{L}^{(n)}_{\mathrm{II}}(\alpha, \sin\alpha) = \overline{L}^{(n)}(\alpha). \tag{89}$$

Ferner ergibt (73) bei Berücksichtigung von (10)

$$J^{(n)}_{\mathrm{II}}(\alpha, q) = \frac{E_{n-1}}{2} \int\limits_{C_{\mathrm{II},\alpha,q}} \frac{|\mathrm{tg}\,\varphi|^{n-2}}{\cos\varphi} \sin\varphi \cos(N\varphi) \frac{1}{r}\, ds$$

$$= \frac{E_{n-1}}{2} \int\limits_{C_{\mathrm{II},\alpha,q}} \frac{|\mathrm{tg}\,\varphi|^{n-2}}{\cos\varphi} \frac{\sin^2\varphi}{q} \frac{1}{r}\, ds.$$

Bei Einführung von (39) werden die Integrale längs den beiden Kreisbögen, aus welchen $C_{\mathrm{II},\alpha,q}$ zusammengesetzt ist, einander gleich und man erhält

$$\overline{J}^{(n)}_{\mathrm{II}}(\alpha, q) = \frac{E_{n-1}}{2} 2 \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \frac{|\mathrm{tg}\,\varphi|^{n-2}}{\cos\varphi} \frac{\sin^2\varphi}{q} \frac{q}{\sqrt{q^2 - \sin^2\varphi}}\, d\varphi \tag{90}$$

$$= 2 E_{n-1} \int\limits_{0}^{\alpha} \frac{\mathrm{tg}^{n-1}\varphi \sin\varphi}{\sqrt{q^2 - \sin^2\varphi}}\, d\varphi.$$

Ebenso ergibt sich aus (72)

$$\overline{L}^{(n)}_{\mathrm{II}}(\alpha, q) = \frac{n-1}{2} E_{n-1} \int\limits_{C_{\mathrm{II},\alpha,q}} \frac{|\mathrm{tg}\,\varphi|^{n-2}}{\cos\varphi} \frac{1}{r}\, ds \tag{91}$$

$$= 2(n-1) E_{n-1} \int\limits_{0}^{\alpha} \frac{\mathrm{tg}^{n-2}\varphi}{\cos\varphi \sqrt{1 - \frac{\sin^2\varphi}{q^2}}}\, d\varphi.$$

Die Darstellungen (90) und (91) zeigen, daß $\bar{J}_{II}^{(n)}(\alpha, q)$ und $\bar{L}_{II}^{(n)}(\alpha, q)$ bei festem α und wachsendem q monoton abnehmen, und zwar wird bei Berücksichtigung von (76)

$$\text{(92)} \qquad \lim_{q \to \infty} \bar{J}_{II}^{(n)}(\alpha, q) = 0,$$

$$\text{(93)} \qquad \lim_{q \to \infty} \bar{L}_{II}^{(n)}(\alpha, q) = 2(n-1) E_{n-1} \int_0^{\alpha} \frac{\operatorname{tg}^{n-2} \varphi}{\cos \varphi} d\varphi = 2 J^{(n-1)}(\alpha).$$

Wir wollen jetzt zunächst beweisen, daß für jeden Rotationskörper die Ungleichung

$$\text{(94)} \qquad L > 2 J^{(n-1)}(\alpha)$$

bestehen muß. In der Tat ergibt (72) wegen

$$\text{(95)} \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \sqrt{\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2} \geqq \left| \frac{d\varphi}{ds} \right|,$$

$$\text{(96)} \qquad L \geqq \frac{n-1}{2} E_{n-1} \int_C \frac{|\operatorname{tg} \varphi|^{n-2}}{\cos \varphi} \left| \frac{d\varphi}{ds} \right| ds$$

$$\geqq \frac{n-1}{2} E_{n-1} \left[\int_0^{s_1} \frac{|\operatorname{tg} \varphi|^{n-2}}{\cos \varphi} \left| \frac{d\varphi}{ds} \right| ds + \int_{s_2}^{s_3} \frac{|\operatorname{tg} \varphi|^{n-2}}{\cos \varphi} \left| \frac{d\varphi}{ds} \right| ds \right],$$

wobei $s_1\, s_2\, s_3$ dieselbe Bedeutung haben wie in (15). Nun ist

$$\int_0^{s_1} \frac{|\operatorname{tg} \varphi|^{n-2}}{\cos \varphi} \left| \frac{d\varphi}{ds} \right| ds \geqq \int_{s_1}^{0} \frac{|\operatorname{tg} \varphi|^{n-2}}{\cos \varphi} \frac{d\varphi}{ds} ds = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{|\operatorname{tg} \varphi|^{n-2}}{\cos \varphi} d\varphi = 2 \int_0^{\alpha} \frac{\operatorname{tg}^{n-2} \varphi}{\cos \varphi} d\varphi,$$

$$\int_{s_2}^{s_3} \frac{|\operatorname{tg} \varphi|^{n-2}}{\cos \varphi} \left| \frac{d\varphi}{ds} \right| ds \geqq \int_{s_2}^{s_3} \frac{|\operatorname{tg} \varphi|^{n-2}}{\cos \varphi} \frac{d\varphi}{ds} ds = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{|\operatorname{tg} \varphi|^{n-2}}{\cos \varphi} d\varphi = 2 \int_0^{\alpha} \frac{\operatorname{tg}^{n-2} \varphi}{\cos \varphi} d\varphi.$$

Die Einführung der letzten beiden Gleichungen in (96) ergibt bei Berücksichtigung von (76)

$$L \geqq 2 \bar{J}^{(n-1)}(\alpha).$$

Das Gleichheitszeichen in dieser letzten Ungleichung fordert wegen (95), daß r konstant bleibt. Da das bei einer geschlossenen einfachen, innerhalb der Halbebene $x > 0$ verlaufenden Kurve nicht der Fall sein kann, so ist (94) bewiesen.

Damit also zu vorgegebenem L und α überhaupt Rotationskörper möglich sind, muß die Ungleichung (94) erfüllt sein, oder, was damit gleichbedeutend ist, es muß

$$\alpha < \alpha_0$$

sein, wobei α_0 definiert ist durch die Gleichung

$$2\,\overline{J}^{(n-1)}(\alpha_0) = L. \tag{97}$$

Nun gibt es zu vorgegebenem L und α dann und nur dann einen durch Rotation einer Figur der Schar II erzeugten Rotationskörper, wenn die Gleichung

$$\overline{L}_{\mathrm{II}}^{(n)}(\alpha, q) = L \tag{98}$$

eine Lösung

$$q = q_n^* = q_n^*(L, \alpha) \tag{99}$$

besitzt. Die linke Seite dieser Gleichung nimmt, wie eben festgestellt, wenn q von $\sin\alpha$ bis ∞ wächst, gemäß (89), (93) von $\overline{L}^{(n)}(\alpha)$ bis $2\,\overline{J}^{(n-1)}(\alpha)$ monoton ab. Bei Berücksichtigung von (94) folgt also, daß die Gleichung (98) dann und nur dann eine Lösung besitzt, wenn

$$\overline{L}^{(n)}(\alpha) \geqq L, \quad \text{also} \quad \alpha \geqq \alpha'$$

ist, wobei α' wie oben durch (80) definiert ist. Sie hat dann nur eine einzige Lösung.

Wie aus der Darstellung (91) hervorgeht, nimmt die linke Seite der Gleichung (98) bei festem q mit wachsendem α monoton zu und, wie wiederholt werden darf, bei festem α mit wachsendem q monoton ab. Also nimmt $q_n^*(L, \alpha)$ bei festem L mit wachsendem α monoton zu. Wegen (89), (80) wird

$$q_n^*(L, \alpha') = \sin\alpha'. \tag{100}$$

Wegen (89) bleibt für $\alpha > \alpha'$

$$q_n^*(L, \alpha) > \sin\alpha \tag{101}$$

und es folgt aus (91) leicht

$$q_n^*(L, \alpha) \underset{\alpha \to \alpha_0}{\to} \infty. \tag{102}$$

Diese Gleichung und (90) ergeben endlich

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \overline{J}_{\mathrm{II}}^{(n)}\left(\alpha, q_n^*(L, \alpha)\right) = 0. \tag{103}$$

Man bezeichne nun die rechte Seite der Ungleichung (82), wie schon dort geschehen, mit $\Gamma^{(n)}(L, \alpha, q)$. Dann erhält man durch die Spezialisierung

$$q = q_n^* = q_n^*(L, \alpha)$$

die isoperimetrische Ungleichung

$$J \leqq \Gamma^{(n)}\left(L, \alpha, q_n^*(L, \alpha)\right). \tag{104}$$

In dieser Ungleichung wird, wie eben festgestellt, die Gleichheit von einem und nur einem Rotationskörper erreicht, nämlich demjenigen, der durch Rotation von $C_{\mathrm{II}, \alpha, q_n^*}$ um die x-Achse erzeugt wird.

Es gilt also

$$\overline{J}_{\mathrm{II}}^{(n)}(\alpha, q_n^*) = \Gamma^{(n)}(L, \alpha, q_n^*). \tag{105}$$

Die Ungleichung (82) gilt für alle Werte von $q \geqq \sin\alpha$, also ist auch für

$$q \neq q_n^* \qquad \overline{J}_{\mathrm{II}}^{(n)}(\alpha, q_n^*) \leqq \Gamma^{(n)}(L, \alpha, q).$$

Aber hier ist nach dem oben Festgestellten das Gleichheitszeichen ausgeschlossen. Also ist für

$$q \neq q_n^* \qquad \Gamma^{(n)}(L, \alpha, q_n^*) < \Gamma^{(n)}(L, \alpha, q). \tag{106}$$

Insbesondere ist also auch wegen (101) für

$$\alpha > \alpha' \quad \Gamma^{(n)}(L, \alpha, q_n^*) < \Gamma^{(n)}(L, \alpha, \sin\alpha). \tag{107}$$

Damit ist bei Berücksichtigung von (85) gezeigt, daß die durch die isoperimetrische Ungleichung (104) gegebene Schranke in der Tat kleiner ist als diejenige, welche die Ungleichung (78) angibt.

Nun ist

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\Gamma^{(n)}(L, \alpha, q_n^*(L, \alpha)) = \Gamma_\alpha^{(n)}(L, \alpha, q_n^*) + \Gamma_q^{(n)}(L, \alpha, q_n^*)\frac{\partial q_n^*}{\partial\alpha},$$

$$\frac{\partial}{\partial L}\Gamma^{(n)}(L, \alpha, q_n^*(L, \alpha)) = \Gamma_L^{(n)}(L, \alpha, q_n^*) + \Gamma_q^{(n)}(L, \alpha, q_n^*)\frac{\partial q_n^*}{\partial L}.$$

Wegen (106) ist aber bei Berücksichtigung von (101) für

$$\alpha > \alpha' \quad \Gamma_q^{(n)}(L, \alpha, q_n^*) = 0.$$

Daher ergibt sich aus den drei letzten Gleichungen und (82) für $\alpha > \alpha'$:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\Gamma^{(n)}(L, \alpha, q_n^*(L, \alpha)) = -2E_{n-1}\frac{\mathrm{tg}^{n-2}\alpha}{\cos\alpha}\sqrt{q_n^{*2} - \sin^2\alpha}, \tag{108}$$

$$\frac{\partial}{\partial L}\Gamma^{(n)}(L, \alpha, q_n^*(L, \alpha)) = \frac{q_n^*}{n-1}. \tag{109}$$

$\Gamma^{(n)}(L, \alpha, q_n^*(L, \alpha))$ nimmt also bei festem L mit wachsendem α monoton ab. Wegen (105), (100), (89) hat man

$$\Gamma^{(n)}(L, \alpha', q_n^*(L, \alpha')) = \overline{J}^{(n)}(\alpha') \tag{110}$$

und wegen (103)

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \Gamma^{(n)}(L, \alpha, q_n^*(L, \alpha)) = 0. \tag{111}$$

Endlich ist wegen (100), (108)

$$\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\Gamma^{(n)}(L, \alpha, q_n^*(L, \alpha))\right)_{\alpha=\alpha'} = 0. \tag{112}$$

Hierbei ist auf der linken Seite natürlich nur der vordere Differentialquotient gemeint, da die Funktion nur für $\alpha \geqq \alpha'$ definiert ist.

Man definiere nun unter Berücksichtigung von (78), (85), (82) die Funktion $G^{(n)}(L, \alpha)$ durch die Gleichungen

$$(113)\quad \begin{cases} \text{für } \alpha \leqq \alpha' \quad G^{(n)}(L,\alpha) = \Gamma^{(n)}(L, \alpha, \sin\alpha) \\ \qquad = \frac{\sin\alpha}{n-1} L - \left(\frac{\sin\alpha}{n-1}\bar{L}^{(n)}(\alpha) - \bar{J}^{(n)}(\alpha)\right) \\ \qquad = \frac{\sin\alpha}{n-1} L - nE_n\left(\frac{\sin\alpha}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1}\alpha - \int_0^\alpha \frac{\operatorname{tg}^{n-1}\beta}{\cos\beta}d\beta\right), \\ \text{für } \alpha > \alpha' \quad G^{(n)}(L,\alpha) = \Gamma^{(n)}(L, \alpha, q_n^*(L,\alpha)). \end{cases}$$

Wie (110), (81), (112), (79), (109), (100) zeigen, bleibt die Funktion $G^{(n)}(L, \alpha)$ auch an der „Nahtstelle" $\alpha = \alpha'$ mit ihren ersten Ableitungen nach L und α stetig, und zwar wird

$$(114)\qquad G^n(L,\alpha') = \bar{J}^{(n)}(\alpha'),\quad G_L^{(n)}(\alpha') = \frac{\sin\alpha'}{n-1},\quad G_\alpha^{(n)}(\alpha') = 0.$$

Für $\alpha \leqq \alpha'$ nimmt $G^{(n)}(L, \alpha)$ gemäß (79) mit wachsendem α monoton zu, für $\alpha \geqq \alpha$ monoton ab und konvergiert mit $\alpha_0 - \alpha$ gegen Null.

Nun gilt für alle Werte von L und $\alpha < \alpha_0$ die genaue isoperimetrische Ungleichung

$$(115)\qquad J \leqq G^{(n)}(L,\alpha),$$

wobei die Gleichheit immer von einer und nur einer geschlossenen einfachen Kurve erreicht wird.

Damit sind alle im Anschluß an die isoperimetrischen Ungleichungen (78) und (81) gemachten Behauptungen bewiesen.

An dieser Stelle darf noch auf die bemerkenswerte Analogie zu den entsprechenden Ungleichungen für Rotationskörper im Euklidischen Raum von n Dimensionen hingewiesen werden. Bedeutet nämlich ϱ den Radius der größten $(n-1)$-dimensionalen Breitenkugel eines n-dimensionalen Euklidischen Rotationskörpers, $|O|$ seinen Oberflächeninhalt und V sein Volumen, so entspricht der isoperimetrischen Ungleichung (78) die Euklidische isoperimetrische Ungleichung

$$(116)\quad V \leqq \frac{\varrho}{n-1}|O| - \left(\frac{\varrho}{n-1} n E_n \varrho^{n-1} - E_n \varrho^n\right) = \frac{1}{n-1}(\varrho|O| - E_n\varrho^n).$$

Zum Schluß sollen hier noch die Formeln für den Oberflächeninhalt und das Volumen der n-dimensionalen Kugel im hyperbolischen Raum hergeleitet werden.

Man kann bekanntlich den n-dimensionalen hyperbolischen Raum auch darstellen, indem man im Euklidischen Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $\xi_0\ \xi_1 \ldots \xi_{n-1}$ dem Innern der Einheitskugel

$$\sum_0^{n-1} {}_\nu \xi_\nu^2 < 1$$

die Maßbestimmung aufprägt

$$dS^2 = \left(\frac{2}{1-\sum_0^{n-1}\xi_\nu^2}\right)^2 \sum_0^{n-1} d\xi_\nu^2 = \left(\frac{2}{1-\sum_0^{n-1}\xi_\nu^2}\right)^2 ds^2.$$

Bedeutet ds_p das Euklidische Flächenelement einer p-dimensionalen Fläche im Innern der Einheitskugel, so ergibt sich für das entsprechende hyperbolische Flächenelement

$$dS_p = \left(\frac{2}{1-\sum_0^{n-1}\xi_\nu^2}\right)^p ds_p.$$

Für das hyperbolische Volumenelement dT erhält man also

$$dT = \left(\frac{2}{1-\sum_0^{n-1}\xi_\nu^2}\right)^n d\xi_0\, d\xi_1 \ldots d\xi_{n-1}.$$

Die Maßbestimmung bleibt invariant gegenüber den Euklidischen Bewegungen und Symmetrien, welche den Koordinatenanfangspunkt fest lassen, und gegenüber den Spiegelungen an den n-dimensionalen zur Einheitskugel orthogonalen Kugeln, zu welchen natürlich auch die $(n-1)$-dimensionalen Ebenen durch den Koordinatenanfangspunkt gehören.

Die gegebene Kugel mit dem Radius R bringt man durch eine hyperbolische Bewegung in eine solche Lage, daß ihr Mittelpunkt in den Koordinatenanfangspunkt fällt. Da sie nunmehr bei allen Euklidischen Bewegungen, welche den Koordinatenanfangspunkt fest lassen und daher auch hyperbolische Bewegungen sind, in sich selber übergehen muß, so ist sie auch eine Euklidische Kugel. Ihr Euklidischer Radius sei a. Dann hat man also

$$\int_0^a \frac{2\,dt}{1-t^2} = R, \quad \log\frac{1+a}{1-a} = R, \quad a = \frac{e^{\frac{R}{2}} - e^{-\frac{R}{2}}}{e^{\frac{R}{2}} + e^{-\frac{R}{2}}}, \quad \frac{2a}{1-a^2} = \frac{e^R - e^{-R}}{2}.$$

Für den Euklidischen Oberflächeninhalt $|O|$ der Kugel und den hyperbolischen Oberflächeninhalt $\overline{L}^{(n)}_{\{R\}}$ erhält man

$$|O| = nE_n a^{n-1}, \quad \overline{L}^{(n)}_{\{R\}} = nE_n a^{n-1}\left(\frac{2}{1-a^2}\right)^{n-1} = nE_n\left(\frac{e^R - e^{-R}}{2}\right)^{n-1}.$$

Für das hyperbolische Volumen $\overline{J}^{(n)}_{\{R\}}$ ergibt sich

$$\overline{J}^{(n)}_{\{R\}} = \int_0^a nE_n r^{n-1}\left(\frac{2}{1-r^2}\right)^n dr = nE_n \int_0^a \left(\frac{2r}{1-r^2}\right)^{n-1} \frac{2\,dr}{1-r^2}$$

und man erhält durch die Substitution

$$r = \frac{e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}}, \quad t = \log\frac{1+r}{1-r}, \quad \frac{dt}{dr} = \frac{2}{1-r^2}:$$

$$\bar{J}^{(n)}_{\{R\}} = n E_n \int_0^R \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^{n-1} dt.$$

Damit sind die Formeln (75) bewiesen.

Endlich seien noch die Transformationsgleichungen angegeben, welche zwischen den am Eingang dieses Paragraphen eingeführten Koordinaten $x, y_1 y_2 \ldots y_{n-1}$ und den Koordinaten $\xi_0 \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_{n-1}$ bestehen. Sie lauten

$$1 + \xi_0 = \frac{2(1+x)}{(1+x)^2 + \sum_1^{n-1} y_\nu^2}, \quad \xi_\mu = \frac{2 y_\mu}{(1+x)^2 + \sum_1^{n-1} y_\nu^2}, \quad \mu = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$1 + x = \frac{2(1+\xi_0)}{(1+\xi_0)^2 + \sum_1^{n-1} \xi_\nu^2}, \quad y_\mu = \frac{2\xi_\mu}{(1+\xi_0)^2 + \sum_1^{n-1} \xi_\nu^2}, \quad \mu = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$d\xi_0^2 + \sum_1^{n-1} d\xi_\nu^2 = \left\{\frac{2}{(1+x)^2 + \sum_1^{n-1} y_\nu^2}\right\}^2 (dx^2 + \sum_1^{n-1} dy_\nu^2),$$

$$dx^2 + \sum_1^{n-1} dy_\nu^2 = \left\{\frac{2}{(1+\xi_0)^2 + \sum_1^{n-1} \xi_\nu^2}\right\}^2 (d\xi_0^2 + \sum_1^{n-1} d\xi_\nu^2),$$

$$x = \frac{2(1+\xi_0) - (1+\xi_0)^2 - \sum_1^{n-1} \xi_\nu^2}{(1+\xi_0)^2 + \sum_1^{n-1} \xi_\nu^2},$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{\left((1+\xi_0)^2 + \sum_1^{n-1} \xi_\nu^2\right)^2}{(1 - \sum_1^{n-1} \xi_\nu^2)^2},$$

$$dS^2 = \frac{1}{x^2}(dx^2 + \sum_1^{n-1} dy_\nu^2) = \left\{\frac{2}{1 - \sum_1^{n-1} \xi_\nu^2}\right\}^2 \sum_0^{n-1} d\xi_\nu^2.$$

(Eingegangen am 11. März 1940.)

Über die definiten selbstadjungierten Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen. II.

Von

E. Kamke in Tübingen.

Einleitung.

In dieser und einer anschließenden Arbeit wird die Eigenwertaufgabe untersucht, die aus der Differentialgleichung

$$F(y) = \lambda G(y) \tag{1}$$

und den Randbedingungen

$$U_\mu(y) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, 2m) \tag{2}$$

besteht. Dabei ist

$$F(y) = \sum_{\nu=0}^{m} (f_\nu y^{(\nu)})^{(\nu)}, \quad G(y) = \sum_{\nu=0}^{n} (g_\nu y^{(\nu)})^{(\nu)}, \tag{3}$$

die $f_\nu = f_\nu(x)$ und $g_\nu = g_\nu(x)$ sind im Intervall $a \leqq x \leqq b$ gegebene reelle, ν-mal stetig differenzierbare Funktionen, und es ist dort $f_m \neq 0$, $g_n \not\equiv 0$, ferner ist $0 \leqq n < m$. Die

$$U_\mu(y) = \sum_{\varkappa=0}^{2m-1} [\alpha_{\mu\varkappa} y^{(\varkappa)}(a) + \beta_{\mu\varkappa} y^{(\varkappa)}(b)] \tag{4}$$

sind gegebene Linearformen in den $y^{(\varkappa)}(a)$, $y^{(\varkappa)}(b)$ mit reellen Koeffizienten $\alpha_{\mu\varkappa}, \beta_{\mu\varkappa}$, deren Matrix den Rang $2m$ hat, d. h. die Gleichungen (2) sind voneinander linear unabhängig.

Die Eigenwertaufgabe (1), (2) soll selbstadjungiert für jedes λ sein. Das besagt: Erstens ist die aus der Differentialgleichung

$$F(y) = 0$$

und den Randbedingungen (2) bestehende Randwertaufgabe selbstadjungiert, d. h. es ist

$$[F^*(u, v)]_a^b = 0 \tag{5}$$

für je zwei Zahlensysteme

$$\begin{cases} u(a), u'(a), \ldots, u^{(2m-1)}(a), u(b), u'(b), \ldots, u^{(2m-1)}(b), \\ v(a), v'(a), \ldots, v^{(2m-1)}(a), v(b), v'(b), \ldots, v^{(2m-1)}(b), \end{cases} \tag{6}$$

die beide die Gleichungen (2) erfüllen; dabei ist F^* der in der Greenschen Formel

$$\int_a^b [v\,F(u) - u\,F(v)]\,dx = [F^*(u,v)]_a^b \tag{7}$$

auftretende bilineare Differentialausdruck

$$F^*(u,v) = \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{p+q=\nu-1} (-1)^p [(f_\nu u^{(\nu)})^{(q)} v^{(p)} - (f_\nu v^{(\nu)})^{(q)} u^{(p)}]. \tag{8}$$

Außerdem ist zweitens auch

$$[G^*(u,v)]_a^b = 0 \tag{9}$$

für je zwei Zahlensysteme (6), die beide die Gleichungen (2) erfüllen; dabei ist $G^*(u,v)$ der in der Greenschen Formel

$$\int_a^b [v\,G(u) - u\,G(v)]\,dx = [G^*(u,v)]_a^b \tag{10}$$

auftretende bilineare Differentialausdruck

$$G^*(u,v) = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{p+q=\nu-1} (-1)^p [(g_\nu u^{(\nu)})^{(q)} v^{(p)} - (g_\nu v^{(\nu)})^{(q)} u^{(p)}]. \tag{11}$$

Diese Voraussetzungen sollen im folgenden stets erfüllt sein.

Ist speziell die aus der Differentialgleichung

$$F(y) = \lambda\, g(x)\, y \tag{12}$$

und den Randbedingungen (2) bestehende Eigenwertaufgabe gegeben, so ist $G^* \equiv 0$, also die letzte, auf G bezügliche Bedingung von selbst erfüllt.

Eigenwertaufgaben (1), (2) sind bereits mehrfach bei physikalischen und technischen Problemen aufgetreten[1]). Allgemein sind sie anscheinend bisher jedoch noch nicht behandelt worden. E. Picone[2]) hat für $F(y) = y^{(2m)}$

---

[1]) Siehe z. B. Handbuch der Physik, herausgegeben von H. Geiger und K. Scheel, Bd. 6, Berlin 1928, S. 299, 301, 374. Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik, herausgegeben von F. Auerbach und W. Hort, Bd. 4, Teil 1, Braunschweig 1931, S. 127. F. W. Waltking, Ingenieur-Archiv **5** (1934), S. 429—449; **6** (1935), S. 226—228. K. Federhofer, ebenda **6** (1935), S. 223—225 und Akademie der Wissenschaften in Wien, math.-naturw. Klasse, Abt. IIa, **145** (1936), S. 29—50, 681—688. L. Collatz, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik **19** (1939), S. 224.

[2]) Atti della Reale accademia dei Lincei. Rendiconti, Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (5) **17** (1908), S. 340—347.

einen Ansatz zur Zurückführung der Aufgabe auf ein System von Integralgleichungen gemacht. G. Sansone[3]) hat für konstante f_ν, g_ν die Aufgabe mit andersartigen Randbedingungen behandelt. Der Fall $m = 2$, d. h. die Eigenwertaufgabe vierter Ordnung, ist bei den speziellen Randbedingungen

$$y(a) = y'(a) = y(b) = y'(b) = 0$$

von G. Cimmino[4]) und H. Boerner[5]) behandelt worden; bei Boerner ist auch skizziert, wie die von ihm benutzte Methode der unendlich vielen Veränderlichen zur Behandlung des allgemeinen Falls bei den Randbedingungen

$$y^{(\nu)}(a) = y^{(\nu)}(b) = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, m-1)$$

benutzt werden kann.

Entsprechend der bei der Aufgabe (12), (2) üblichen Bezeichnung wird unter einer *Eigenfunktion* der Aufgabe (1), (2) eine solche Lösung dieser Aufgabe verstanden, die $\not\equiv 0$ ist; der Wert von λ, für den es eine Eigenfunktion gibt, heißt wieder *Eigenwert*. Die Hauptprobleme sind wieder die der Existenz von Eigenwerten sowie der Gültigkeit von Entwicklungssätzen. Diese und andere Fragen werden (unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen) in der anschließenden Abhandlung behandelt werden. Hier soll es sich um Fragen allgemeiner Art handeln, für die nur die zusätzliche Voraussetzung gemacht zu werden braucht, daß für jede Eigenfunktion $\psi(x)$ die Ungleichung

$$\int_a^b \overline{\psi}\, G(\psi)\, dx \neq 0$$

besteht, wo $\overline{\psi}$ die zu ψ konjugiert komplexe Funktion bedeutet. Diese Voraussetzung wird noch näher erläutert werden (§ 2); im Falle der speziellen Aufgabe (12), (2) ist sie bei den üblichen Voraussetzungen stets erfüllt. Unter den genannten Voraussetzungen läßt sich zeigen: Alle etwa vorhandenen Eigenwerte sind reell; es gibt höchstens abzählbar unendlich viele; sie haben keinen im Endlichen gelegenen Häufungspunkt, und die Vielfachheit eines Eigenwertes λ_0 stimmt mit der Vielfachheit überein, die λ_0 als Nullstelle der charakteristischen Determinante $\Delta(\lambda)$ hat; die Greensche Resolvente hat höchstens Pole erster Ordnung. Diese Tatsachen sind für die spezielle Aufgabe (12), (2) mit $g(x) \neq 0$ schon früher von anderen Autoren (Birkhoff, Tamarkin, Bliss) entwickelt worden und lassen sich, wie im folgenden gezeigt werden soll, im allgemeinen Falle (1), (2) auch mit denselben Methoden wie bei der speziellen Aufgabe (12), (2) beweisen.

---

[3]) Rendiconti del circolo matematico di Palermo **55** (1931), S. 168–176.

[4]) Math. Zeitschr. **32** (1930), S. 4–58.

[5]) Math. Zeitschr. **34** (1932). S. 293–319,

§ 1.

Vorbemerkungen und Bezeichnungen [6]).

Zu der Differentialgleichung (1) gibt es für jedes λ ein Hauptsystem von Lösungen

$$y_1(x, \lambda), \ldots, y_{2m}(x, \lambda), \tag{13}$$

aus dem sich jede Lösung von (1) linear komponieren läßt. Daher gibt es, wie leicht zu sehen ist, für jeden Eigenwert λ_0 eine Zahl $k = k(\lambda_0)$ von linear unabhängigen Eigenfunktionen

$$\psi_1(x), \ldots, \psi_k(x),$$

so daß die sämtlichen zu λ_0 gehörigen Eigenfunktionen gerade die Funktionen

$$\psi(x) = c_1 \psi_1 + \cdots + c_k \psi_k \qquad (\Sigma |c_p| > 0)$$

sind, die sich durch lineare Komposition mit beliebigen Konstanten c_p aus den ψ_p gewinnen lassen. Diese Zahl k heißt die *Vielfachheit des Eigenwerts* λ_0; offenbar ist $1 \leqq k \leqq 2m$.

Es sei nun weiterhin das Hauptsystem (13) so gewählt, daß die Anfangswerte der Funktionen y_p und ihrer Ableitungen

$$y_p^{(q)}(a, \lambda) = e_{p, q+1} \quad (p = 1, \ldots, 2m;\ q = 0, \ldots, 2m - 1)$$

sind, wobei

$$e_{p,q} = \begin{cases} 1 & \text{für } p = q, \\ 0 & \text{für } p \neq q \end{cases}$$

sein soll. Da durch die lineare Komposition

$$y(x, \lambda) = c_1 y_1 + \cdots + c_{2m} y_{2m} \quad \text{mit} \quad \Sigma |c_p| > 0$$

gerade die sämtlichen eigentlichen Lösungen von (1) geliefert werden, ist eine Zahl $\lambda = \lambda_0$ genau dann ein Eigenwert, wenn $y(x, \lambda_0)$ bei geeignet gewählten c_p auch noch die Randbedingungen (2) erfüllt, d. h. wenn die Gleichungen

$$\sum_{p=1}^{2m} c_p U_\mu(y_p) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, 2m) \tag{14}$$

mit Zahlen c_p bestehen, für die $\Sigma |c_p| > 0$ ist, und das ist genau dann der Fall, wenn

$$\Delta(\lambda_0) = 0$$

ist, wo

$$\Delta(\lambda) = \text{Det.} |U_\mu(y_\nu)| \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots, 2m)$$

---

[6]) Zu den Entwicklungen von § 1 vgl. die zusammenfassende Darstellung bei E. L. Ince, Ordinary differential equations, London 1927, Kap. 9 und 11 für die Aufgabe (12), (2). — Die Entwicklungen des § 1 gelten zum Teil auch für nicht-selbstadjungierte Aufgaben.

die sogenannte *charakteristische Determinante* der Eigenwertaufgabe ist. Ferner gibt es k linear unabhängige Lösungssysteme der Gleichungen (14) und damit ein System von k linear unabhängigen Lösungen der Randwertaufgabe (1), (2) genau dann, wenn $\Delta(\lambda_0)$ den Rang $2m-k$ hat. Da jedes $y_\nu(x,\lambda)$ nebst den $2m$ ersten Ableitungen nach x eine ganze Funktion von λ ist, ist auch $\Delta(\lambda)$ eine ganze Funktion von λ, also ist entweder $\Delta(\lambda)\equiv 0$ oder $\Delta(\lambda)$ hat höchstens abzählbar viele Nullstellen, und diese haben keinen im Endlichen gelegenen Häufungspunkt. Da die Nullstellen von $\Delta(\lambda)$ die Eigenwerte der Aufgabe (1), (2) sind, hat man den

Satz 1. *Entweder ist jede Zahl λ Eigenwert der Aufgabe* (1), (2), *d. h. $\Delta(\lambda)\equiv 0$, oder es gibt höchstens abzählbar viele Eigenwerte; diese sind die Nullstellen der ganzen Funktion $\Delta(\lambda)$ und haben keinen im Endlichen gelegenen Häufungspunkt. Ein Eigenwert λ_0 hat genau dann die Vielfachheit k, wenn die Determinante $\Delta(\lambda_0)$ den Rang $2m-k$ hat.*

Die vorangehenden Überlegungen sind dieselben, die man bei der speziellen Aufgabe (12), (2) anstellt, und noch manche anderen einfachen Bemerkungen lassen sich von der speziellen Aufgabe auf die allgemeine Aufgabe (1), (2) übertragen; z. B. die sogenannte Alternative, nach der für ein festes λ entweder die homogene Randwertaufgabe (1), (2) mindestens eine eigentliche Lösung oder (für dasselbe λ) die unhomogene Randwertaufgabe

$$F(y)=\lambda G(y)+h(x),\quad U_\mu(y)=\gamma_\mu \qquad (h \text{ stetig};\ \mu=1,\ldots,2m)$$

genau eine Lösung hat. Hier sei nur noch auf folgendes hingewiesen:

I. Hat für ein gegebenes λ die Randwertaufgabe (1), (2) keine eigentliche Lösung, so gibt es zu der Aufgabe bekanntlich [7]) eine eindeutig bestimmte Greensche Funktion

$$\Gamma(x,\xi,\lambda)=\gamma(x,\xi,\lambda)+\frac{Z(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}; \tag{15}$$

dabei ist

$$\gamma(x,\xi,\lambda)=\tfrac{1}{2}\operatorname{sgn}(x-\xi)\cdot f_m^{m-1}(\xi)\cdot\begin{vmatrix} y_1(\xi,\lambda), & \ldots, & y_{2m}(\xi,\lambda)\\ y_1'(\xi,\lambda), & \ldots, & y_{2m}'(\xi,\lambda)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ y_1^{(2m-2)}(\xi,\lambda), & \ldots, & y_{2m}^{(2m-2)}(\xi,\lambda)\\ y_1(x,\lambda), & \ldots, & y_{2m}(x,\lambda)\end{vmatrix}$$

(die Striche bedeuten hier Differentiation nach ξ) eine Grundlösung der Differentialgleichung (1) und

$$Z(x,\xi,\lambda)=\begin{vmatrix} 0, & y_1(x,\lambda), & \ldots, & y_{2m}(x,\lambda)\\ U_1(\gamma), & U_1(y_1), & \ldots, & U_1(y_{2m})\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ U_{2m}(\gamma), & U_{2m}(y_1), & \ldots, & U_{2m}(y_{2m})\end{vmatrix}.$$

[7]) Vgl. Ince, a. a. O.; W. W. Elliott, American journal of mathematics 50 (1928), S. 243ff.

Die Darstellung (15) gilt für $a \leqq x \leqq b$, $a < \xi < b$; für $\xi = a$ bzw. $\xi = b$ ist Γ durch die Grenzwerte der rechten Seite von (15) für $\xi \to a$ bzw. $\xi \to b$ definiert. Diese Funktion $\Gamma(x, \xi, \lambda)$ heiße die *Greensche Resolvente* der Aufgabe (1), (2). Aus der Darstellung (15) folgt mit Benutzung von Satz 1, daß die Greensche Resolvente, wenn $\Delta(\lambda) \not\equiv 0$ ist, eine meromorphe Funktion von λ ist und daß Polstellen nur für solche Werte λ entstehen können, die Eigenwerte sind.

II. Ist $\lambda = 0$ kein Eigenwert, so hat die Aufgabe

$$F(y) = 0, \quad U_\mu(y) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, 2m)$$

keine eigentliche Lösung, und es gibt dann zu dieser Aufgabe ebenfalls eine Greensche Funktion

$$\Gamma(x, \xi) = \Gamma(x, \xi, 0).$$

Diese Funktion sei weiterhin allein als die *Greensche Funktion* der Aufgabe (1), (2) bezeichnet. Wenn $\Gamma(x, \xi)$ existiert, hat bekanntlich [7]) die Randwertaufgabe

$$F(y) = h(x); \quad U_\mu(y) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, 2m) \tag{16}$$

für stetiges $h(x)$ genau eine Lösung, und zwar

$$y(x) = \int_a^b \Gamma(x, \xi)\, h(\xi)\, d\xi.$$

III. Eine Funktion $u(x)$ möge eine *zulässige Funktion* der Aufgabe (1), (2) heißen, wenn $u(x)$ $2m$-mal stetig differenzierbar ist und die Randbedingungen (2) erfüllt. Sind u, v zwei zulässige Funktionen, so ist für sie (vgl. die Einleitung)

$$[F^*(u, v)]_a^b = [G^*(u, v)]_a^b = 0$$

und daher nach den Greenschen Formeln (7) und (10)

$$\int_a^b u\, F(v)\, dx = \int_a^b v\, F(u)\, dx, \quad \int_a^b u\, G(v)\, dx = \int_a^b v\, G(u)\, dx.$$

Das wird im folgenden häufig benutzt, ohne daß jedesmal besonders darauf hingewiesen wird.

IV. Sind λ_1, λ_2 zwei verschiedene Eigenwerte der Aufgabe (1), (2) und ψ_1, ψ_2 zugehörige Eigenfunktionen, so erfüllen sie die *Orthogonalitätsbeziehung*

$$\int_a^b \psi_1\, G(\psi_2)\, dx = 0. \tag{17}$$

Denn es ist

$$F(\psi_1) = \lambda_1 G(\psi_1), \quad F(\psi_2) = \lambda_2 G(\psi_2),$$

also

$$\int_a^b [\psi_2 F(\psi_1) - \psi_1 F(\psi_2)]\, dx = \lambda_1 \int_a^b \psi_2 G(\psi_1)\, dx - \lambda_2 \int_a^b \psi_1 G(\psi_2)\, dx$$

und daher nach III., da die Eigenfunktionen zulässige Funktionen sind,

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b \psi_1 G(\psi_2)\, dx.$$

Da $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ist, folgt hieraus die Behauptung.

§ 2.

Die Definition der normalen selbstadjungierten Eigenwertaufgabe.

Für die Gewinnung weitergehender Aussagen wird eine zusätzliche Voraussetzung eingeführt. Die selbstadjungierte Eigenwertaufgabe (1), (2) soll *normal* heißen, wenn für jede ihrer Eigenfunktionen ψ die Ungleichung

$$\int_a^b \bar{\psi} G(\psi)\, dx \neq 0 \tag{18}$$

besteht, wo $\bar{\psi}$ die zu ψ konjugiert-komplexe Funktion bedeutet.

Die Bedingung (18) besagt dasselbe wie

$$\int_a^b [u G(u) + v G(v)]\, dx \neq 0 \quad \text{für} \quad u + iv = \psi. \tag{18a}$$

Denn, da die Randbedingungen (2) reelle Koeffizienten haben, erfüllen auch u, v die Gleichungen (2) und sind somit zugelassene Funktionen. Daher ergibt sich bei Berücksichtigung von III.:

$$\begin{aligned}\int_a^b \bar{\psi} G(\psi)\, dx &= \int_a^b (u - iv) G(u + iv)\, dx \\ &= \int_a^b u G(u)\, dx + i \int_a^b [u G(v) - v G(u)]\, dx + \int_a^b v G(v)\, dx \\ &= \int_a^b [u G(u) + v G(v)]\, dx.\end{aligned}$$

Da für jede Eigenfunktion ψ mit dem zugehörigen Eigenwert λ nach (1) die Gleichung

$$\int_a^b \bar{\psi} F(\psi)\, dx = \lambda \int_a^b \bar{\psi} G(\psi)\, dx$$

besteht, ist die Bedingung (18) für eine Eigenfunktion ψ sicher dann erfüllt, wenn für diese

$$\int_a^b \bar{\psi} F(\psi)\, dx \neq 0 \tag{19}$$

oder, was dasselbe besagt

$$\int_a^b [u\,F(u) + v\,F(v)]\,dx \not\equiv 0 \qquad (u + iv = \psi) \tag{19a}$$

ist.

An diesen Bedingungen ist unangenehm, daß in sie die Eigenfunktionen selber eingehen. Man kann jedoch leicht hinreichende Bedingungen, welche die Eigenfunktionen nicht enthalten, dafür angeben, daß die obigen Ungleichungen erfüllt sind.

Satz 2. *Die selbstadjungierte Eigenwertaufgabe* (1), (2) *ist sicher normal, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

a) $G(y) = g(x)\,y$, *wo* $g \geqq 0$, *jedoch* $\not\equiv 0$ (*oder* $g \leqq 0$, *jedoch* $\not\equiv 0$) *für* $a \leqq x \leqq b$ *ist;*

b) *für jede reelle zulässige Funktion* $u(x) \not\equiv 0$ *ist*

$$\int_a^b u\,G(u)\,dx > 0 \qquad (\text{oder stets} < 0);$$

c) $\lambda = 0$ *ist kein Eigenwert, und für jede reelle zulässige Funktion* $u(x)$ *ist*

$$\int_a^b u\,G(u)\,dx \geqq 0 \qquad (\text{oder stets} \leqq 0);$$

d) *für jede reelle zulässige Funktion* $u(x)$ *ist*

$$\int_a^b u\,F(u)\,dx \geqq 0 \tag{20}$$

und außerdem ist für diejenigen zulässigen $u(x) \not\equiv 0$, *für die in* (20) *etwa das Gleichheitszeichen gilt,*

$$\int_a^b u\,G(u)\,dx \not\equiv 0,$$

und hat ein festes Vorzeichen für alle diese u.

Beweis. Zu a): Ist $u + iv = \psi$ eine Eigenfunktion, so ist

$$\int_a^b [u\,G(u) + v\,G(v)]\,dx = \int_a^b g\,(u^2 + v^2)\,dx = \int_a^b g\,|\psi|^2\,dx \geqq 0.$$

Da ψ eine eigentliche Lösung der Gleichung (1) ist, verschwindet ψ in keinem Teilintervall identisch, da ψ sonst an einer Stelle nebst allen Ableitungen den Wert 0 hätte, also $\psi = 0$ im ganzen Intervall $a \leqq x \leqq b$ wäre. Nach den Voraussetzungen über g ist daher

$$\int_a^b g\,|\psi|^2\,dx > 0,$$

also (18a) erfüllt.

Zu b): Offenbar ist (18a) erfüllt.

Zu c): Ist wieder $\psi = u + iv$ eine Eigenfunktion, so ist nach der Voraussetzung

$$\int_a^b u\,G(u)\,dx \geqq 0 \quad \text{und} \quad \int_a^b v\,G(v)\,dx \geqq 0,$$

also (18a) erfüllt, wenn in den obigen Ungleichungen nicht beide Male das Gleichheitszeichen stehen kann. Ist etwa

$$\int_a^b u\,G(u)\,dx = 0, \tag{21}$$

so ist für eine beliebige zulässige Funktion $w(x)$ und eine beliebige Zahl ε auch $u + \varepsilon w$ eine zulässige Funktion. Nach der Voraussetzung ist daher bei Berücksichtigung von III. und (21)

$$\begin{aligned} 0 &\leqq \int_a^b (u + \varepsilon w)\,G(u + \varepsilon w)\,dx \\ &= \int_a^b u\,G(u)\,dx + 2\,\varepsilon \int_a^b w\,G(u)\,dx + \varepsilon^2 \int_a^b w\,G(w)\,dx \\ &= 2\,\varepsilon \int_a^b w\,G(u)\,dx + \varepsilon^2 \int_a^b w\,G(w)\,dx. \end{aligned}$$

Dies gilt bei festem w für jedes ε. Daher ist

$$\int_a^b w\,G(u)\,dx = 0.$$

Da dieses für jede zulässige Funktion w gilt, ist $G(u) = 0$. Wäre auch

$$\int_a^b v\,G(v)\,dx = 0,$$

so wäre auch $G(v) = 0$, also $G(\psi) = 0$, und daher nach (1) $F(\psi) = 0$, d. h. $\lambda = 0$ wäre entgegen der Voraussetzung ein Eigenwert.

Zu d): Ist wieder $\psi = u + iv$ eine Eigenfunktion mit dem Eigenwert λ, so ist

$$\int_a^b [u\,F(u) + v\,F(v)]\,dx \geqq 0.$$

Gilt hierin nicht das Gleichheitszeichen, so ist (19a), also (18) erfüllt. Gilt das Gleichheitszeichen, so ergibt sich wie bei c), daß $F(u) = F(v) = 0$, also ψ eine Eigenfunktion mit dem Eigenwert $\lambda = 0$ ist. Nach der zusätzlichen Voraussetzung ist dann (18a), also ebenfalls (18) erfüllt.

§ 3.

Eigenschaften der normalen selbstadjungierten Eigenwertaufgaben.

Den normalen selbstadjungierten Eigenwertaufgaben kommt eine Reihe wichtiger Eigenschaften zu, die in diesem und dem folgenden Paragraphen entwickelt werden sollen.

Satz 3. *Jede normale selbstadjungierte Eigenwertaufgabe hat nur reelle Eigenwerte.*

Beweis. Ist $\lambda = \mu + i\nu$ ein Eigenwert und $\psi = u + iv$ eine zugehörige Eigenfunktion, so ist

$$F(u) + iF(v) = (\mu + i\nu)\,[G(u) + iG(v)],$$

also

$$F(u) = \mu G(u) - \nu G(v),$$

$$F(v) = \mu G(v) + \nu G(u).$$

Da u, v zulässige Funktionen sind, folgt hieraus mit III.:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b [u F(v) - v F(u)]\,dx \\ &= \mu \int_a^b [u G(v) - v G(u)]\,dx + \nu \int_a^b [u G(u) + v G(v)]\,dx \\ &= \nu \int_a^b [u G(u) + v G(v)]\,dx, \end{aligned}$$

also $\nu = 0$ wegen (18a), d. h. λ reell.

Da alle Eigenwerte reell sind, lassen sich die Eigenfunktionen sämtlich aus reellen Eigenfunktionen linear komponieren. Will man ein Repräsentantensystem von Eigenfunktionen haben, aus denen sich alle Eigenfunktionen linear komponieren lassen, so kann man sich daher auf reelle Eigenfunktionen beschränken. Das soll fortan geschehen. Weiterhin kommen also nur reelle Zahlen und Funktionen vor. Da nun für Eigenfunktionen ψ nach (18)

$$\int_a^b \psi G(\psi)\,dx \neq 0$$

ist, kann man die Eigenfunktionen überdies so normieren, daß

$$\int_a^b \psi G(\psi)\,dx = \pm 1$$

ist.

Satz 4. *Die Eigenwertaufgabe* (1), (2) *sei selbstadjungiert und normal, ferner sei*[8]) $\Delta(\lambda) \not\equiv 0$. *Gibt es überhaupt Eigenwerte, so lassen sie sich, jeder Eigenwert in seiner Vielfachheit angeführt, in einer Folge*

$$\ldots \leqq \lambda_{-2} \leqq \lambda_{-1} < \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots$$

anordnen, bei der $\lambda_\nu \geqq 0$ *für* $\nu > 0$ *und* $\lambda_\nu < 0$ *für* $\nu < 0$ *ist; gibt es für* $\nu > 0$ *unendlich viele* λ_ν, *so ist* $\lambda_\nu \to \infty$; *gibt es unendlich viele* $\lambda_{-\nu}$, *so ist* $\lambda_{-\nu} \to -\infty$.

Zu der obigen Folge der Eigenwerte gibt es weiter ein vollständiges Orthogonalsystem von Eigenfunktionen

$$\ldots, \psi_{-2}(x), \psi_{-1}(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \ldots \tag{22}$$

mit der Eigenschaft, daß ψ_p *zu* λ_p *gehört, die Orthogonalitätsbeziehung*

$$\int_a^b \psi_p G(\psi_q)\, dx = 0 \quad \text{für} \quad p \neq q \tag{23}$$

gilt und jede zu einem Eigenwert λ^* *gehörige Eigenfunktion durch lineare Komposition aus den endlich vielen Eigenfunktionen des Systems* (22) *erhalten werden kann, die zu dem Eigenwert* λ^* *gehören. Weiter kann man durch Multiplikation der* ψ_p *mit geeigneten Konstanten noch erreichen, daß*

$$\int_a^b \psi_p G(\psi_p)\, dx = \pm 1,$$

also insgesamt

$$\int_a^b \psi_p G(\psi_q)\, dx = \pm e_{pq} \tag{24}$$

gilt; das vollständige Orthogonalsystem (22) *heißt dann normiert*[9]).

Beweis. Der erste Teil der Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 1 und 3. Der zweite Teil ergibt sich so: Ist λ^* ein Eigenwert, so gibt es zu ihm ein System von k linear unabhängigen Eigenfunktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$. Die Zahlen

$$c_{pq} = \int_a^b \varphi_p G(\varphi_q)\, dx \qquad (p, q = 1, \ldots, k)$$

bilden wegen § 1, III. eine symmetrische Matrix C. Daher gibt es eine Matrix

$$A = (a_{pq}) \qquad (p, q = 1, \ldots, k)$$

mit

$$\text{Det. } |a_{pq}| \neq 0, \tag{25}$$

[8]) Die Voraussetzung $\Delta(\lambda) \not\equiv 0$ wird sich durch Satz 5 als überflüssig erweisen.

[9]) Ein solches System wird auch ein *Orthonormalsystem* genannt.

so daß, wenn A' die transponierte Matrix zu A bedeutet, $A'\,C\,A$ eine Diagonalmatrix, d. h.

$$\sum_{r,s} a_{rp}\, a_{sq} \int_a^b \varphi_r\, G(\varphi_s)\, dx = 0 \qquad (p \neq q)$$

ist. Wird

$$\Phi_p(x) = \sum_{r=1}^{k} a_{rp}\, \varphi_r(x) \qquad (p = 1, \ldots, k)$$

gesetzt, so ist daher die Orthogonalitätsbeziehung

$$\int_a^b \Phi_p\, G(\Phi_q)\, dx = 0 \quad \text{für} \quad p \neq q$$

erfüllt, und auch die Φ_p bilden wegen (25) ein System von k linear unabhängigen Eigenfunktionen.

Ist nun in der Folge der Eigenwerte $\lambda^* = \lambda_{\nu+1} = \cdots = \lambda_{\nu+k}$ und wird $\psi_{\nu+1} = \Phi_1, \ldots, \psi_{\nu+k} = \Phi_k$ gesetzt, so hat das so gebildete System (22) die Eigenschaften (23), da ja für Eigenfunktionen, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, die Ungleichung (23) nach § 1, IV. von selbst erfüllt ist.

Satz 5. *Bei jeder normalen selbstadjungierten Eigenwertaufgabe* (1), (2) *stimmt die Vielfachheit jedes Eigenwerts λ_0 mit der Vielfachheit überein, die λ_0 als Nullstelle von $\Delta(\lambda)$ hat. Daher ist $\Delta(\lambda) \not\equiv 0$, und es gibt höchstens abzählbar viele Eigenwerte.*

Beweis [10]). Es sei λ_0 ein Eigenwert der Vielfachheit k. Dann hat (vgl. § 1, insbesondere Satz 1)

$$\Delta(\lambda) = \text{Det.}\,|U_\mu(y_\nu)| \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots, 2m)$$

für $\lambda = \lambda_0$ den Rang $r = 2m - k$. Durch Vertauschungen von Spalten und nachfolgende Umnumerierung der y_ν läßt sich erreichen, daß die ersten r Spalten der Determinante für $\lambda = \lambda_0$ den Rang r haben. Dadurch hat sich höchstens das Vorzeichen der Determinante geändert. Die letzten $2m - r$ Spalten der Determinante sind nun für $\lambda = \lambda_0$ lineare Kompositionen der ersten r Spalten, etwa

$$U_\mu(y_\nu) = \sum_{\varkappa=1}^{r} a_{\nu\varkappa}\, U_\mu(y_\varkappa) = U_\mu\Big(\sum_{\varkappa=1}^{r} a_{\nu\varkappa}\, y_\varkappa\Big)$$
$$(\lambda = \lambda_0;\ \ \nu = r+1, \ldots, 2m;\ \ \mu = 1, \ldots, 2m).$$

Wird

$$\varphi_\nu(x,\lambda) = \begin{cases} y_\nu(x,\lambda) & (\nu = 1, \ldots, r), \\ y_\nu(x,\lambda) - \sum_{\varkappa=1}^{r} a_{\nu\varkappa}\, y_\varkappa(x,\lambda) & (\nu = r+1, \ldots, 2m) \end{cases}$$

---

[10]) Vgl. G. A. Bliss, Transactions of the american mathematical society **28** (1926), S. 572 (für Systeme von Differentialgleichungen).

gesetzt, so bilden die $\varphi_\nu(x, \lambda)$ wieder ein Hauptsystem von Lösungen der Differentialgleichung (1), und es ist

$$\Delta(\lambda) = \pm \text{Det.} \, |U_\mu(\varphi_\nu)| \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots, 2m).$$

Die hier auf der rechten Seite stehende Determinante wird weiterhin mit $\Delta(\lambda)$ bezeichnet. Für $\lambda = \lambda_0$ stehen in den letzten $k = 2m - r$ Spalten dieser Determinante lauter Nullen, d. h. es ist

$$U_\mu(\varphi_\nu) = 0 \text{ für } \lambda = \lambda_0; \quad \mu = 1, \ldots, 2m; \quad \nu = r+1, \ldots, 2m. \tag{26}$$

Die Ableitung $\Delta'(\lambda)$ kann man so bilden, daß man je eine Spalte nach λ differenziert und die entstehenden Determinanten addiert. Durch Wiederholung des Verfahrens gelangt man auch zu den höheren Ableitungen von $\Delta(\lambda)$. Jede dieser Determinanten ist an der Stelle λ_0 sicher Null, wenn in ihr eine der letzten k Spalten von $\Delta(\lambda)$ unverändert auftritt. Das ist bei $\Delta^{(h)}(\lambda)$ der Fall, solange $h < k$ ist. da dann höchstens h der letzten k Spalten differenziert sein können.

Daher ist λ_0 mindestens eine k-fache Nullstelle von $\Delta(\lambda)$. Für $h = k$ bleibt an der Stelle λ_0 nur diejenige Determinante übrig, bei der jede der letzten k Spalten genau einmal differenziert ist. Es ist also, wenn die Determinante durch die μ-te Zeile angedeutet wird,

$$\Delta^{(k)}(\lambda_0) = |U_\mu(\varphi_1), \ldots, U_\mu(\varphi_r), U_\mu(\varphi_{r+1,\lambda}), \ldots, U_\mu(\varphi_{2m,\lambda})|,$$

wobei der Index λ die einmalige Differentiation nach λ bezeichnet. Es ist nun noch zu beweisen, daß $\Delta^{(k)}(\lambda_0) \neq 0$ ist.

Angenommen, es sei $\Delta^{(k)}(\lambda_0) = 0$. Dann sind die Spalten dieser Determinante voneinander linear abhängig. Es gibt also Zahlen c_ν, die nicht alle Null sind und für die

$$\sum_{\nu=1}^{r} c_\nu U_\mu(\varphi_\nu) + \sum_{\nu=r+1}^{2m} c_\nu U_\mu(\varphi_{\nu,\lambda}) = 0 \qquad (\lambda = \lambda_0; \ \mu = 1, \ldots, 2m) \tag{27}$$

ist. Da die Teilmatrix der ersten r Spalten den Rang r hat, ist sogar

$$|c_{r+1}| + \cdots + |c_{2m}| > 0.$$

Mit diesen Konstanten wird gebildet:

$$\varphi(x, \lambda) = \sum_{\nu=r+1}^{2m} c_\nu \varphi_\nu(x, \lambda), \qquad \Phi(x, \lambda) = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = \sum_{\nu=r+1}^{2m} c_\nu \varphi_{\nu,\lambda}(x, \lambda),$$

$$\Psi(x, \lambda) = \sum_{\nu=1}^{r} c_\nu \varphi_\nu(x, \lambda) + \Phi(x, \lambda).$$

Es ist dann $\varphi(x, \lambda_0) \not\equiv 0$, ferner nach (26) und (27)

$$U_\mu(\varphi) = 0, \quad U_\mu(\Psi) = 0 \text{ für } \lambda = \lambda_0; \quad \mu = 1, \ldots, 2m, \tag{28}$$

d. h. φ und Ψ sind für $\lambda = \lambda_0$ zulässige Funktionen. Da jedes φ_ν die Differentialgleichung (1) erfüllt, ist

$$F(\varphi) = \lambda G(\varphi). \tag{29}$$

Durch Differentiation nach λ erhält man hieraus

$$F(\Phi) = \lambda G(\Phi) + G(\varphi),$$

also auch

$$F(\Psi) = \lambda G(\Psi) + G(\varphi). \tag{30}$$

Da φ und Ψ zulässige Funktionen sind, ist somit nach (29) und (30) für $\lambda = \lambda_0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b [\varphi F(\Psi) - \Psi F(\varphi)]\, dx \\ &= \lambda_0 \int_a^b [\varphi G(\Psi) - \Psi G(\varphi)]\, dx + \int_a^b \varphi G(\varphi)\, dx \\ &= \int_a^b \varphi G(\varphi)\, dx. \end{aligned}$$

Da $\varphi(x, \lambda_0) \not\equiv 0$ und somit nach (29) und (28) eine Eigenfunktion ist und da die Eigenwertaufgabe normal ist, liefert die obige Gleichung den gewünschten Widerspruch.

Die Behauptung über die Vielfachheit des Eigenwerts ist damit bewiesen. Der Rest des Satzes folgt hieraus unmittelbar mit Satz 1.

§ 4.

Eigenschaften der Greenschen Resolvente.

Satz 6. *Bei jeder normalen selbstadjungierten Eigenwertaufgabe* (1), (2) *hat die Greensche Resolvente höchstens Pole erster Ordnung.*

Beweis[11]). Nach § 1, I. ist die Greensche Resolvente $\Gamma(x, \xi, \lambda)$ eine meromorphe Funktion von λ und sicher dort regulär, wo $\Delta(\lambda) \neq 0$ ist. Nach Satz 5 ist $\Delta(\lambda) \not\equiv 0$, und die Nullstellen von $\Delta(\lambda)$ liegen daher isoliert. Es sei nun λ_0 eine k-fache Nullstelle von $\Delta(\lambda)$. Dann hat Γ eine Entwicklung

$$\Gamma(x, \xi, \lambda) = \sum_{\nu=-k}^{\infty} h_\nu(x, \xi)(\lambda - \lambda_0)^\nu \tag{31}$$

für $a \leqq x, \xi \leqq b$ und einen gewissen Bereich $0 < |\lambda - \lambda_0| \leqq \varrho$ der komplexen λ-Ebene. Nach Cauchys Integralformel ist

$$h_\nu(x, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{K}} \frac{\Gamma(x, \xi, \lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^{\nu+1}}\, d\lambda, \tag{32}$$

wenn $\mathfrak{K}$ der positiv durchlaufene Kreis $|\lambda - \lambda_0| = \varrho$ ist. Es ist zu beweisen, daß $h_\nu \equiv 0$ für $\nu \leqq -2$ ist.

---

[11]) Vgl. J. Tamarkine, Rendiconti del circolo matematico di Palermo **34** (1912), S. 379–381. Dort wird die Eigenwertaufgabe (12), (2) mit $g(x) \neq 0$ behandelt.

Da Γ auf dem Kreis $\mathfrak{K}$ eine stetige Funktion von x, ξ, λ ist, folgt aus der obigen Darstellung eine Abschätzung

$$|h_\nu(x,\xi)| \leqq \frac{C}{\varrho^\nu} \quad \text{für } a \leqq x, \xi \leqq b$$

mit einer von ν unabhängigen Konstanten C. Daher konvergiert die Reihe (31) für jedes feste λ eines gewissen Bereiches $0 < |\lambda - \lambda_0| \leqq \varrho_1$ sogar gleichmäßig in dem Quadrat $a \leqq x, \xi \leqq b$.

Ist $\Phi(x)$ für $a \leqq x \leqq b$ eine beliebige stetige Funktion und wird für diese

$$H(x,\lambda) = \int_a^b \Gamma(x,\xi,\lambda)\,\Phi(\xi)\,d\xi$$

gesetzt, so ist daher

$$H(x,\lambda) = \sum_{\nu=-k}^{\infty} H_\nu(x)\,(\lambda-\lambda_0)^\nu \tag{33}$$

mit

$$H_\nu(x) = \int_a^b h_\nu(x,\xi)\,\Phi(\xi)\,d\xi,$$

und die Reihe (33) konvergiert für jedes feste λ eines gewissen Bereiches $0 < |\lambda - \lambda_0| \leqq \varrho_1$ gleichmäßig in $a \leqq x \leqq b$. Die Funktion $H(x,\lambda)$ ist nach ihrer Definition für $0 < |\lambda - \lambda_0| \leqq \varrho_1$ die Lösung der Randwertaufgabe

$$F(y) = \lambda G(y) + \Phi(x), \quad U_\mu(y) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, 2m), \tag{34}$$

also $2m$-mal nach x stetig differenzierbar. Dieses gilt, wie die Darstellung der H_ν durch $H(x,\lambda)$ mittels der Cauchyschen Integralformel zeigt, auch für die $H_\nu(x)$, und man kann die Reihe (33) gliedweise $2m$-mal nach x differenzieren. Trägt man die Ergebnisse in (34) ein, so wird aus der Differentialgleichung

$$\sum_{\nu=-k}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^\nu \{F(H_\nu) - [(\lambda-\lambda_0) + \lambda_0]\,G(H_\nu)\} = \Phi(x)$$

und aus den Randbedingungen

$$\sum_{\nu=-k}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^\nu\, U_\mu(H_\nu) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, 2m).$$

Es sei nun r die kleinste Zahl, für die $H_r(x) \not\equiv 0$ ist. Angenommen es sei $r \leqq -2$. Dann folgt aus den obigen Gleichungen:

$$F(H_r) = \lambda_0 G(H_r), \qquad U_\mu(H_r) = 0, \tag{35}$$

$$F(H_{r+1}) = \lambda_0 G(H_{r+1}) + G(H_r), \qquad U_\mu(H_{r+1}) = 0. \tag{36}$$

Da die Eigenwerte reell sind, folgt aus (35) für die zu H_r konjugiert komplexe Funktion $\bar{H}_r$ auch

$$F(\bar{H}_r) = \lambda_0 G(\bar{H}_r), \quad U_\mu(\bar{H}_r) = 0, \tag{37}$$

also hieraus und aus (36) mit § 1, III.:

$$0 = \int_a^b [\bar{H}_r F(H_{r+1}) - H_{r+1} F(\bar{H}_r)]\, dx$$
$$= \lambda_0 \int_a^b [\bar{H}_r G(H_{r+1}) - H_{r+1} G(\bar{H}_r)]\, dx + \int_a^b \bar{H}_r G(H_r)\, dx$$
$$= \int_a^b \bar{H}_r G(H_r)\, dx.$$

Da $\bar{H}_r$ nach (37) eine Lösung der Randwertaufgabe (1), (2) mit $\lambda = \lambda_0$ ist, und da die Eigenwertaufgabe normal ist, muß nun $\bar{H}_r(x) \equiv 0$, also auch $H_r(x) \equiv 0$ sein, womit der gewünschte Widerspruch erreicht ist.

D. h. für jede stetige Funktion $\Phi(x)$ ist

$$H_\nu(x) = \int_a^b h_\nu(x, \xi)\, \Phi(\xi)\, d\xi$$

für $\nu \leqq -2$, also auch $h_\nu(x, \xi) \equiv 0$ für $\nu \leqq -2$, und das war zu beweisen.

Satz 7. *Ist λ_0 ein k-facher Eigenwert der selbstadjungierten normalen Eigenwertaufgabe* (1), (2) *und ist $\psi_1(x), \ldots, \psi_k(x)$ ein zugehöriges Orthogonalsystem von Eigenfunktionen, so ist das Residuum $R(x, \xi)$ von $\Gamma(x, \xi, \lambda)$ an der Stelle λ_0*

$$R(x, \xi) = -\sum_{\nu=1}^{k} \frac{1}{c_\nu} \psi_\nu(x)\, \psi_\nu(\xi) \tag{38}$$

mit

$$c_\nu = \int_a^b \psi_\nu G(\psi_\nu)\, dx. \tag{39}$$

Beweis[12]). Zunächst wird gezeigt, daß $R(x, \xi)$ für $a < \xi < b$ als Funktion von x eine Lösung der Aufgabe (1), (2) mit $\lambda = \lambda_0$ ist. Nach § 1, I. ist nämlich

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\Delta(\lambda)} Z(x, \xi, \lambda) = (\lambda - \lambda_0)\, \Gamma(x, \xi, \lambda) - (\lambda - \lambda_0)\, \gamma(x, \xi, \lambda). \tag{40}$$

Das erste Glied der rechten Seite ist nach Satz 6 an der Stelle λ_0 regulär, und γ ist überall regulär. Daher ist für jedes feste $a \leqq \xi \leqq b$ die Funktion

$$Y(x, \xi, \lambda) = \frac{\lambda - \lambda_0}{\Delta(\lambda)} Z(x, \xi, \lambda) \tag{41}$$

an der Stelle λ_0 regulär, hat also in einer Umgebung $|\lambda - \lambda_0| \leqq \varrho$, in der außer λ_0 kein weiterer Eigenwert liegen soll, eine Entwicklung

$$Y(x, \xi, \lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(x, \xi)\, (\lambda - \lambda_0)^\nu \tag{42}$$

[12]) Vgl. G. D. Birkhoff, Transactions of the american mathematical society 9 (1908), S. 378f., 389; J. Tamarkine[11]); E. L. Ince, a. a. O., S. 259f. Es handelt sich dort wieder um die Aufgabe (12), (2) mit $g(x) \neq 0$.

und ist, wie sich aus der Darstellung von Z in § 1, I. ergibt, jedenfalls für $0 < |\lambda - \lambda_0| \leqq \varrho$ eine Lösung der Differentialgleichung (1). Nach Cauchys Integralformel ist

$$\varphi_\nu(x,\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int^{\mathfrak{K}} \frac{Y(x,\xi,\lambda)}{(\lambda-\lambda_0)^{\nu+1}}\,d\lambda, \tag{43}$$

wo $\mathfrak{K}$ der positiv durchlaufene Kreis $|\lambda - \lambda_0| = \varrho$ ist. Aus der erwähnten Darstellung von Z folgt weiter, daß die p-ten partiellen Ableitungen $Y^{(p)}(x,\xi,\lambda)$ nach x bei festem ξ für $p \leqq 2m$ stetige Funktionen von x, λ in dem Bereich $a \leqq x \leqq b$, $|\lambda - \lambda_0| = \varrho$ sind. Daher folgt aus (43) für die Ableitungen nach x

$$\varphi_\nu^{(p)}(x,\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int^{\mathfrak{K}} \frac{Y^{(p)}(x,\xi,\lambda)}{(\lambda-\lambda_0)^{\nu+1}}\,d\lambda.$$

Da die Ableitungen $Y^{(p)}$ in dem genannten Bereich gleichmäßig beschränkt sind, ergibt sich, daß man die Reihe (42) $2m$-mal gliedweise differenzieren kann, d. h. es ist

$$Y^{(p)}(x,\xi,\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu^{(p)}(x,\xi)\,(\lambda-\lambda_0)^\nu. \tag{44}$$

Da Y Lösung von (1) ist, erhält man, wenn man diese Reihen in (1) einträgt,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^\nu \{F(\varphi_\nu) - [(\lambda-\lambda_0)+\lambda_0]\,G(\varphi_\nu)\} = 0$$

für alle $0 < |\lambda - \lambda_0| < \varrho$. Daher ist

$$F(\varphi_0) = \lambda_0 G(\varphi_0),$$

d. h. $Y(x,\xi,\lambda)$ erfüllt die Differentialgleichung (1) auch für $\lambda = \lambda_0$. Aus (40) und (41) folgt aber

$$R(x,\xi) = \lim_{\lambda\to\lambda_0} (\lambda-\lambda_0)\,\Gamma(x,\xi,\lambda) = Y(x,\xi,\lambda_0),$$

also ist das Residuum $R(x,\xi)$ für jedes feste $a \leqq \xi \leqq b$ eine Lösung von (1) mit $\lambda = \lambda_0$.

Für jedes feste ξ des Intervalls $a < \xi < b$ ist $\Gamma(x,\xi,\lambda)$ nebst den $2m$ ersten Ableitungen nach x in jedem der Bereiche

$$a \leqq x \leqq \xi, \quad |\lambda-\lambda_0| = \varrho \quad \text{und} \quad \xi \leqq x \leqq b, \quad |\lambda-\lambda_0| = \varrho$$

eine stetige Funktion von x, λ. Daher kann man in jedem der angegebenen Intervalle für x

$$R(x,\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int^{\mathfrak{K}} \Gamma(x,\xi,\lambda)\,d\lambda \tag{45}$$

$2m$-mal nach x unter dem Integralzeichen differenzieren, und man erhält

$$R^{(p)}(x,\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int^{\mathfrak{K}} \Gamma^{(p)}(x,\xi,\lambda)\,d\lambda \quad (p = 0, 1, \ldots, 2m). \tag{46}$$

Daher ist für $a < \xi < b$

$$U_\mu(R) = \frac{1}{2\pi i} \Re \int U_\mu(\Gamma)\, d\lambda = 0,$$

da Γ als Greensche Funktion für $a < \xi < b$ die Randbedingungen (2) erfüllt.

$R(x, \xi)$ ist also in der Tat für $a < \xi < b$ eine Lösung der Randwertaufgabe (1), (2) mit $\lambda = \lambda_0$. Daher ist für gewisse Zahlen $\alpha_p(\xi)$

$$R(x, \xi) = \sum_{p=1}^{k} \alpha_p(\xi)\, \psi_p(x) \quad (a \leqq x \leqq b;\ a < \xi < b). \tag{47}$$

Da die Aufgabe selbstadjungiert ist, ist $\Gamma(x, \xi, \lambda) = \Gamma(\xi, x, \lambda)$, also auch $R(x, \xi) = R(\xi, x)$, also

$$\sum_{p=1}^{k} \alpha_p(\xi)\, \psi_p(x) = \sum_{p=1}^{k} \alpha_p(x)\, \psi_p(\xi) \qquad (a < x,\ \xi < b). \tag{48}$$

Da die ψ_p linear unabhängig sind, gibt es Zahlen x_p, so daß

$$\text{Det.}\ |\psi_p(x_q)| \neq 0 \qquad (p, q = 1, \ldots, k)$$

ist. Schreibt man die Gleichungen (48) für $x = x_1, \ldots, x_k$ auf, so kann man sie daher nach den $\alpha_p(\xi)$ auflösen und erhält die Lösungen in der Gestalt

$$\alpha_p(\xi) = \sum_{q=1}^{k} c_{pq}\, \psi_q(\xi).$$

Trägt man dieses in (47) ein, so erhält man

$$R(x, \xi) = \sum_{p,q} c_{pq}\, \psi_p(x)\, \psi_q(\xi) \qquad (a < x,\ \xi < b). \tag{49}$$

Hierin ist die rechte Seite sogar für $a \leqq x,\ \xi \leqq b$ stetig, und auf Grund von (45) auch die linke Seite. Daher gilt (48) sogar für $a \leqq x,\ \xi \leqq b$.

Nun sind noch die c_{pq} zu bestimmen. Jedes ψ_p ist Lösung der aus

$$F(y) = \lambda_0 G(y) \text{ und } (2)$$

bestehenden homogenen Randwertaufgabe und somit auch Lösung der aus

$$F(y) = \lambda G(y) + (\lambda_0 - \lambda) G(\psi_p) \text{ und } (2)$$

bestehenden unhomogenen Randwertaufgabe. Daher ist

$$\psi_p(x) = \int_a^b \Gamma(x, \xi, \lambda) \cdot (\lambda_0 - \lambda)\, G_\xi(\psi_p)\, d\xi, \tag{50}$$

wobei G_ξ andeuten soll, daß hier ξ als Differentiationsveränderliche anzusehen ist. Weiter ist

$$R(x, \xi) = \lim_{\lambda \to \lambda_0} (\lambda - \lambda_0)\, \Gamma(x, \xi, \lambda)$$

und nach (46) kann man hierin auch $(2m - 2)$-mal nach x oder nach ξ differenzieren. Nach (49) ist also

$$\sum_{p,q} c_{pq}\, \psi_p(x)\, \psi_q^{(\nu)}(\xi) = \lim_{\lambda \to \lambda_0} (\lambda - \lambda_0)\, \Gamma_\xi^{(\nu)}(x, \xi, \lambda) \qquad (\nu \leqq 2m - 2),$$

wobei die Ableitungen in bezug auf ξ gebildet sind. Daher ist auch für jedes $1 \leqq r \leqq k$

$$\sum_{p,q} c_{pq}\, \psi_p(x)\, \psi_r(\xi)\, G_\xi(\psi_q) = \lim_{\lambda \to \lambda_0} (\lambda - \lambda_0)\, G_\xi\big(\Gamma(x, \xi, \lambda)\big)\, \psi_r(\xi),$$

und weiter

$$\begin{aligned}
&\sum_{p,q} c_{pq}\, \psi_p(x) \int_a^b \psi_r(\xi)\, G_\xi(\psi_q)\, d\xi \\
&\quad = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_a^b (\lambda - \lambda_0)\, \psi_r(\xi)\, G_\xi\big(\Gamma(x, \xi, \lambda)\big)\, d\xi \\
&\quad = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_a^b \Gamma(x, \xi, \lambda) \cdot (\lambda - \lambda_0)\, G_\xi(\psi_r)\, d\xi \quad [13] \\
&\quad = -\psi_r(x),
\end{aligned}$$

letzteres nach (50). Wegen der Orthogonalitätsbeziehung zwischen den ψ_p ist also

$$\sum_{p=1}^{k} c_{pr}\, \psi_p(x) \int_a^b \psi_r(\xi)\, G_\xi(\psi_r)\, d\xi = -\psi_r(x)$$

und daher wegen der linearen Unabhängigkeit der ψ_p

$$c_{pr} = 0 \quad \text{für} \quad p \neq r \quad \text{und} \quad c_{rr} \int_a^b \psi_r(\xi)\, G_\xi(\psi_r)\, d\xi = -1.$$

Damit ergibt sich aber aus (49) die Behauptung.

Zusatz. Wird mit den Bezeichnungen von Satz 7

$$\Gamma_0(x, \xi, \lambda) = \Gamma(x, \xi, \lambda) - \frac{R(x, \xi)}{\lambda - \lambda_0}$$

gesetzt, so ist in einer gewissen Umgebung $|\lambda - \lambda_0| < \varrho$ von λ_0

$$\Gamma_0(x, \xi, \lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} h_\nu(x, \xi)\, (\lambda - \lambda_0)^\nu, \tag{51}$$

und die Reihe ist gliedweise $(2m-2)$-mal nach x (oder auch nach ξ) differenzierbar. Die entstehenden Ableitungen der $h_\nu(x, \xi)$ sind in dem Bereich

[13]) Für den Übergang zu dieser Zeile ist § 1, III. anzuwenden. Zwar sind die Voraussetzungen von III. nicht ganz erfüllt, aber, um III. auf G anzuwenden, brauchen offenbar die Funktionen u, v nur $2n$-mal stetig differenzierbar zu sein und nur diejenigen Randbedingungen zu erfüllen, die entstehen, wenn man die in (2) etwa vorkommenden Ableitungen der $(2m-1)$-ten Ordnung eliminiert, soweit das möglich ist, und die ein oder zwei Randbedingungen, aus denen sie nicht eliminiert werden können, fortläßt. Da Γ $(2m-2)$-mal stetig differenzierbar nach x ist und die Randbedingungen (2) erfüllt, ist also auch hier noch III. anwendbar.

$a \leqq x, \xi \leqq b$ stetig und die aus (51) durch gliedweise Differentiation entstehenden Reihen konvergieren gleichmäßig in einem Bereich

$$|\lambda - \lambda_0| < \varrho;\ a \leqq x,\ \xi \leqq b.$$

$\Gamma_0(x, \xi, \lambda)$ ist also $(2m-2)$-mal nach x differenzierbar und die Ableitungen sind in dem obigen Bereich stetige Funktionen von x, ξ, λ.

Die Darstellung (51) folgt nämlich aus (31). Aus der Integraldarstellung (32) der h_ν für $\nu \geqq 0$ ergibt sich, da $\Gamma(x, \xi, \lambda)$ $(2m-2)$-mal stetig nach x differenzierbar ist und da die Ableitungen stetige Funktionen von x, ξ, λ sind, die Behauptung über die Differenzierbarkeit der h_ν und weiter eine Abschätzung der Ableitungen, aus der sich dann die Behauptung über die differenzierten Reihen (51) ergibt.

(Eingegangen am 28. November 1939.)

Über die definiten selbstadjungierten Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen. III.

Herrn Oskar Perron zum 60. Geburtstag am 7. Mai 1940 gewidmet.

Von

E. Kamke in Tübingen.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 251
1. Hilfssätze 253
2. Die Existenz unendlich vieler Eigenwerte und eines vollständigen normierten Orthogonalsystems von Eigenfunktionen 257
3. Bemerkungen über die Vorzeichen der Eigenwerte 266
4. Über Reihen, die nach Eigenfunktionen fortschreiten 268
5. Die Abgeschlossenheit der Eigenwertaufgabe 276
6. Festlegung und Abschätzung der Eigenwerte nach Courant . . . 280
7. Genäherte Berechnung der Eigenwerte nach Ritz-Galerkin . . . 282
8. Das Iterationsverfahren 283

Einleitung.

In dieser Arbeit handelt es sich wie in K II[1]) um die Eigenwertaufgabe, die aus der Differentialgleichung

(1) $$F(y) = \lambda G(y)$$

und den Randbedingungen

(2) $$U_\mu(y) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, 2m)$$

besteht. Dabei ist

(3) $$F(y) = \sum_{\nu=0}^{m} (f_\nu y^{(\nu)})^{(\nu)}, \quad G(y) = \sum_{\nu=0}^{n} (g_\nu y^{(\nu)})^{(\nu)},$$

die $f_\nu = f_\nu(x)$ und $g_\nu = g_\nu(x)$ sind im Intervall $a \leqq x \leqq b$ gegebene reelle, ν-mal stetig differenzierbare Funktionen, ferner ist $f_m \neq 0, g_n \not\equiv 0, 0 \leqq n < m$. Die

(4) $$U_\mu(y) = \sum_{\varkappa=0}^{2m-1} [\alpha_{\mu\varkappa} y^{(\varkappa)}(a) + \beta_{\mu\varkappa} y^{(\varkappa)}(b)]$$

sind gegebene Linearformen in den $y^{(\varkappa)}(a)$, $y^{(\varkappa)}(b)$ mit reellen Koeffizienten $\alpha_{\mu\varkappa}$, $\beta_{\mu\varkappa}$ und voneinander linear unabhängig.

[1]) Mit K I [für einige Berichtigungen s. Fußnote [36]) auf S. 280] und K II werden die vorangehenden Teile bezeichnet, die in der Math. Zeitschr. **45** (1939), S. 759—787 und **46** (1940), S. 231—250 erschienen sind. Für die Problemstellung vgl. auch die Einleitung zu K II.

Über diese Aufgabe wird im folgenden durchweg vorausgesetzt: Erstens soll die Aufgabe *selbstadjungiert* sein[2]). Zweitens soll sie *definit* in dem Sinne sein, daß für jede zulässige Funktion[3]) $u(x)$

(5)[4]) $$\int u F(u)\, dx \geqq 0$$

ist und außerdem für diejenigen zulässigen Funktionen $u \not\equiv 0$, für die in (5) etwa das Gleichheitszeichen gilt,

(6) $$\int u G(u)\, dx \neq 0$$

ist, und zwar soll dann $\int u G(u)\, dx$ für alle diese u ein festes Vorzeichen haben. Bisweilen wird sogar verlangt werden, daß die Aufgabe *eigentlich definit* oder *im engeren Sinne definit* ist; das soll heißen, daß für jede zulässige Funktion $u \not\equiv 0$ sogar

(7) $$\int u F(u)\, dx > 0$$

ist[5]).

---

[2]) Vgl. hierzu die Einleitung von K II.

[3]) Unter einer *zulässigen Funktion* wird wie in K II eine Funktion $u(x)$ verstanden, die in $a \leqq x \leqq b$ $2m$-mal stetig differenzierbar ist und die Randbedingungen (2) erfüllt.

[4]) In dieser Arbeit ist durchweg $\int = \int_a^b$ zu setzen.

[5]) Um zu entscheiden, ob eine speziell gegebene Aufgabe (1), (2) definit ist, dafür wird man in erster Linie die Dirichletsche Formel

(*) $$\int u F(u)\, dx = \sum_{\nu=0}^{m} \int (-1)^\nu f_\nu [u^{(\nu)}]^2 + [R(u)]_a^b$$

mit

$$R(u) = \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{p+q=\nu-1} (-1)^p (f_\nu u^{(p)})^{(q)} u^{(p)}$$

heranziehen. Sind alle $(-1)^\nu f_\nu \geqq 0$ im ganzen Intervall $\langle a, b\rangle$ und ist

$$[R(u)]_a^b \geqq 0$$

für alle Zahlensysteme $u(a), u'(a), \ldots, u^{(2m-1)}(a), u(b), \ldots, u^{(2m-1)}(b)$, welche die Randbedingungen (2) erfüllen, so ist (5) erfüllt. Da nun $(-1)^n f_n > 0$ im ganzen Intervall $\langle a, b\rangle$ ist, kann in (5) das Gleichheitszeichen nur dann gelten, wenn $u^{(m)} = 0$, d. h. wenn u ein Polynom vom Grad $\leqq m-1$ ist. Man hat dann also nur noch zu untersuchen, ob es unter diesen Polynomen zulässige Funktionen gibt und ob, wenn es solche gibt, für diese die Ungleichung (6) erfüllt ist und die linke Seite ein festes Vorzeichen hat. — Sind z. B. die f_ν und g_ν periodische Funktionen mit der Periode $b-a$ und sind als Randbedingungen die Randbedingungen der Periodizität

$$y^{(\mu)}(a) = y^{(\mu)}(b) \qquad (\mu = 0, \ldots, 2m-1)$$

gegeben, so ist $[R(u)]_a^b = 0$. Sind alle $(-1)^\nu f_\nu \geqq 0$, so ist daher (5) erfüllt, und das Gleichheitszeichen kann höchstens für ein Polynom $(m-1)$-ten Grades gelten, das die Randbedingungen erfüllt, d. h. höchstens für $u = \text{const.} \neq 0$. Ist $f_0 \not\equiv 0$, so ist das, wie (*) zeigt, nicht möglich. Ist dagegen $f_0 \equiv 0$, so muß noch untersucht werden, ob (6) für $u = \text{const.} \neq 0$ erfüllt ist. Das ist offenbar genau dann der Fall, wenn $\int g_0\, dx \neq 0$ ist.

Die selbstadjungierten definiten Eigenwertaufgaben (1), (2) sind nach K II, Satz 2 normal, für sie gelten also die in K II hergeleiteten Sätze. Insbesondere sind alle Eigenwerte reell, es gibt höchstens abzählbar viele Eigenwerte, und sie haben keinen im Endlichen gelegenen Häufungspunkt. Die Frage, ob es überhaupt Eigenwerte gibt, war in K II offengelassen worden.

In dieser Arbeit wird nun (§ 2) bewiesen werden, daß es unendlich viele Eigenwerte gibt. Der Beweis beruht auf dem Einfangen immer weiterer Eigenwerte durch einen Ausdruck Rayleighscher Art. Das ist ein Verfahren, das auch bisher schon zu Existenzbeweisen dieser Art benutzt worden ist, jedoch wurde dabei bisher immer eine „Minimalfolge" verwendet[6]), während hier keine solche Folge benutzt wird. Die Anregung zu diesem Beweisgang verdanke ich dem Bericht von L. Collatz[7]).

Der Beweis führt weiter zu der Festlegung der Eigenwerte durch ein Variationsprinzip der üblichen Art. In einigen Fällen läßt sich aussagen, daß es sowohl unendlich viele positive als auch unendlich viele negative Eigenwerte gibt (§ 3). Weiter gelten Sätze der üblichen Art über die Konvergenz von Reihen, die nach Eigenfunktionen fortschreiten, sowie für abgeschlossene Eigenwertaufgaben ein Entwicklungssatz. Der Begriff der Abgeschlossenheit wird in § 5 näher erörtert mit dem Ziele, der Bedingung eine solche Form zu geben, daß man bei konkret gegebenen Aufgaben die Möglichkeit hat, die Frage nach der Abgeschlossenheit zu entscheiden. Die Frage nach der Gültigkeit allgemeinerer Entwicklungssätze als des in § 4 abgeleiteten wird offengelassen.

Für die praktische Berechnung von Eigenwerten sind Abschätzungen von Courant, das Näherungsverfahren von Ritz-Galerkin und das Iterationsverfahren nützlich. Auch diese Dinge lassen sich auf die allgemeine Aufgabe (1), (2) übertragen (§ 6 bis 8).

§ 1.

Hilfssätze.

Nach K II, § 1, III. gilt

I. $$\int u\,F(v)\,dx = \int v\,F(u)\,dx, \quad \int u\,G(v)\,dx = \int v\,G(u)\,dx$$

für zulässige Funktionen $u(x)$, $v(x)$.

Hiervon wird im folgenden häufig Gebrauch gemacht, ohne daß jedesmal besonders darauf hingewiesen wird.

---

[6]) Vgl. hierzu das Beweisverfahren in K I sowie die dort angegebene Literatur.

[7]) Zeitschr. f. angewandte Mathematik u. Mechanik 19 (1939), S. 224ff., insbesondere S. 227f.

Wird für zulässige Funktionen $u(x)$, $v(x)$

$$\begin{cases} J(u) = \int u\,F(u)\,dx, & J(u,v) = \int u\,F(v)\,dx \\ K(u) = \int u\,G(u)\,dx, & K(u,v) = \int u\,G(v)\,dx \end{cases} \tag{8}$$

gesetzt, so ist also nach I.

$$J(u,v) = J(v,u), \quad K(u,v) = K(v,u). \tag{9}$$

II. Ist für eine zulässige Funktion $u(x) \not\equiv 0$

$$J(u) = 0, \tag{10}$$

so ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert der Aufgabe (1), (2) und $u(x)$ eine zu diesem gehörige Eigenfunktion.

Beweis. Ist $v(x)$ eine beliebige zulässige Funktion, so ist für beliebiges ε auch $u + \varepsilon v$ eine zulässige Funktion, also

$$J(u + \varepsilon v) \geqq 0,$$

das ist nach (8), I. und (10)

$$2\,\varepsilon\,J(u,v) + \varepsilon^2\,J(v) \geqq 0,$$

und zwar für beliebiges ε. Da $|\varepsilon|$ beliebig klein und das Vorzeichen von ε beliebig gewählt werden kann, folgt hieraus

$$J(u,v) = 0, \quad \text{d. h.} \quad \int v\,F(u)\,dx = 0,$$

und zwar für beliebige zulässige Funktionen v. Daher ist $F(u) = 0$. Da u nach Voraussetzung die Randbedingungen (2) erfüllt, ist hiermit die Behauptung bewiesen.

Hiermit ergibt sich, daß man die im engeren Sinne definiten Eigenwertaufgaben auch in folgender Weise charakterisieren kann:

III. Eine selbstadjungierte definite Eigenwertaufgabe (1), (2) ist genau dann im engeren Sinne definit, wenn $\lambda = 0$ kein Eigenwert ist.

Denn ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert und $\psi(x)$ eine zugehörige Eigenfunktion, so ist $F(\psi) = 0$, also $J(\psi) = 0$ und $\psi \not\equiv 0$, also die Aufgabe nicht im engeren Sinne definit. Ist umgekehrt $J(u) = 0$ für eine zulässige Funktion $u(x) \not\equiv 0$, so ist $\lambda = 0$ nach II. ein Eigenwert.

IV. Es gibt zulässige Funktionen $u(x)$, für die $K(u) \neq 0$ ist.

Beweis. Wäre die Behauptung falsch, d. h. wäre $K(u) = 0$ für jede zulässige Funktion, so wäre für eine beliebige zulässige Funktion v, da dann auch $u + v$ eine zulässige Funktion ist,

$$0 = K(u+v) = K(u) + 2\,K(u,v) + K(v) = 2\,K(u,v),$$

d. h.

$$\int v\,G(u)\,dx = 0,$$

und zwar für beliebige zulässige Funktionen v, also $G(u) = 0$, und zwar für jede zulässige Funktion u. Das ist aber sicher nicht der Fall; denn, da nach den in der Einleitung genannten Voraussetzungen $g_n \not\equiv 0$ ist, gibt es im Innern von $\langle a, b\rangle$ ein Intervall $\langle \alpha, \beta\rangle$, in dem $g_n(x) \neq 0$ ist, also gibt es eine in $\langle \alpha, \beta\rangle$ $2m$-mal stetig differenzierbare Funktion $u_0(x)$, für die $G(u_0) \not\equiv 0$ in $\langle \alpha, \beta\rangle$ ist. Diese in $\langle \alpha, \beta\rangle$ definierte Funktion u_0 kann zu einer in $\langle a, b\rangle$ $2m$-mal stetig differenzierbaren Funktion u_0 ergänzt werden, die nebst ihren $2m$ ersten Ableitungen in den Punkten a und b den Wert 0 hat; sie ist somit eine zulässige Funktion, für die $G(u_0) \not\equiv 0$ ist.

V.[8]) Es seien $\psi_1(x), \ldots, \psi_k(x)$ Eigenfunktionen der Aufgabe (1), (2) und zueinander orthogonal, d. h.

$$K(\psi_p, \psi_q) = 0 \quad \text{für} \quad p \neq q. \tag{11}$$

Dann gibt es zulässige Funktionen $u(x)$, so daß

$$K(u) \neq 0 \quad \text{und} \quad K(u, \psi_p) = 0 \quad \text{für} \quad p = 1, \ldots, k \tag{12}$$

ist.

Beweis. Es sei $u_0(x)$ eine zulässige Funktion. Mit beliebigen Zahlen ϱ_p wird

$$u(x) = u_0 + \sum_{p=1}^{k} \varrho_p \psi_p \tag{13}$$

gesetzt. Wegen (11) ist dann

$$\begin{aligned} K(u, \psi_p) &= K(u_0, \psi_p) + \sum_{q=1}^{k} \varrho_q K(\psi_q, \psi_p) \\ &= K(u_0, \psi_p) + \varrho_p K(\psi_p). \end{aligned}$$

Da die Aufgabe definit und somit normal ist, gilt (vgl. K II, § 2, (18)) $K(\psi_p) \neq 0$. Man kann also die ϱ_p so bestimmen, daß die letzten k Gleichungen von (12) erfüllt sind, und zwar ist das der Fall für

$$\varrho_p = -\frac{K(u_0, \psi_p)}{K(\psi_p)}. \tag{14}$$

Weiter ist nach (13), (11), (14)

$$\begin{aligned} K(u) &= K(u_0) + 2\sum_{p} \varrho_p K(u_0, \psi_p) + \sum_{p,q} \varrho_p \varrho_q K(\psi_p, \psi_q) \\ &= K(u_0) - \sum_{p} \varrho_p^2 K(\psi_p) \\ &= K(u_0) - \sum_{p=1}^{k} \frac{K^2(u_0, \psi_p)}{K(\psi_p)}. \end{aligned} \tag{15}$$

Es braucht somit nur noch bewiesen zu werden, daß hierin die rechte Seite $\neq 0$ ist, wenn u_0 passend gewählt wird.

---

[8]) Die folgenden Hilfssätze werden erst für Satz 3 benötigt.

Angenommen, die rechte Seite von (15) habe für jedes zulässige u_0 den Wert 0, d. h. für jedes zulässige u_0 sei

$$K(u_0) = \sum_{p=1}^{k} \frac{K^2(u_0, \psi_p)}{K(\psi_p)}.$$

Dann bestände diese Gleichung auch, wenn u_0 durch $u_0 + v$ ersetzt wird, wo $v(x)$ eine beliebige zulässige Funktion ist, d. h. es wäre

$$K(u_0) + 2K(u_0, v) + K(v)$$
$$= \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{K(\psi_p)} [K^2(u_0, \psi_p) + 2K(u_0, \psi_p) K(v, \psi_p) + K^2(v, \psi_p)],$$

also wäre, da die obige Gleichung auch für v statt u_0 bestände,

$$K(u_0, v) = \sum_{p=1}^{k} \frac{K(u_0, \psi_p) K(v, \psi_p)}{K(\psi_p)}$$

oder

$$\int v G(u_0 - \Sigma c_p \psi_p) dx = 0$$

mit

$$c_p = \frac{K(u_0, \psi_p)}{K(\psi_p)}.$$

Da $v(x)$ beliebig ist, wäre

$$G(u_0 - \Sigma c_p \psi_p) = 0,$$

und zwar für jede zulässige Funktion u_0. Nun ist $g_n \neq 0$ in einem Intervall $\langle \alpha, \beta \rangle$, das im Innern von $\langle a, b \rangle$ liegt. Da sich jede Funktion u_0, die in $\langle \alpha, \beta \rangle$ $2m$-mal stetig differenzierbar ist, zu einer zulässigen Funktion, nämlich sogar zu einer Funktion u_0 ergänzen läßt, die in $\langle a, b \rangle$ $2m$-mal stetig differenzierbar ist und nebst ihren $2m$ ersten Ableitungen in den Punkten a und b verschwindet, müßte also jede in $\langle \alpha, \beta \rangle$ $2m$-mal stetig differenzierbare Funktion u_0 sich als lineare Komposition der ψ_p und eines Hauptsystems von Lösungen der Gleichung $G(y) = 0$ darstellen lassen. Da das jedoch nicht zutrifft, ist der gewünschte Widerspruch erreicht und der Hilfssatz vollständig bewiesen.

VI. Es seien wieder die Voraussetzungen von V. erfüllt. Ferner sei $u(x)$ eine zulässige Funktion, für die (12) und mit einer gewissen Zahl c

$$F(u) \neq c G(u) \tag{16}$$

gilt. Dann gibt es eine zulässige Funktion $v(x)$, für die

$$J(u, v) \neq c K(u, v) \quad \text{und} \quad K(v, \psi_p) = 0 \quad \text{für} \quad p = 1, \ldots, k \tag{17}$$

gilt.

Beweis. Für eine beliebige zulässige Funktion $v_0(x)$ wird

$$v(x) = v_0 + \sum_{p=1}^{k} \varrho_p \psi_p \quad \text{mit} \quad \varrho_p = -\frac{K(v_0, \psi_p)}{K(\psi_p)}$$

gesetzt. Nach dem Anfang des Beweises zu V. sind dann die k letzten Gleichungen von (17) erfüllt. Nach (16) gibt es im Innern von $\langle a, b\rangle$ eine Stelle x_0 und somit eine Umgebung (α, β) dieser Stelle, so daß

$$F(u) - c\,G(u) \neq 0 \quad \text{für} \quad \alpha < x < \beta$$

ist, also dort ein festes Vorzeichen hat. Es wird nun als v_0 eine Funktion gewählt, die in $\langle a, b\rangle$ $2m$-mal stetig differenzierbar, > 0 für $\alpha < x < \beta$ ist und sonst den Wert 0 hat. Dieses v_0 ist dann eine zulässige Funktion, und es ist

$$J(u, v_0) - c\,K(u, v_0) = \int_\alpha^\beta v_0\,[F(u) - c\,G(u)]\,dx \neq 0. \tag{18}$$

Für das zugehörige v ist

$$J(u, v) - c\,K(u, v) = J(u, v_0) - c\,K(u, v_0) + S \tag{19}$$

mit

$$S = \sum_{p=1}^{k} \varrho_p\,[J(u, \psi_p) - c\,K(u, \psi_p)].$$

Nach (12) ist hierin $K(u, \psi_p) = 0$. Ist λ_p der zu ψ_p gehörige Eigenwert, so ist

$$J(u, \psi_p) = \int u\,F(\psi_p)\,dx = \lambda_p \int u\,G(\psi_p)\,dx = 0$$

wieder nach (12). Daher ist $S = 0$. Aus (18) und (19) folgt somit, daß auch der erste Teil von (17) erfüllt ist.

§ 2.

Die Existenz unendlich vieler Eigenwerte und eines vollständigen normierten Orthogonalsystems von Eigenfunktionen.

Satz 1. *Ist $u(x)$ eine zulässige Funktion der Eigenwertaufgabe* (1), (2) *von der Art, daß*

$$\int u\,G(u)\,dx \neq 0 \tag{20}$$

ist[9]*, so gibt es zwischen* 0 *und*

$$\varrho = \frac{\int u\,F(u)\,dx}{\int u\,G(u)\,dx} \tag{21}$$

(beide Grenzen eingeschlossen) mindestens einen Eigenwert.

Beweis. Ist $\varrho = 0$, so ist $J(u) = 0$, also 0 nach II. ein Eigenwert und daher die Behauptung richtig. Weiterhin sei daher $\varrho \neq 0$, und zwar zunächst $\varrho > 0$, d. h. $K(u) > 0$.

Es wird

$$\eta(x) = F(u) - \varrho\,G(u) \tag{22}$$

[9]) Nach IV. gibt es solche Funktionen u.

gesetzt. Ist $\eta(x) \equiv 0$, so ist ϱ ein Eigenwert und die Behauptung ebenfalls richtig. Für den weiteren Beweis kann daher $\eta \not\equiv 0$ angenommen werden.

Dann hat die Randwertaufgabe

$$F(v) - \lambda G(v) = \eta(x), \quad U_\mu(v) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, 2m) \tag{23}$$

für jedes λ, das kein Eigenwert ist, genau eine Lösung $v = v(x, \lambda)$, diese ist $\not\equiv 0$ und hängt, wie sich aus ihrer Darstellung

$$v(x, \lambda) = \int \Gamma(x, \xi, \lambda)\, \eta(\xi)\, d\xi \tag{24}$$

mittels der Greenschen Resolvente [10]) ergibt, von diesen λ stetig ab; ferner ist

$$v(x, \varrho) = u(x).$$

Wird für die genannten λ

$$h(\lambda) = J(v) - \lambda K(v) = \int v \eta\, dx \tag{25}$$

gesetzt, so ist für je zwei solche λ_1, λ_2 und $v_\nu = v(x, \lambda_\nu)$ nach (23) und I.

$$\begin{aligned} h(\lambda_2) - h(\lambda_1) &= \int (v_2 - v_1)\, \eta\, dx \\ &= \int [v_2 F(v_1) - v_1 F(v_2)]\, dx + \lambda_2 \int v_1 G(v_2) dx - \lambda_1 \int v_2 G(v_1)\, dx \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1) \int v_2\, G(v_1)\, dx, \end{aligned}$$

also

$$h'(\lambda) = K(v) \tag{26}$$

für jedes λ, das kein Eigenwert ist.

Nach (25) und (21) ist

$$h(\varrho) = J(u) - \varrho\, K(u) = 0.$$

Da $K(u) > 0$ und somit $h'(\varrho) > 0$ ist, nimmt $h(\lambda)$ an der Stelle $\lambda = \varrho$ nach links ab und hat in einer gewissen linksseitigen Umgebung dieser Stelle negative Werte. Da $J(v) \geqq 0$ ist, folgt für solche λ weiter aus

$$h(\lambda) = J(v) - \lambda K(v) < 0 \qquad (0 \leqq \lambda < \varrho),$$

daß wieder $K(v) > 0$, also $h'(\lambda) > 0$ ist und somit $h(\lambda)$ nach links hin noch weiter abnimmt.

Wäre das ganze Intervall $0 \leqq \lambda \leqq \varrho$ frei von Eigenwerten, so müßte daher $h(0) < 0$ sein, während sich aus (25) $h(0) = J(v) \geqq 0$ ergibt. Damit ist der Satz für $\varrho > 0$ bewiesen. Der noch übrigbleibende Fall $\varrho < 0$ wird auf den eben behandelten zurückgeführt, indem man λ, G in der Aufgabe (1), (2) durch $-\lambda$, $-G$ ersetzt. Die Aufgabe geht dadurch in sich über, während negative λ, ϱ in positive λ, ϱ übergehen.

---

[10]) Vgl. hierzu K II, § 1, I und II.

Satz 2. (A). *Die Aufgabe* (1), (2) *sei sogar im engeren Sinne definit. Gibt es zulässige Funktionen* $u(x)$, *für die* $\int u\,G(u)\,dx > 0$ *ist, so existiert*

$$\lambda_1 = \operatorname*{Min}_u \frac{\int u\,F(u)\,dx}{\int u\,G(u)\,dx}, \tag{27}$$

wenn hierin alle zulässigen Funktionen betrachtet werden, für die der Nenner positiv ist, und λ_1 *ist der kleinste positive Eigenwert. Gibt es zulässige Funktionen* u, *für die* $\int u\,G(u)\,dx < 0$ *ist, so existiert*

$$\lambda_{-1} = \operatorname*{Max}_u \frac{\int u\,F(u)\,dx}{\int u\,G(u)\,dx}, \tag{28}$$

wenn hierbei alle zulässigen Funktionen betrachtet werden, für die der Nenner negativ ist, und λ_{-1} *ist der größte negative Eigenwert.*

(B). *Ist die Aufgabe zwar definit, aber nicht im engeren Sinne definit, d. h. ist* $\lambda = 0$ *ein Eigenwert, so wird dieser ebenfalls durch* (27) *oder* (28) *geliefert, und zwar durch den ersten oder zweiten dieser Ausdrücke, je nachdem* $\int u\,G(u)\,dx$ *positiv oder negativ für diejenigen* u *ist, für die* $\int u\,F(u)\,dx = 0$ *gilt* [11]).

Beweis. Sind λ_1, λ_{-1} der kleinste positive bzw. der größte negative Eigenwert, so ist nach Satz 1 für zulässige Funktionen u der obengenannten Art

$$0 < \lambda_1 \leqq \frac{J(u)}{K(u)} \quad \text{bzw.} \quad 0 > \lambda_{-1} \geqq \frac{J(u)}{K(u)}.$$

Ist $\psi_{\pm 1}(x)$ eine zu $\lambda_{\pm 1}$ gehörige Eigenfunktion, so ist

$$F(\psi_{\pm 1}) = \lambda_{\pm 1}\,G(\psi_{\pm 1}),$$

also

$$J(\psi_{\pm 1}) = \lambda_{\pm 1}\,K(\psi_{\pm 1}).$$

Hieraus folgt, daß die Extremwerte (27), (28) für $u = \psi_{\pm 1}$ angenommen werden und $\lambda_{\pm 1}$ sind. Damit ist (A) bewiesen. (B) ist unmittelbar klar.

Definition 1. Ist λ^* ein Eigenwert, so wird

$$\operatorname{Sgn}\lambda^* = \frac{\int \psi^*\,G(\psi^*)\,dx}{\left|\int \psi^*\,G(\psi^*)\,dx\right|} = \operatorname{sgn} K(\psi^*) \tag{29}$$

gesetzt, wo ψ^* eine zu λ^* gehörige Eigenfunktion bedeutet. $\operatorname{Sgn}\lambda^*$ ist von der speziell gewählten Eigenfunktion unabhängig, und für $\lambda^* \neq 0$ ist auch

$$\operatorname{Sgn}\lambda^* = \frac{\lambda^*}{|\lambda^*|} = \operatorname{sgn}\lambda^*. \tag{30}$$

Denn es ist

$$J(\psi^*) = \lambda^*\,K(\psi^*).$$

[11]) Vgl. hierzu die Definition auf S. 252.

Ist $\lambda^* \neq 0$, so ist nach II. $J(\psi^*) \neq 0$, also > 0; es haben somit λ^* und $K(\psi^*)$ dasselbe Vorzeichen. Daraus folgt, daß das Vorzeichen von $K(\psi^*)$ von der speziell gewählten Funktion ψ^* unabhängig ist und daß (29) und (30) dasselbe besagen. Ist $\lambda^* = 0$, so hat $K(\psi^*)$ nach der Definition auf S. 252 für alle zugehörigen Eigenfunktionen ebenfalls ein festes Vorzeichen, d. h. die rechte Seite von (29) ist wieder von der speziell gewählten Eigenfunktion unabhängig, während (30) jetzt seinen Sinn verliert.

Mit der eben eingeführten Bezeichnung läßt sich der grundlegende Existenzsatz nun folgendermaßen formulieren:

Satz 3. (a) *Zu der selbstadjungierten und definiten Eigenwertaufgabe* (1), (2) *gibt es unendlich viele Eigenwerte; sie lassen sich in einer Folge*

$$\cdots \leqq \lambda_{-2} \leqq \lambda_{-1} < \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots \tag{31}$$

anordnen, bei der

$$\operatorname{Sgn} \lambda_p = \operatorname{sgn} p \tag{32}$$

und jeder Eigenwert in seiner Vielfachheit aufgeführt ist. Die Folge bricht höchstens nach einer Seite ab, und es ist $\lambda_{\mp p} \to \mp \infty$ *für* $p \to \infty$.

(b) *Zu der Folge* (31) *gibt es ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem*[12]) *von Eigenfunktionen*

$$\ldots, \psi_{-2}(x), \psi_{-1}(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \ldots \tag{33}$$

für das

$$\int \psi_p G(\psi_q)\, dx = e_{pq} \cdot \operatorname{Sgn} \lambda_p \tag{34}$$

gilt.

(c) *Ist die Aufgabe eigentlich definit, so gilt für die ersten Eigenwerte* $\lambda_{\pm 1}$ *der Satz* 2. *Ist* $\psi_1, \ldots, \psi_{p-1}$ *ein zu den Eigenwerten* $\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}$ *gehöriges Orthogonalsystem von Eigenfunktionen, so existiert*

$$\lambda_p = \operatorname*{Min}_u \frac{\int u F(u)\, dx}{\int u G(u)\, dx} \tag{35}$$

und ist der nächste positive Eigenwert, wenn nur solche zulässigen Funktionen $u(x)$ *betrachtet werden, für die*

$$\int u G(u)\, dx > 0 \quad \text{und} \quad \int u G(\psi_\nu)\, dx = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, p-1) \tag{36}$$

ist. Ist $\psi_{-1}, \ldots, \psi_{-(p-1)}$ *ein zu* $\lambda_{-1}, \ldots, \lambda_{-(p-1)}$ *gehöriges Orthogonalsystem von Eigenfunktionen, so existiert*

$$\lambda_{-p} = \operatorname*{Max}_u \frac{\int u F(u)\, dx}{\int u G(u)\, dx} \tag{37}$$

---

[12]) Vgl. hierzu K II, Satz 4.

und ist der nächste negative Eigenwert, wenn nur solche zulässigen Funktionen $u(x)$ betrachtet werden, für die

(38) $\int u\,G(u)\,dx < 0$ *und* $\int u\,G(\psi_\nu)\,dx = 0$ $(\nu = -1, \ldots, -(p-1))$ *ist.*

(d) *Ist die Aufgabe nicht im engeren Sinne definit, d. h. ist 0 ein Eigenwert, so gilt für $\lambda_1 = 0$ oder $\lambda_{-1} = 0$ der letzte Teil des Satzes 2, je nachdem* Sgn $0 = +1$ *oder $= -1$ ist. Im ersten Falle gilt für die λ_p mit positivem Index* (35) *mit* (36) *unverändert, während für die λ_p mit negativem Index (einschließlich $p = -1$)* (37) *mit der Nebenbedingung* (38) *bei der Änderung gilt, daß ν die Zahlen $k_1, \ldots, 1, -1, \ldots, -(p-1)$ durchlaufen soll, wo k_1 die Vielfachheit des Eigenwerts 0 ist. Im zweiten Falle gilt* (37) *mit der Nebenbedingung* (38) *unverändert, während für die λ_p mit positivem Index (einschließlich $p = 1$)* (35) *mit der Nebenbedingung* (36) *bei der Änderung gilt, daß ν die Zahlen $-k_{-1}, \ldots, -1, 1, \ldots, p-1$ durchlaufen soll, wo k_{-1} die Vielfachheit des Eigenwerts 0 ist.*

Beweis. Zunächst wird vorausgesetzt, daß die Eigenwertaufgabe im engeren Sinne definit ist, und es werden die positiven Eigenwerte behandelt.

Erster Schritt. Gibt es zulässige Funktionen $u(x)$, für die $K(u) > 0$ ist — das trifft sicher zu, wenn es positive Eigenwerte gibt —, so gibt es nach Satz 2 einen kleinsten positiven Eigenwert λ_1, und man erhält ihn durch (27).

Zweiter Schritt. Ist dieser Eigenwert ein mehrfacher, etwa ein k_1-facher, so ist $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{k_1}$ zu setzen. Es gibt dann (vgl. K II, Satz 4) ein System von k_1 zueinander orthogonalen Eigenfunktionen $\psi_1(x), \ldots, \psi_{k_1}(x)$, für die also

$$K(\psi_r, \psi_s) = 0 \qquad (r \neq s)$$

gilt. Man sieht nun leicht, daß die Behauptung (c) jedenfalls für $1 < p \leqq k_1$ richtig ist. Denn ist $u(x)$ für ein derartiges p eine zulässige Funktion, die (36) erfüllt, so ist nach Satz 1

$$\lambda_p = \lambda_1 \leqq \frac{J(u)}{K(u)}.$$

Da

$$F(\psi_p) = \lambda_p G(\psi_p), \quad \text{also} \quad \lambda_p = \frac{J(\psi_p)}{K(\psi_p)}$$

ist, sieht man, daß (35) für diese p richtig ist.

Dritter Schritt. (A). Nach § 1, V. gibt es zulässige Funktionen $u(x)$, die zu $\psi_1, \ldots, \psi_{k_1}$ orthogonal sind und für die $K(u) \neq 0$ ist. Gibt es unter diesen Funktionen u solche, für die $K(u) > 0$ ist — das trifft sicher zu, wenn es noch weitere positive Eigenwerte gibt —, so ist für diese u (36) mit $p = k_1 + 1$ erfüllt. Wird für eine solche Funktion $u(x)$

$$\varrho = \frac{J(u)}{K(u)} \tag{39}$$

gesetzt, so ist sicher $\varrho \geqq \lambda_{k_1}$, aber sogar

$$\varrho > \lambda_{k_1}. \tag{40}$$

Denn, da u zu $\psi_1, \ldots, \psi_{k_1}$ orthogonal und da λ_{k_1} ein k_1-facher Eigenwert ist, ist u sicher keine zu λ_{k_1} gehörige Eigenfunktion, d. h. $F(u) \not\equiv \lambda_{k_1} G(u)$. Nach § 1, VI. gibt es daher eine zulässige Funktion $v(x)$, die ebenfalls zu $\psi_1, \ldots, \psi_{k_1}$ orthogonal ist und für die

$$J(u, v) \neq \lambda_{k_1} K(u, v) \tag{41}$$

gilt. Für alle hinreichend kleinen $|\varepsilon|$ ist $u + \varepsilon v$ ebenfalls eine zulässige Funktion, die zu $\psi_1, \ldots, \psi_{k_1}$ orthogonal ist[13]) und für die $K(u + \varepsilon v) > 0$ ist. Daher ist

$$\lambda_{k_1} \leqq \frac{J(u + \varepsilon v)}{K(u + \varepsilon v)},$$

d. h.

$$J(u + \varepsilon v) - \lambda_{k_1} K(u + \varepsilon v) \geqq 0.$$

Wäre $\varrho = \lambda_{k_1}$, so wäre also wegen (39)

$$\varepsilon [J(u, v) - \lambda_{k_1} K(u, v)] \geqq -\varepsilon^2 [J(v) - \lambda_{k_1} K(v)].$$

Da $|\varepsilon|$ beliebig klein sein und das Vorzeichen von ε beliebig gewählt werden kann, ergäbe sich hieraus ein Widerspruch zu (41).

(B). Wie beim Beweis zu Satz 1 soll nun bewiesen werden, daß im Intervall $\lambda_{k_1} < \lambda \leqq \varrho$ mindestens ein Eigenwert liegt. Dafür wird wieder

$$\eta(x) = F(u) - \varrho G(u) \tag{22}$$

gesetzt. Ist $\eta(x) \equiv 0$, so ist ϱ ein Eigenwert und u eine zugehörige Eigenfunktion, also die obige Behauptung richtig. Weiterhin kann daher $\eta(x) \not\equiv 0$ angenommen werden. Dann hat die Randwertaufgabe

$$F(v) - \lambda G(v) = \eta(x), \quad U_\mu(v) = 0 \quad (\mu = 1, \ldots, 2m) \tag{23}$$

wieder für jedes λ, das kein Eigenwert ist, genau eine Lösung $v(x, \lambda)$, diese ist $\not\equiv 0$, läßt sich mittels der Greenschen Resolvente Γ in der Gestalt

$$v(x, \lambda) = \int \Gamma(x, \xi, \lambda)\, \eta(\xi)\, d\xi \tag{24}$$

darstellen und hängt stetig von λ ab; ferner ist $v(x, \varrho) = u(x)$, und für jedes λ, das kein Eigenwert ist, erhält man für die Funktion

$$h(\lambda) = J(v) - \lambda K(v) = \int v \eta\, dx \tag{25}$$

die Ableitung

$$h'(\lambda) = K(v). \tag{26}$$

---

[13]) Es ist $K(u + \varepsilon v, \psi_\nu) = K(u, \psi_\nu) + \varepsilon K(v, \psi_\nu) = 0 + 0 = 0$.

Weiter ergibt sich wie früher, daß $h(\varrho) = 0$ und daß in jedem Intervall $\varrho_0 < \lambda \leqq \varrho$, das frei von Eigenwerten ist, $h(\lambda)$ negativ ist, monoton nach links abnimmt und daß dort $K(v) > 0$ ist.

Hier kommt noch hinzu, daß jedes dieser $v(x)$ zu $\psi_1, \ldots, \psi_{k_1}$ orthogonal ist. Da $K(u, \psi_\nu) = 0$ ist, ergibt sich nämlich mit (23). (22) und I.

$$\begin{aligned}\lambda K(\psi_\nu, v) &= \lambda \int \psi_\nu G(v)\, dx = \int \psi_\nu F(v)\, dx - \int \psi_\nu \eta\, dx \\ &= \int v F(\psi_\nu)\, dx - \int \psi_\nu [F(u) - \varrho G(u)]\, dx \\ &= \lambda_\nu \int v G(\psi_\nu)\, dx - \int u F(\psi_\nu)\, dx + 0 \\ &= \lambda_\nu K(\psi_\nu, v) - \lambda_\nu \int u G(\psi_\nu)\, dx,\end{aligned}$$

also

$$(\lambda - \lambda_\nu) K(\psi_\nu, v) = 0$$

und somit, da $\lambda > \lambda_\nu$ ist,

$$K(\psi_\nu, v) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, k_1). \tag{42}$$

(C). Bei dem Beweis zu Satz 1 war unmittelbar klar, daß $h(0) \geqq 0$ ist. Hier erfordert der linke Endpunkt des Intervalls $\lambda_{k_1} < \lambda \leqq \varrho$ zusätzliche Überlegungen. Die Greensche Resolvente und die Funktion $v(x, \lambda)$ existieren, da alle Eigenwerte (vgl. S. 253) isoliert liegen, sicher in einer gewissen rechtsseitigen Umgebung $\lambda_{k_1} < \lambda < \lambda^*$ des Eigenwerts λ_{k_1}. Die Greensche Resolvente hat nach K II, Satz 7 in einer solchen Umgebung eine Darstellung

$$\Gamma(x, \xi, \lambda) = -\frac{1}{\lambda - \lambda_{k_1}} \sum_{\nu=1}^{k_1} c_\nu \psi_\nu(x) \psi_\nu(\xi) + \Gamma_0(x, \xi, \lambda),$$

wo die c_ν gewisse Konstante sind und Γ_0 die am Schluß von K II auftretende Funktion ist. Hiermit ergibt sich nach (24)

$$v(x, \lambda) = -\frac{1}{\lambda - \lambda_{k_1}} \sum_{\nu=1}^{k_1} c_\nu \psi_\nu(x) \int \psi_\nu(\xi)\, \eta(\xi)\, d\xi + \int \Gamma_0(x, \xi, \lambda)\, \eta(\xi)\, d\xi.$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}\int \psi_\nu(\xi)\, \eta(\xi)\, d\xi &= \int \psi_\nu [F(u) - \varrho G(u)]\, d\xi \\ &= \int u F(\psi_\nu)\, d\xi = \lambda_\nu \int u G(\psi_\nu)\, d\xi = 0\end{aligned}$$

und somit

$$v(x, \lambda) = \int \Gamma_0(x, \xi, \lambda)\, \eta(\xi)\, d\xi.$$

Nach dem Zusatz am Schluß von K II ist $\Gamma_0(x, \xi, \lambda)$ $(2m - 2)$-mal nach x differenzierbar, und die Ableitungen sind in einem Bereich

$$a \leqq x, \xi \leqq b, \quad |\lambda - \lambda_{k_1}| < \delta$$

stetige Funktionen von x, ξ, λ. Wird

$$v_0(x) = \int \Gamma_0(x, \xi, \lambda_{k_1})\, \eta(\xi)\, d\xi$$

gesetzt, so ist daher v_0 $(2m-2)$-mal stetig differenzierbar, und gleichmäßig in $a \leqq x \leqq b$ ist

$$v^{(p)}(x, \lambda) \to v_0^{(p)}(x) \quad \text{für} \quad p \leqq 2m-2 \quad \text{und} \quad \lambda \to \lambda_{k_1},$$

also auch $K(v) \to K(v_0)$.

(D) Wäre nun das Intervall $\lambda_{k_1} < \lambda \leqq \varrho$ frei von Eigenwerten, so wäre in diesem Intervall nach der auf (26) (S. 258) folgenden Bemerkung einerseits $K(v) > 0$ und

$$h_0 = \lim_{\lambda \to \lambda_{k_1}} h(\lambda) < 0.$$

Andererseits wäre nach (25)

$$h_0 = \lim_{\lambda \to \lambda_{k_1}} [J(v) - \lambda K(v)]$$

$$\geqq \underline{\lim}\, [J(v) - \lambda_{k_1} K(v)] + \underline{\lim}\, (\lambda_{k_1} - \lambda) K(v). \tag{43}$$

Da $K(v)$ nach dem Schluß von (C) für $\lambda \to \lambda_{k_1}$ einen Grenzwert hat, ist der letzte Grenzwert Null. Da $K(v) > 0$ und v zu den ψ_ν orthogonal ist, ergibt (40), angewendet auf v statt u, daß die eckige Klammer einen positiven Wert hat. Aus (43) würde sich somit $h_0 \geqq 0$ ergeben. Damit ist der gewünschte Widerspruch erreicht und die bei (B) aufgestellte Behauptung bewiesen. Ist λ_{k_1+1} der nächste Eigenwert hinter λ_{k_1}, so ist also

$$\lambda_{k_1+1} \leqq \frac{J(u)}{K(u)}$$

für jede zulässige Funktion u der am Anfang von (A) genannten Art. Wählt man für u eine zu λ_{k_1-1} gehörige Eigenfunktion, so nimmt die rechte Seite dieser Ungleichung den Wert λ_{k_1+1} an. Es ist also

$$\lambda_{k_1+1} = \operatorname*{Min}_u \frac{J(u)}{K(u)},$$

d. h. die Behauptung (c) ist für $p \leqq k_1 + 1$ richtig.

Vierter Schritt. Ist λ_{k_1+1} ein mehrfacher, etwa ein k_2-facher Eigenwert, so ist $\lambda_{k_1+1} = \cdots = \lambda_{k_1+k_2}$ zu setzen. Es gibt dann ein System von Eigenfunktionen $\psi_{k_1+1}, \ldots, \psi_{k_1+k_2}$, die zueinander orthogonal sind und zu diesen Eigenwerten gehören. Nach K II, § 1, IV. sind sie von selbst zu $\psi_1, \ldots, \psi_{k_1}$ orthogonal. Mit denselben Schlüssen wie beim zweiten Schritt ergibt sich nun die Richtigkeit der Behauptung (c) für $1 < p \leqq k_1 + k_2$.

Fünfter Schritt. (A). Nach § 1, V. gibt es wieder zulässige Funktionen $u(x)$, die zu $\psi_1, \ldots, \psi_{k_1+k_2}$ orthogonal sind und für die $K(u) \neq 0$ ist. Gibt es unter diesen Funktionen u solche, für die $K(u) > 0$ ist — das trifft sicher zu, wenn es noch weitere positive Eigenwerte gibt —, so ist für diese u (36) mit $p = k_1 + k_2 + 1$ erfüllt. Wird für ein solches u wieder

$$\varrho = \frac{J(u)}{K(u)} \tag{39a}$$

gesetzt, so ist nach dem im dritten Schritt Bewiesenen $\varrho \geqq \lambda_{k_1+k_2}$, aber es ist sogar

(40a) $$\varrho > \lambda_{k_1+k_2}.$$

Denn u ist sicher keine zu $\lambda_{k_1+k_2}$ gehörige Eigenfunktion. Nach § 1. VI. gibt es daher eine zulässige Funktion $v(x)$, die ebenso wie $u(x)$ zu $\psi_1, \ldots, \psi_{k_1+k_2}$ orthogonal ist und für die

(41a) $$J(u, v) \neq \lambda_{k_1+k_2} K(u, v)$$

gilt. Hieraus folgt nun (40a), indem man weiter wie bei dem Teil (A) des dritten Schritts schließt und dabei das dortige λ_{k_1} durch $\lambda_{k_1+k_2}$ ersetzt.

(B), (C), (D) des dritten Schritts lassen sich, wenn k_1 durch $k_1 + k_2$ ersetzt wird, wörtlich übernehmen und ergeben, daß im Intervall $\lambda_{k_1+k_2} < \lambda \leqq \varrho$ mindestens ein Eigenwert liegt. Wird der nächste Eigenwert hinter $\lambda_{k_1+k_2}$ mit $\lambda_{k_1+k_2+1}$ bezeichnet, so gilt weiter

$$\lambda_{k_1+k_2+1} = \operatorname*{Min}_{u} \frac{J(u)}{K(u)},$$

wenn hierin $u(x)$ solche zulässigen Funktionen bedeuten kann, die (36) mit $p = k_1 + k_2 - 1$ erfüllen. Damit ist die Behauptung (c) auch für $p \leqq k_1 + k_2 + 1$ bewiesen.

Abschluß des Beweises für Aufgaben, die im engeren Sinne definit sind. In der vorher geschilderten Weise kann man fortfahren, solange es noch Funktionen $u(x)$ gibt, die (36) erfüllen, und das ist der Fall sicher, solange es noch weitere positive Eigenwerte gibt. Damit ergibt sich die Gültigkeit der Behauptung (c) für die positiven Eigenwerte unter der Voraussetzung, daß die Aufgabe im engeren Sinne definit ist. Hieraus folgt die Behauptung (c) auch für die negativen Eigenwerte, indem man λ, G in der Aufgabe (1), (2) durch $-\lambda$, $-G$ ersetzt und den schon bewiesenen Teil von (c) auf die so veränderte Aufgabe anwendet.

Das Verfahren (c) kann höchstens nach einer Seite hin abbrechen. Denn bricht das Verfahren bei den positiven $K(u)$ ab, so gibt es nur endlich viele positive Eigenwerte, etwa $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ mit $\psi_1, \ldots, \psi_k$ als zugehörigen, zueinander orthogonalen Eigenfunktionen. Dann gibt es zu jedem System $\lambda_{-1}, \ldots, \lambda_{-l}$ negativer Eigenwerte mit zugehörigen Eigenfunktionen $\psi_{-1}, \ldots, \psi_{-l}$ nach § 1, V. eine zulässige Funktion $u(x)$, die zu $\psi_1, \ldots, \psi_k$, $\psi_{-1}, \ldots, \psi_{-l}$ orthogonal ist und für die $K(u) \neq 0$ ist. Wäre $K(u) > 0$, so würde es nach dem für die positiven Eigenwerte geschilderten Verfahren noch mindestens einen weiteren positiven Eigenwert geben. Daher ist $K(u) < 0$. Das Verfahren (c) liefert somit weitere negative Eigenwerte und bricht nach dieser Seite nicht ab, es gibt also im ganzen stets unendlich viele Eigenwerte und diese haben (vgl. S. 253) keinen im Endlichen gelegenen Häufungspunkt. Damit ist (a) und bis auf die Normierung (34) auch (b)

bewiesen. Daß die Normierung (34) ebenfalls möglich ist, folgt aus (29); man braucht hiernach nur noch jede Eigenfunktion mit einem geeigneten konstanten Faktor zu multiplizieren. Für Eigenwertaufgaben, die im engeren Sinne definit sind, ist damit der Satz vollständig bewiesen.

Ist die Aufgabe nicht im engeren Sinne definit, so ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert. Ist $\operatorname{Sgn} 0 = +1$, so ist $\lambda_1 = 0$ der kleinste Eigenwert λ_p mit positivem $\operatorname{Sgn} \lambda_p$. Dieser Eigenwert wird nach dem letzten Teil von Satz 2 trivialerweise auch durch (27) geliefert. Weiter kann man nun genau so schließen wie bei den im engeren Sinne definiten Aufgaben für die λ_p mit positivem p. Ersetzt man λ, G in der Aufgabe (1), (2) durch $-\lambda$, $-G$, so geht die Aufgabe in sich über und die Eigenwerte, die $\leqq 0$ sind, in solche, die $\geqq 0$ sind. Man kann nun wieder das Verfahren anwenden, das für die Aufgaben, die im engeren Sinne definit sind, für die positiven Eigenwerte ausführlich beschrieben ist, muß dabei jedoch beachten, daß $\lambda = 0$ ein Eigenwert ist, und daher in (38) ν die Zahlen $k_1, \ldots, 1, -1, \ldots, -(p-1)$ durchlaufen lassen, wenn der Eigenwert 0 die Vielfachheit k_1 hat. Auf diese Weise ergibt sich die Richtigkeit von (a), (b) und (d) für $\operatorname{Sgn} 0 = +1$. Der Fall $\operatorname{Sgn} 0 = -1$ läßt sich auf diesen zurückführen, indem man wieder λ, G durch $-\lambda$, $-G$ ersetzt. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

§ 3.

Bemerkungen über die Vorzeichen der Eigenwerte.

In einzelnen Fällen kann man nähere Angaben über die Vorzeichen der Eigenwerte machen. Trivial ist der

Zusatz 1. Ist für jede zulässige Funktion $u(x)$

$$\int u\, G(u)\, dx \geqq 0 \quad (\leqq 0),$$

so sind alle Eigenwerte $\geqq 0$ $(\leqq 0)$.

Denn nach der Definition 1 auf S. 259 ist $\operatorname{Sgn} \lambda_p$ gleich dem Vorzeichen von $K(\psi_p)$, wenn ψ_p eine zu λ_p gehörige Eigenfunktion ist, und es ist weiter $\lambda_p \geqq 0$ $(\leqq 0)$, wenn $\operatorname{Sgn} \lambda_p > 0$ (< 0) ist.

Für eine weitere Aussage wird an die Dirichletsche Formel erinnert, die man leicht durch partielle Integration herleiten kann[14]). Nach dieser Formel ist für jede $2m$-mal stetig differenzierbare Funktion $u(x)$ und jede m-mal stetig differenzierbare Funktion $v(x)$

$$(44) \qquad \int v\, F(u)\, dx = \sum_{\nu=0}^{m} \int (-1)^\nu f_\nu\, u^{(\nu)}\, v^{(\nu)}\, dx + \Big[R_F(u, v) \Big]_a^b$$

[14]) Diese Formeln werden auch später (§ 5) noch gebraucht.

mit

$$R_F(u,v) = \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{p+q=\nu-1} (-1)^p (f_\nu u^{(\nu)})^{(q)} v^{(p)}. \tag{45}$$

Entsprechend ist für jede $2n$-mal stetig differenzierbare Funktion $u(x)$ und jede n-mal stetig differenzierbare Funktion $v(x)$

$$\int v\, G(u)\, dx = \sum_{\nu=0}^{n} \int (-1)^\nu g_\nu u^{(\nu)} v^{(\nu)}\, dx + \left[R_G(u,v) \right]_a^b \tag{46}$$

mit

$$R_G(u,v) = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{p+q=\nu-1} (-1)^p (g_\nu u^{(\nu)})^{(q)} v^{(p)}. \tag{47}$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt der

Zusatz 2. Gibt es in $\langle a, b\rangle$ ein Teilintervall $\langle \alpha, \beta\rangle$, in dem alle

$$(-1)^\nu g_\nu(x) \geqq 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n) \tag{48}$$

sind und mindestens eine dieser Funktionen > 0 ist, so gibt es sicher unendlich viele positive Eigenwerte. Gilt in (48) überall das entgegengesetzte Ungleichheitszeichen, so gibt es sicher unendlich viele negative Eigenwerte. Gibt es Teilintervalle $\langle \alpha, \beta\rangle$ von beiden Arten, so gibt es sowohl unendlich viele positive als auch unendlich viele negative Eigenwerte.

Beweis. Es genügt, den Fall der Ungleichungen (48) zu behandeln, da man den Fall der entgegengesetzten Ungleichheitszeichen nach einem schon mehrfach angewandten Schluß auf den ersten Fall zurückführen kann. Für den Fall der Ungleichung (48) zeigt der Beweis des Satzes 3, daß die Behauptung richtig ist, wenn es zu jedem Orthogonalsystem von Eigenfunktionen $\psi_1, \ldots, \psi_k$ mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ [15]) eine zulässige Funktion $u(x)$ gibt, so daß die Aussage (12) des Hilfssatzes V. gilt und sogar $K(u) > 0$ ist.

Um dieses zu beweisen, geht man wie bei dem Beweis des Hilfssatzes V. wieder von einer beliebigen zulässigen Funktion $u_0(x)$ aus und setzt

$$u(x) = u_0 + \sum_{p=1}^{k} \varrho_p \psi_p \tag{13}$$

mit

$$\varrho_p = -\frac{K(u_0, \psi_p)}{K(\psi_p)}. \tag{14}$$

Dann ist auch u eine zulässige Funktion, und die Orthogonalitätsbeziehungen von (12) sind erfüllt. Es ist also nur noch zu zeigen, daß $K(u) > 0$ ist, wenn u_0 geeignet gewählt wird.

---

[15]) Diese Bezeichnungen sind hier unabhängig von den in Satz 3 eingeführten; insbesondere dürfen also einige der λ_p den Wert 0 haben.

Nach der Voraussetzung gibt es im Innern von $\langle a, b\rangle$ ein Intervall $\langle \alpha, \beta\rangle$, in dem (48) gilt. Das Intervall $\langle \alpha, \beta\rangle$ kann überdies so klein gewählt werden, daß

$$\sum_{\rho=1}^{k} \frac{1}{|K(\psi_\rho)|} \sum_{\nu=0}^{n} \int_\alpha^\beta |g_\nu| \, \psi_\rho^{(\nu)2} \, dx < 1 \tag{49}$$

gilt. Es sei nun $u_0(x)$ eine $2n$-mal stetig differenzierbare Funktion, die $\neq 0$ in (α, β) und sonst $\equiv 0$ ist. Dann ist u_0 eine zulässige Funktion. Nach (15) ist

$$|K(u) - K(u_0)| \leqq \sum_{\rho=1}^{k} \frac{K^2(u_0, \psi_\rho)}{|K(\psi_\rho)|}.$$

Hierin ist nach (46) und (47), da $u_0 \equiv 0$ außerhalb (α, β) ist,

$$K^2(u_0, \psi_\rho) = \Big\{ \sum_{\nu=0}^{n} \int_\alpha^\beta (-1)^\nu g_\nu \, u_0^{(\nu)} \, \psi_\rho^{(\nu)} \, dx \Big\}^2,$$

also[16])

$$\begin{aligned} K^2(u_0, \psi_\rho) &\leqq \sum_\nu \int_\alpha^\beta (-1)^\nu g_\nu \, u_0^{(\nu)2} \, dx \cdot \sum_\nu \int_\alpha^\beta (-1)^\nu g_\nu \, \psi_\rho^{(\nu)2} \, dx \\ &= K(u_0) \sum_\nu \int_\alpha^\beta |g_\nu| \, \psi_\rho^{(\nu)2} \, dx, \end{aligned}$$

also mit Rücksicht auf (49)

$$|K(u) - K(u_0)| \leqq K(u_0) \sum_{\rho=1}^{k} \frac{1}{|K(\psi_\rho)|} \sum_{\nu=0}^{n} \int_\alpha^\beta |g_\nu| \, \psi_\rho^{(\nu)2} \, dx < K(u_0), \tag{50}$$

da

$$K(u_0) = \sum_{\nu=0}^{n} \int (-1)^\nu g_\nu \, u_0^{(\nu)2} \, dx > 0$$

ist. Aus (50) folgt, daß $K(u)$ dasselbe Vorzeichen wie $K(u_0)$ hat, also positiv ist, was zu beweisen war.

§ 4.

Über Reihen, die nach Eigenfunktionen fortschreiten.

Im folgenden sollen die $\psi_\rho(x)$ stets die Funktionen eines vollständigen normierten Orthogonalsystems von Eigenfunktionen der Aufgabe (1), (2)

[16]) Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ergibt sich nämlich

$$\begin{aligned} \Big\{ \sum_\nu \int \Phi_\nu(x) \, \Psi_\nu(x) \, dx \Big\}^2 &\leqq \Big\{ \sum_\nu \sqrt{\int \Phi_\nu^2 \, dx} \, \sqrt{\int \Psi_\nu^2 \, dx} \Big\}^2 \\ &\leqq \sum_\nu \int \Phi_\nu^2 \, dx \cdot \sum_\nu \int \Psi_\nu^2 \, dx. \end{aligned}$$

und die λ_p die zugehörigen Eigenwerte sein, und zwar in der durch Satz 3 festgelegten Anordnung. Ist $\Phi(x)$ eine stetige Funktion, so sollen die Zahlen

$$a_p = \varepsilon_p \int \Phi(x)\, G(\psi_p)\, dx \qquad (\varepsilon_p = \operatorname{Sgn} \lambda_p) \tag{51}$$

ihre *Fourier-Koeffizienten* in bezug auf die Aufgabe (1). (2) heißen.

Satz 4. *Für die Fourier-Koeffizienten a_p einer zulässigen Funktion $\Phi(x)$ gilt* [17])

$$\sum_p |\lambda_p|\, a_p^2 \leqq \int \Phi\, F(\Phi)\, dx \quad \textit{(Besselsche Ungleichung)} \tag{52}$$

und

$$\sum_p \varepsilon_p\, a_p^2 = \int \Phi\, G(\Phi)\, dx \quad \textit{(Parsevalsche Formel)}. \tag{53}$$

Ist auch $\Psi(x)$ eine zulässige Funktion und sind die b_p ihre Fourier-Koeffizienten, so ist

$$\sum_p \varepsilon_p\, a_p\, b_p = \int \Phi\, G(\Psi)\, dx. \tag{54}$$

Beweis. Für beliebige ganze Zahlen h, k ist wegen I., (51) und (34)

$$\begin{aligned} J\Big(\Phi - \sum_{p=h}^{k} a_p\, \psi_p\Big) &= \int \Big(\Phi - \sum_{p=h}^{k} a_p\, \psi_p\Big) F\Big(\Phi - \sum_{p=h}^{k} a_p\, \psi_p\Big)\, dx \\ &= \int \Phi\, F(\Phi)\, dx - 2 \sum_p a_p \int \Phi\, F(\psi_p)\, dx + \sum_{p,q} a_p\, a_q \int \psi_p\, F(\psi_q)\, dx \\ &= J(\Phi) - 2 \sum_p \lambda_p\, a_p \int \Phi\, G(\psi_p)\, dx + \sum_{p,q} \lambda_q\, a_p\, a_q \int \psi_p\, G(\psi_q)\, dx \\ &= J(\Phi) - 2 \sum_p |\lambda_p|\, a_p^2 + \sum_p \lambda_p\, a_p^2\, \varepsilon_p \end{aligned}$$

also

$$J\Big(\Phi - \sum_{p=h}^{k} a_p\, \psi_p\Big) = J(\Phi) - \sum_{p=h}^{k} |\lambda_p|\, a_p^2. \tag{55}$$

Hieraus folgt (52), da die Aufgabe definit und somit die linke Seite von (55) nicht negativ ist.

Wird weiter für $h,\ k \geqq 1$

$$H(x) = \Phi(x) - \sum_{p=-h}^{k} a_p\, \psi_p$$

gesetzt, so ist für $-h \leqq q \leqq k$

$$\begin{aligned} \int H\, G(\psi_q)\, dx &= \int \Phi\, G(\psi_q)\, dx - \sum_p a_p \int \psi_p\, G(\psi_q)\, dx \\ &= \varepsilon_q\, a_q - \varepsilon_q\, a_q = 0, \end{aligned}$$

d. h. $H(x)$ ist orthogonal zu $\psi_{-h}, \ldots, \psi_k$. Ist $J(H) > 0$, so ist daher nach Satz 3

$$\frac{J(H)}{K(H)} \geqq \lambda_{k+1} \qquad \text{für} \quad K(H) > 0$$

[17]) Bei den Summen, die λ_p oder ψ_p enthalten, durchläuft der Summationsindex immer nur ganze Zahlen $\neq 0$; Glieder, für die λ_p nicht existiert, sind fortzulassen.

und

$$\frac{J(H)}{K(H)} \leqq \lambda_{-h-1} \quad \text{für} \quad K(H) < 0.$$

Wird h bzw. k so groß gewählt, daß $\lambda_{-h-1} \neq 0$ bzw. $\lambda_{k+1} \neq 0$ ist, so ist also

(56) $K(H) = 0$ oder $\frac{J(H)}{\lambda_{k+1}} \geqq K(H) > 0$ oder $0 > K(H) \geqq \frac{J(H)}{\lambda_{-h-1}}$.

Bei der Herleitung von (56) war $J(H) > 0$ vorausgesetzt. Das Resultat (56) gilt jedoch ohne diese Einschränkung. Denn ist $J(H) = 0$, so ist $H \equiv 0$ oder nach II. eine Eigenfunktion mit dem Eigenwert 0. Das letzte ist jedoch nicht möglich, da H zu $\psi_{-h}, \ldots, \psi_k$, insbesondere also auch zu allen Eigenfunktionen mit dem Eigenwert 0 orthogonal ist. Es bleibt also nur $H \equiv 0$ übrig, und dann ist die erste der Beziehungen (56) erfüllt.

Aus (55) folgt $J(H) \leqq J(\Phi)$, d. h. $J(H)$ ist beschränkt. Da $|\lambda_p| \to \infty$ für $|p| \to \infty$ ist, folgt somit aus (56) $K(H) \to 0$ für $h, k \to \infty$.

Nach I., (34) und (51) ist aber

$$\begin{aligned} K(H) &= \int H\,G(H)\,dx = \int (\Phi - \sum_p a_p\,\psi_p)\,G\,(\Phi - \sum_p a_p\,\psi_p)\,dx \\ &= \int \Phi\,G(\Phi)\,dx - 2\sum_p a_p \int \Phi\,G(\psi_p)\,dx + \sum_{p,q} a_p\,a_q \int \psi_p\,G(\psi_q)\,dx \\ &= K(\Phi) - 2\sum_p a_p^2\,\varepsilon_p + \sum_p a_p^2\,\varepsilon_p \\ &= K(\Phi) - \sum_p \varepsilon_p\,a_p^2, \end{aligned}$$

und damit ergibt sich die Behauptung (53).

Um (54) zu erhalten, kann man in (53) Φ durch $\Phi + \Psi$ ersetzen. Man erhält dann

$$\int (\Phi + \Psi)\,G(\Phi + \Psi)\,dx = \sum \varepsilon_p\,(a_p + b_p)^2,$$

d. h.

$$\int \Phi\,G(\Phi)\,dx + 2\int \Phi\,G(\Psi)\,dx + \int \Psi G(\Psi)\,dx = \sum \varepsilon_p\,a_p^2 + 2\sum \varepsilon_p\,a_p\,b_p + \sum \varepsilon_p\,b_p^2,$$

und hieraus mit (53) und der entsprechenden Formel für Ψ die Gleichung (54).

Zu der Ungleichung (52) gibt es bei veränderten Voraussetzungen ein Gegenstück, bei dem G statt F auftritt. Bei dem Beweis von (52) war erstens benutzt, daß $J(u) \geqq 0$ für zulässige Funktionen ist; statt dessen wird nun $K(u) \geqq 0$ verlangt werden. Zweitens war $\int u\,F(v)\,dx = \int v\,F(u)\,dx$ benutzt. Die entsprechende Gleichung

(57) $$\int u\,G(v)\,dx = \int v\,G(u)\,dx$$

besteht (vgl. die Einleitung zu K II) dann, wenn u und v $2n$-mal stetig differenzierbar sind und wenn für den bilinearen Differentialausdruck

$$G^*(u,v) = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{p+q=\nu-1} (-1)^p\,[(g_\nu\,u^{(\nu)})^{(q)}\,v^{(p)} - (g_\nu\,v^{(\nu)})^{(q)}\,u^{(p)}]$$

die Gleichung

$$\left[G^*(u,v)\right]_a^b = 0 \tag{58}$$

gilt. In der Einleitung war verlangt worden, daß (58) für alle diejenigen Funktionen u, v besteht, welche die Randbedingungen (2) erfüllen. In G^* kommen aber die Ableitungen der Ordnung $> 2n-1$ nicht vor. Eliminiert man aus den Randbedingungen (2), soweit das möglich ist, die Ableitungen der Ordnung $\geqq 2n$ und läßt man dann diejenigen Randbedingungen fort, die nun noch Ableitungen der Ordnung $\geqq 2n$ enthalten, so gilt (57) auch dann, wenn u, v Funktionen sind, die $2n$-mal stetig differenzierbar sind und die Eigenschaft haben, daß (58) für alle solche Funktionen u, v besteht, welche die reduzierten Randbedingungen erfüllen, die nur Ableitungen der Ordnung $\leqq 2n-1$ enthalten [18]). Solche Funktionen u, v mögen *zulässige Funktionen in bezug auf* G heißen. Jede zulässige Funktion der Aufgabe (1), (2) in dem früheren Sinne ist offenbar zugleich eine zulässige Funktion in bezug auf G. Hat G die Ordnung 0, d. h. ist $G(y) = g(x)\,y$, so ist $G^* \equiv 0$, und es sind dann sogar alle stetigen Funktionen zulässige Funktionen in bezug auf G. Mit diesen Bezeichnungen gilt der

Satz 5. *Ist für jede zulässige Funktion $u(x)$ in bezug auf G*

$$\int u\,G(u)\,dx \geqq 0, \tag{59}$$

und sind die a_p die durch (51) [19]) *gegebenen Fourier-Koeffizienten einer in bezug auf G zulässigen Funktion $\Phi(x)$, so gilt die Besselsche Ungleichung*

$$\sum a_p^2 \leqq \int \Phi\,G(\Phi)\,dx. \tag{60}$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} K\Big(\Phi - \sum_{p=h}^{k} a_p\,\psi_p\Big) &= \int \Big(\Phi - \sum_{p=h}^{k} a_p\,\psi_p\Big)\,G\Big(\Phi - \sum_{p=h}^{k} a_p\,\psi_p\Big)\,dx \\ &= \int \Phi\,G(\Phi)\,dx - 2\sum_p a_p \int \Phi\,G(\psi_p)\,dx + \sum_{p,q} a_p a_q \int \psi_p\,G(\psi_q)\,dx \\ &= K(\Phi) - 2\sum_p a_p^2 + \sum_p a_p^2 = K(\Phi) - \sum_p a_p^2. \end{aligned}$$

Hieraus folgt (60), da die linke Seite der obigen Ungleichung nach der Voraussetzung $\geqq 0$ ist.

---

[18]) Ist z. B. $m = 2$, $n = 1$ und lauten die Randbedingungen (2)

$$y(a) = y'(a) = y(b) = y'(b) = 0,$$

so sind diese Randbedingungen zugleich die reduzierten Randbedingungen. Lauten die Randbedingungen (2) dagegen

$$y^{(\nu)}(a) = y^{(\nu)}(b) \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3),$$

so bestehen die reduzierten Randbedingungen nur aus den beiden Gleichungen für $\nu = 0, 1$.

[19]) Wegen (59) und (29) ist dabei $\varepsilon_p = 1$.

Die weiteren Betrachtungen dieses Paragraphen beziehen sich auf den Fall, daß die Eigenwertaufgabe im engeren Sinne definit ist. Dann ist 0 kein Eigenwert, und es gibt eine Greensche Funktion $\Gamma(x, \xi)$ (vgl. K II, § 1, II.). Über diese Funktion wird der folgende Hilfssatz gebraucht.

Hilfssatz. Die Ableitungen

$$\Gamma^{(p,q)}(x, \xi) = \frac{\partial^p}{\partial x^p} \frac{\partial^q}{\partial \xi^q} \Gamma(x, \xi)$$

existieren für $p + q \leqq 2m - 2$ und sind in dem Quadrat $a \leqq x, \xi \leqq b$ stetig.

Beweis. Nach K II. § 1. I. ist (das dortige λ ist hier $= 0$, $\Delta(0) = \Delta \neq 0$. $y(x, 0) = y(x)$)

$$\Gamma(x, \xi) = \gamma(x, \xi) + \frac{Z(x, \xi)}{\Delta}.$$

Dabei ist

$$\gamma(x, \xi) = \tfrac{1}{2} \operatorname{sgn}(x - \xi) \cdot f_m^{m-1}(\xi) \begin{vmatrix} y_1(\xi), & \dots, & y_{2m}(\xi) \\ y_1'(\xi), & \dots, & y_{2m}'(\xi) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(2m-2)}(\xi), & \dots, & y_{2m}^{(2m-2)}(\xi) \\ y_1(x), & \dots, & y_{2m}(x) \end{vmatrix}$$

eine Grundlösung der Differentialgleichung

$$F(y) = 0, \tag{61}$$

$$Z(x, \xi) = \begin{vmatrix} 0, & y_1(x), & \dots, & y_{2m}(x) \\ U_1(\gamma), & U_1(y_1), & \dots, & U_1(y_{2m}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_{2m}(\gamma), & U_{2m}(y_1), & \dots, & U_{2m}(y_{2m}) \end{vmatrix}. \tag{62}$$

und $y_1(x), \dots, y_{2m}(x)$ bilden ein Hauptsystem von Lösungen von (61) mit

$$y_p^{(q)}(a) = e_{p,\,q+1}.$$

Die Darstellung (62) gilt für $a \leqq x \leqq b$, $a < \xi < b$; für $\xi = a$ bzw. $\xi = b$ ist Z durch die Grenzwerte für $\xi \to a$ bzw. $\xi \to b$ definiert. Die Funktion $\gamma(x, \xi)$ läßt sich auch in der Gestalt

$$\gamma(x, \xi) = \tfrac{1}{2} \operatorname{sgn}(x - \xi) \cdot \sum_\nu y_\nu(x)\, z_\nu(\xi)$$

schreiben; dabei sind bekanntlich[20]) $z_1(x), \dots, z_{2m}(x)$ ein Hauptsystem von Lösungen der adjungierten Differentialgleichung, also hier von (1) selber. Aus der ersten Darstellung von γ ergibt sich

$$\sum_\nu y_\nu^{(k)}(x)\, z_\nu(x) = 0 \quad \text{für} \quad k = 0, 1, \dots, 2m - 2, \tag{63}$$

---

[20]) Vgl. z. B. G. Darboux, Leçons sur la théorie des surfaces, Bd. 2, Paris 1889, S. 99ff.

und aus der zweiten Darstellung, daß die Ableitungen $\gamma^{(p,q)}(x,\xi)$ für $x \neq \xi$ und $p, q \leqq 2m$ vorhanden und stetig sind. Daher existieren die Ableitungen

$$\frac{\partial^q}{\partial \xi^q} U_\mu(\gamma) = U_\mu(\gamma^{(0,q)}) \tag{64}$$

für $q \leqq 2m$ und $a < \xi < b$ und sind in dem letzten Intervall stetig. Da die Grenzwerte von $\gamma^{(p,q)}(a,\xi)$ für $\xi \to a$ und $\xi \to b$ und ebenso von $\gamma^{(p,q)}(b,\xi)$ existieren $(p, q \leqq 2m)$, existieren auch die Grenzwerte von (64) für $\xi \to a$ und $\xi \to b$. Mit Hilfe der Bernoullischen Regel folgt daraus, daß $Z^{(p,q)}(x,\xi)$ in dem ganzen Quadrat $a \leqq x, \xi \leqq b$ für $p, q \leqq 2m$ existiert und stetig ist.

Aus (63) folgt für $k \leqq 2m-3$ durch Differentiation

$$\sum_\nu y_\nu^{(k+1)}(x)\, z_\nu(x) + \sum_\nu y_\nu^{(k)}(x)\, z_\nu'(x) = 0,$$

also, da die erste Summe nach (63) den Wert 0 hat,

$$\sum_\nu y_\nu^{(k)}(x)\, z_\nu'(x) = 0.$$

Durch weiteres Differenzieren ergibt sich

$$\sum_\nu y_\nu^{(p)}(x)\, z_\nu^{(q)}(x) = 0 \quad \text{für} \quad p+q \leqq 2m-2.$$

Daher stimmen die Ableitungen $\gamma^{(p,q)}(x,\xi)$, die man zunächst nur in jedem der beiden Dreiecke $a \leqq x \leqq \xi \leqq b$ und $a \leqq \xi \leqq x \leqq b$ bilden kann, auf der gemeinsamen Hypotenuse $x = \xi$ überein. Die Ableitungen $\gamma^{(p,q)}(x,\xi)$ existieren somit für $p+q \leqq 2m-2$ in dem ganzen Quadrat $a \leqq x, \xi \leqq b$ und sind dort stetig. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Satz 6. *Ist die Aufgabe* (1), (2) *selbstadjungiert und im engeren Sinne definit, so konvergiert*

$$\sum_p \frac{[\psi_p^{(\nu)}(x)]^2}{|\lambda_p|} \quad \textit{für} \quad \nu \leqq m-1 \tag{65}$$

und ist $\leqq \Gamma^{(\nu,\nu)}(x,x)$.

Beweis. Es sei $w(x)$ irgendeine m-mal stetig differenzierbare Funktion, die $\not\equiv 0$ ist und nebst ihren m ersten Ableitungen in den Punkten a und b den Wert 0 hat. Da 0 kein Eigenwert der Aufgabe (1), (2) ist, hat die Randwertaufgabe

$$F(v) = w^{(\nu)}(x), \quad U_\mu(v) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, 2m) \tag{66}$$

für $\nu \leqq m-1$ eine eindeutig bestimmte Lösung

$$v(x) = \int \Gamma(x,\xi)\, w^{(\nu)}(\xi)\, d\xi. \tag{67}$$

Sind a_p die Fourier-Koeffizienten von v in bezug auf die Aufgabe (1), (2), so ist nach Satz 4

$$\int v\, F(v)\, dx \geqq \sum_{p=h}^{k} |\lambda_p|\, a_p^2. \tag{68}$$

Bei Berücksichtigung der Randbedingungen für $w(x)$ ergibt sich durch partielle Integration

$$\int v\,F(v)\,dx = \int v\,w^{(\nu)}\,dx = (-1)^{\nu}\int v^{(\nu)}\,w\,dx.$$

Weiter folgt aus (67)

$$v^{(\nu)}(x) = \int \Gamma^{(\nu,0)}(x,\xi)\,w^{(\nu)}(\xi)\,d\xi,$$

und hieraus wieder durch partielle Integration

$$v^{(\nu)}(x) = (-1)^{\nu}\int \Gamma^{(\nu,\nu)}(x,\xi)\,w(\xi)\,d\xi.$$

Daher ist

$$\int v\,F(v)\,dx = \iint \Gamma^{(\nu,\nu)}(x,\xi)\,w(x)\,w(\xi)\,dx\,d\xi. \tag{69}$$

Die Fourier-Koeffizienten von v sind nach (51) und bei Berücksichtigung von (1)

$$a_p = \varepsilon_p \int v\,G(\psi_p)\,dx = \frac{1}{|\lambda_p|}\int v\,F(\psi_p)\,dx$$
$$= \frac{1}{|\lambda_p|}\int \psi_p\,F(v)\,dx = \frac{1}{|\lambda_p|}\int \psi_p\,w^{(\nu)}\,dx.$$

Durch partielle Integration erhält man hieraus

$$a_p = (-1)^{\nu}\,\frac{1}{|\lambda_p|}\int \psi_p^{(\nu)}(x)\,w(x)\,dx$$

und somit

$$\sum |\lambda_p|\,a_p^2 = \sum \frac{1}{|\lambda_p|}\iint \psi_p^{(\nu)}(x)\,\psi_p^{(\nu)}(\xi)\,w(x)\,w(\xi)\,dx\,d\xi. \tag{70}$$

Aus (68) bis (70) folgt

$$\iint\left[\Gamma^{(\nu,\nu)}(x,\xi) - \sum_{p=h}^{k}\frac{1}{|\lambda_p|}\,\psi_p^{(\nu)}(x)\,\psi_p^{(\nu)}(\xi)\right] w(x)\,w(\xi)\,dx\,d\xi \geqq 0,$$

und zwar für jede Funktion $w(x)$ der angegebenen Art. Hieraus folgt die Behauptung. Denn hätte die eckige Klammer für ein $x = \xi = x_0$ einen negativen Wert, so wäre das auch der Fall in einem gewissen achsenparallelen Quadrat mit dem Mittelpunkt x_0, x_0; wählt man dann für $w(x)$ eine Funktion, die für die innerhalb des Quadrats gelegenen x positiv ist und sonst Null ist, so ergibt sich ein Widerspruch. Daher ist

$$\Gamma^{(\nu,\nu)}(x,x) \geqq \sum_{p=h}^{k}\frac{1}{|\lambda_p|}\,[\psi_p^{(\nu)}(x)]^2$$

jedenfalls für $a < x < b$. Da beide Seiten stetig sind, gilt die Ungleichung aber sogar in dem abgeschlossenen Intervall $a \leqq x \leqq b$, und zwar für beliebige h, k. Damit ist der Satz bewiesen.

Für die folgende Definition werden die Randbedingungen in ähnlicher Weise wie für Satz 5 umgeformt, d. h. es werden jetzt aus den Randbedingungen

die Ableitungen der Ordnungen $\geqq m$ eliminiert, soweit das möglich ist. Nach dieser Umformung seien

$$U_\mu^*(y) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, ?) \tag{71}$$

diejenigen der Randbedingungen, die nur Ableitungen der Ordnung $\leqq m-1$ enthalten.

Definition 2. Die selbstadjungierte Aufgabe (1), (2) möge *abgeschlossen* heißen, wenn $Y(x) \equiv 0$ die einzige $(m-1)$-mal stetig differenzierbare Funktion ist, die den Randbedingungen (71) und außerdem für jede zulässige Funktion $u(x)$ der Gleichung

$$\int Y(x)\, G(u)\, dx = 0 \tag{72}$$

genügt [21]).

Es gilt nun der folgende Entwicklungssatz:

Satz 7. *Ist die Aufgabe* (1), (2) *selbstadjungiert und im engeren Sinne definit, so konvergieren für jede zulässige Funktion* $\Phi(x)$ *mit den Fourier-Koeffizienten* a_p *die Reihen*

$$\sum a_p\, \varphi_p^{(\nu)}(x) \qquad (\nu \leqq m-1),$$

und zwar konvergieren sogar die Reihen der absoluten Beträge der Glieder gleichmäßig in $a \leqq x \leqq b$. *Ist die Aufgabe überdies abgeschlossen, so ist*

$$\Phi(x) = \sum a_p\, \varphi_p(x), \tag{73}$$

und man kann diese Reihe gliedweise $(m-1)$*-mal differenzieren.*

Beweis. Die Schwarzsche Ungleichung ergibt zusammen mit Satz 6

$$\Big(\sum_{p=h}^{k} |a_p\, \varphi_p^{(\nu)}(x)|\Big)^2 = \Big(\sum_{p=h}^{k} \sqrt{|\lambda_p|}\, |a_p| \cdot \frac{|\varphi_p^{(\nu)}(x)|}{\sqrt{|\lambda_p|}}\Big)^2$$

$$\leqq \sum_{p=h}^{k} |\lambda_p|\, a_p^2 \cdot \sum_p \frac{[\varphi_p^{(\nu)}(x)]^2}{|\lambda_p|}$$

$$\leqq \Gamma^{(\nu,\nu)}(x,x) \cdot \sum_{p=h}^{k} |\lambda_p|\, a_p^2.$$

Hieraus folgt die Behauptung über die Konvergenz, da die letzte Reihe nach Satz 4 konvergiert.

Ist $u(x)$ eine beliebige zulässige Funktion mit den Fourier-Koeffizienten b_p, so ist nach Satz 4

$$\sum_p \varepsilon_p\, a_p\, b_p = \int u\, G(\Phi)\, dx = \int \Phi\, G(u)\, dx. \tag{74}$$

Dabei ist nach (51)

$$\varepsilon_p\, b_p = \int u\, G(\varphi_p)\, dx = \int \varphi_p\, G(u)\, dx,$$

[21]) Diese Bedingungen werden in § 5 näher erörtert.

also nach (74)
$$\int [\Phi - \sum_p a_p \psi_p] G(u)\, dx = 0,$$

und zwar für beliebige zulässige Funktionen $u(x)$. Nach dem ersten Teil des Satzes ist
$$Y(x) = \Phi(x) - \sum_p a_p \psi_p(x)$$

eine $(m-1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, welche die Randbedingungen (71) erfüllt, da Φ und die ψ_p diese Eigenschaft haben. Ist die Aufgabe abgeschlossen, so ist also $Y(x) \equiv 0$. Damit ist auch (73) bewiesen.

§ 5.

Die Abgeschlossenheit der Eigenwertaufgabe.

Es soll jetzt die auf S. 275 eingeführte Bedingung der Abgeschlossenheit näher untersucht werden. Hierbei genügt die

Voraussetzung. Die Aufgabe (1), (2) sei selbstadjungiert.

Man sieht sofort, daß die Eigenwertaufgabe für $n = 0$, d. h. für $G(y) = g(x)\, y$ sicher abgeschlossen ist, wenn $g(x)$ stetig und in keinem Teilintervall identisch Null ist. Das ist der Fall, für den der Entwicklungssatz in K I abgeleitet ist. Im allgemeinen Falle wird, wie folgt, vorgegangen.

I. Für G besteht die Dirichletsche Formel

$$\int v\, G(u)\, dx = \sum_{\nu=0}^{n} \int (-1)^\nu g_\nu u^{(\nu)} v^{(\nu)}\, dx + \Big[R(u,v) \Big]_a^b \tag{46}$$

mit

$$\begin{aligned} R(u,v) &= \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{p+q=\nu-1} (-1)^p (g_\nu u^{(\nu)})^{(q)} v^{(p)} \\ &= \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p v^{(p)} \sum_{\nu=p+1}^{n} (g_\nu u^{(\nu)})^{(\nu-p-1)}; \end{aligned} \tag{47}$$

dabei ist $u(x)$ eine $2n$-mal stetig differenzierbare und $v(x)$ eine n-mal stetig differenzierbare Funktion. Diese Ausdrücke werden im folgenden mit einer anderen Zusammenfassung der Glieder auftreten. Wird

$$\begin{cases} G_n(u) = g_n(x)\, u^{(n)}(x), \\ G_\nu(u) = \dfrac{d}{dx} G_{\nu+1}(u) + g_\nu(x)\, u^{(\nu)}(x) \qquad (\nu = n-1, \ldots, 1, 0) \end{cases} \tag{75}$$

gesetzt, so ist, wie man leicht sieht, für $2n$-mal stetig differenzierbare Funktionen $u(x)$
$$G_\nu(u) = \sum_{p=\nu}^{n} (g_p u^{(p)})^{(p-\nu)},$$

also

$$\begin{cases} G(u) = G_0(u) \\ R(u,v) = \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p v^{(p)} G_{p+1}(u). \end{cases} \tag{76}$$

Behält man die durch (75) vorgeschriebene Zusammenfassung der Glieder bei, so wird für $n = 1$: $G_0(u) = (g_1 u')' + g_0 u$, stimmt also auch in der Form mit $G(u)$ überein; für $n = 2$ ist dagegen $G_0(u) = [(g_2 u'')' + g_1 u']' + g_0 u$, weicht also in der Form von $G(u)$ ab.

II. Es sei $Y(x)$ eine n-mal und $u(x)$ eine $2m$-mal stetig differenzierbare Funktion mit den Randwerten

$$u^{(\nu)}(a) = u^{(\nu)}(b) = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, 2m-1). \tag{77}$$

Bei gegebenem $Y(x)$ gilt genau dann

$$\int Y G(u)\, dx = 0 \tag{78}$$

für jede Funktion u der genannten Art, wenn die bei der Bildung von $G_0(Y)$ auftretenden Ausdrücke $G_\nu(Y)$ existieren und stetig sind und wenn

$$G_0(Y) = 0 \tag{79}$$

ist.

Zusatz. Für $n = 1$ ist, wie vorher bemerkt, $G_0 = G$; für $n = 2$ gilt (78) in dem obigen Sinne ebenfalls genau dann, wenn $(g_2 Y'')''$ und $(g_1 Y')'$ existieren und stetig sind und wenn

$$G(Y) = 0 \tag{79a}$$

ist.

Beweis. Für $v = Y$ lautet (46) wegen der Randbedingungen (77)

$$\int Y G(u)\, dx = \sum_{\nu=0}^{n} \int (-1)^\nu g_\nu Y^{(\nu)} u^{(\nu)}.$$

Wird zur Abkürzung

$$G_\nu^{[0]} = g_\nu Y^{(\nu)} \quad \text{und} \quad G_\nu^{[\varkappa]} = \int_a^x G_\nu^{[\varkappa-1]}\, dx \quad \text{für} \quad \varkappa > 0$$

gesetzt, so ergibt partielle Integration mit Rücksicht auf (77)

$$\begin{aligned} \int g_\nu Y^{(\nu)} u^{(\nu)}\, dx &= (-1)^\varkappa \int G_\nu^{[\varkappa]} u^{(\nu+\varkappa)}\, dx \\ &= (-1)^{n-\nu} \int G_\nu^{[n-\nu]} u^{(n)}\, dx. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\int Y G(u)\, dx = (-1)^n \int u^{(n)} \sum_{\nu=0}^{n} G_\nu^{[n-\nu]}\, dx.$$

Nach der Voraussetzung (78) ist dieses Null für jedes $u(x)$ der oben beschriebenen Art. Daher ist[22])

$$\sum_{\nu=0}^{n} G_\nu^{[n-\nu]} = P_{n-1}(x) \tag{80}$$

ein Polynom eines Grades $\leqq n - 1$.

---

[22]) E. Zermelo, Math. Annalen 58 (1904), S. 558—564.

Aus (80) folgt durch Differentiation nach x

$$(g_n Y^{(n)})' + g_{n-1} Y^{(n-1)} + \sum_{\nu=0}^{n-2} G_\nu^{[n-\nu-1]} = P_{n-2},$$

und hieraus für $n \geqq 2$, da Y n-mal differenzierbar ist, durch nochmalige Differentiation

$$(g_n Y^{(n)})'' + (g_{n-1} Y^{(n-1)})' + g_{n-2} Y^{(n-2)} + \sum_{\nu=0}^{n-3} G_\nu^{[n-\nu-2]} = P_{n-3}.$$

Für $n = 2$ ist damit schon die Gleichung (79a) des Zusatzes gewonnen. Im allgemeinen Falle läßt sich die obige Gleichung mit den Bezeichnungen von I. in der Gestalt

$$G_{n-2}(u) + \sum_{\nu=0}^{n-3} G_\nu^{[n-\nu-2]} = P_{n-3}$$

schreiben. Bei fortgesetzter Differentiation ergibt sich, daß alle $G_\nu(u)$ existieren, stetig sind und daß (79) gilt.

Umgekehrt folgt durch n-malige Integration aus (79) die Gleichung (80), und daher aus der vorangehenden Formelzeile durch partielle Integration wegen (77) die Gleichung (78) für beliebige $u(x)$ der angegebenen Art.

III. Ist $Y(x)$ $(n-1)$-mal stetig differenzierbar, so gilt die Gleichung

$$\int Y G(u)\, dx = 0 \tag{78}$$

genau dann für alle zulässigen Funktionen $u(x)$, wenn alle Ausdrücke $G_\nu(Y)$ existieren,

$$G_0(Y) = 0 \tag{79}$$

gilt und für alle zulässigen Funktionen $u(x)$

$$\sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \left[u^{(p)} G_{p+1}(Y) - Y^{(p)} G_{p+1}(u) \right]_a^b = 0. \tag{81}$$

ist.

Beweis. Da zu den zulässigen Funktionen insbesondere die in II. betrachteten Funktionen $u(x)$ gehören, ergibt II., daß alle Ausdrücke $G_\nu(Y)$ existieren und (79) erfüllt ist. Ist $Y(x)$ eine beliebige Funktion, für die alle $G_\nu(Y)$ existieren, und ist $u(x)$ eine zulässige Funktion, so ergibt sich durch partielle Integration mit Berücksichtigung von (75)

$$\begin{aligned}
\int u G_0(Y)\, dx &= \int \left[u \frac{d}{dx} G_1(Y) + u g_0 Y \right] dx \\
&= \left[u G_1(Y) \right]_a^b + \int [g_0 u Y - u' G_1(Y)]\, dx \\
&= \left[u G_1(Y) \right]_a^b + \int \left[g_0 u Y - g_1 u' Y' - u' \frac{d}{dx} G_2(Y) \right] dx \\
&= \sum_{p=0}^{1} (-1)^p \left[u^{(p)} G_{p+1}(Y) \right]_a^b \\
&\quad + \int \left[\sum_{\nu=0}^{1} (-1)^\nu g_\nu u^{(\nu)} Y^{(\nu)} + u'' G_2(Y) \right] dx.
\end{aligned}$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man schließlich

$$\int u\, G_0(Y)\, dx = \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \left[u^{(p)}\, G_{p+1}(Y) \right]_a^b + \sum_{\nu=0}^{n} \int (-1)^\nu g_\nu\, u^{(\nu)}\, Y^{(\nu)}\, dx.$$

Nach I., (46) und (76) ist außerdem

$$\int Y\, G(u)\, dx = \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \left[Y^{(p)}\, G_{p+1}(u) \right]_a^b + \sum_{\nu=0}^{n} \int (-1)^\nu g_\nu\, u^{(\nu)}\, Y^{(\nu)}\, dx.$$

Durch Subtraktion der letzten Gleichung von der vorangehenden erhält man

$$\int [u\, G_0(Y) - Y\, G(u)]\, dx = \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \left[u^{(p)}\, G_{p+1}(Y) - Y^{(p)}\, G_{p+1}(u) \right]_a^b. \tag{82}$$

Ist nun (78) erfüllt, so gilt, wie anfangs bemerkt, auch (79), und somit nach (82) auch (81). Umgekehrt, wenn (79) und (81) erfüllt sind folgt aus (82) die Gleichung (78).

Aus III. folgt unmittelbar der

Satz 8. *Die selbstadjungierte Aufgabe* (1), (2) *ist genau dann abgeschlossen, wenn* $Y(x) \equiv 0$ *die einzige Funktion ist, die folgende Bedingungen erfüllt:*

(a) $Y(x)$ *ist* $(m-1)$*-mal stetig differenzierbar und erfüllt die Randbedingungen* (71);

(b) $G_\nu(Y)$ *existiert für* $\nu = 0, 1, \ldots, n$ *und ist stetig;*

(c) $G_0(Y) = 0$ [23]);

(d) *für alle zulässigen Funktionen* $u(x)$ *gilt*

$$\sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \left[u^{(p)}\, G_{p+1}(Y) - Y^{(p)} G_{p+1}(u) \right]_a^b = 0. \tag{81}$$

Beispiele. Es sei $m \geqq 2$, $n = 1$, d. h. die Gleichung (1) lautet

$$F(y) + \lambda\, [(g_1 y')' + g_0 y] = 0.$$

Unter den Randbedingungen mögen sich die Randbedingungen

$$y(a) = y'(a) = y(b) = y'(b) = 0$$

befinden [24]). Dann ist (b) und (d) von selbst erfüllt, und die Gleichung (c) lautet

$$(g_1 y')' + g_0 y = 0.$$

Daher ist die Aufgabe sicher dann abgeschlossen, wenn die Randwertaufgabe

$$(g_1 y')' + g_0 y = 0, \quad y(a) = y'(a) = y(b) = y'(b) = 0$$

nur die Lösung $y \equiv 0$ hat. Ist $g_1(a) \neq 0$, so ist sicher $y \equiv 0$ in jedem Intervall, daß den Punkt a enthält und in dem $g_1 \neq 0$ ist; Entsprechendes gilt für den Punkt b. Daher ist die Aufgabe (1), (2) sicher abgeschlossen, wenn $g_1(x)$ höchstens eine Nullstelle hat.

[23]) Für $n = 1$ und 2 kann diese Gleichung durch $G(Y) = 0$ ersetzt werden.

[24]) Zu dieser Aufgabe vgl. auch H. Boerner, Math. Zeitschr. 34 (1932), S. 304.

Ist $m \geqq 4$, $n = 2$ und befinden sich unter den Randbedingungen die Gleichungen

$$y^{(\nu)}(a) = y^{(\nu)}(b) = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3),$$

so ist wieder (b) und (d) von selbst erfüllt, und (c) lautet

$$(g_2 y'')'' + (g_1 y')' + g_0 y = 0.$$

Man sieht dann wieder, daß die Aufgabe sicher abgeschlossen ist, wenn $g_2(x)$ höchstens eine Nullstelle hat.

§ 6.

Festlegung und Abschätzung der Eigenwerte nach Courant.

Die selbstadjungierte Eigenwertaufgabe (1), (2) braucht jetzt nicht abgeschlossen zu sein. Die Festlegung des p-ten Eigenwerts nach dem Verfahren des Satzes 3 setzt voraus, daß man die zu den vorangehenden Eigenwerten gehörigen Eigenfunktionen kennt. Für den Fall $n = 1$, d. h. für $G(y) = g(x)\,y$ hat R. Courant [25]) bei positivem $g(x)$ den p-ten Eigenwert durch ein Maximum-Minimumprinzip in einer solchen Weise festgelegt, daß jene Kenntnis nicht erforderlich ist. Dieses Verfahren läßt sich auch auf die allgemeine Aufgabe (1), (2) übertragen [26]).

Satz 9. *Die Eigenwertaufgabe sei selbstadjungiert und eigentlich definit*[27]). *Ferner seien* $w_1(x), \ldots, w_{p-1}(x)$ *irgendwelche integrierbaren*[28]) *Funktionen. Mit diesen wird*

$$m(w_1, \ldots, w_{p-1}) = \operatorname*{fin}_{y} \frac{\int y F(y)\,dx}{\int y G(y)\,dx}, \tag{83}$$

$$M(w_1, \ldots, w_{p-1}) = \overline{\operatorname*{fin}_{y}} \frac{\int y F(y)\,dx}{\int y G(y)\,dx} \tag{84}$$

gebildet, wobei die $y(x)$ *beliebige zulässige Funktionen sein dürfen, für welche die in* (83) *auftretenden Nenner positiv und die in* (84) *auftretenden Nenner negativ sind und für die außerdem*

$$\int w_\nu y\,dx = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, p-1) \tag{85}$$

---

[25]) R. Courant und D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik I, 2. Aufl., Berlin 1931, S. 351ff.

[26]) Bei dem Beweis des entsprechenden Satzes 6 in K I streiche man g auf S. 779 in Zeile 2, in Gleichung (43) und in der letzten Zeile. Bei dem Beweis des Satzes 7 wird dann die Einführung von w^* überflüssig. Außerdem ist auf S. 779 in der zweiten Zeile von (45) λ_{-p} statt λ_p und in der letzten Summe von (46) p statt r zu lesen.

[27]) Es würde genügen, daß die Aufgabe definit ist. Die Änderungen, die dann in der Formulierung des Satzes nötig sind, möge sich der Leser überlegen.

[28]) Der Satz bleibt bestehen, wenn das Wort „integrierbar" durch „stetig" ersetzt wird.

ist. Dann gilt

$$m \leqq \lambda_p, \quad M \geqq \lambda_{-p}, \tag{86}$$

soweit diese Eigenwerte existieren.

Werden nun noch die Funktionen $w_1, \ldots, w_{p-1}$ *variiert, so ist*

$$\begin{cases} \lambda_p = \operatorname{Max}_w m(w_1, \ldots, w_{p-1}), \\ \lambda_{-p} = \operatorname{Min}_w M(w_1, \ldots, w_{p-1}). \end{cases} \tag{87}$$

Beweis. Der zweite Teil des Satzes folgt mit Satz 3 aus dem ersten Teil, da für $w_\nu = G(\psi_\nu)$ bzw. $G(\psi_{-\nu})$

$$m = \lambda_p, \quad M = \lambda_{-p}$$

ist. Für den Beweis des ersten Teiles genügt es, eine Funktion $y(x)$ anzugeben, welche die oben angegebenen Eigenschaften hat und für welche die auf der rechten Seite von (83) und (84) stehenden Brüche $\leqq \lambda_p$ bzw. $\geqq \lambda_{-p}$ sind. Für die Bildung einer solchen Funktion wird

$$y(x) = \sum_{q=1}^{p} a_q \psi_q(x)$$

gesetzt, wobei die ψ_q die in Satz 3 angegebene Bedeutung haben. Dann ist

$$\int y G(y)\, dx = \sum_{q,r} a_q a_r \int \psi_q G(\psi_r)\, dx = \sum_q a_q^2 > 0,$$

falls nicht alle a_q Null sind. Die Gleichungen (85) sind erfüllt, wenn die a_q den Gleichungen

$$\sum_{q=1}^{p} a_q \int w_\nu \psi_q\, dx = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, p-1)$$

genügen. Diese $p-1$ Gleichungen mit p Unbekannten haben stets eine Lösung, die nicht aus lauter Nullen besteht. Für eine solche Lösung ist dann

$$\begin{aligned} \int y F(y)\, dx &= \sum_{q,r} a_q a_r \int \psi_q F(\psi_r)\, dx \\ &= \sum_{q,r} a_q a_r \lambda_r \int \psi_q G(\psi_r)\, dx \\ &= \sum_q a_q^2 \lambda_q \leqq \lambda_p \sum_q a_q^2 = \lambda_p \int y G(y)\, dx, \end{aligned}$$

woraus die erste der Ungleichungen (86) folgt. Die zweite Ungleichung ergibt sich in entsprechender Weise.

Der Satz 7 von K I lautet hier:

Satz 10. *Die Eigenwertaufgaben*

$$F(y) = G(y), \quad U_\mu(y) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, 2m)$$

und

$$F(y) = G^*(y), \quad U_\mu(y) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, 2m)$$

seien selbstadjungiert und eigentlich definit; ferner sei für jede zulässige Funktion $y(x)$

(88) $$\int y\,G^*(y)\,dx \geqq \int y\,G(y)\,dx.$$

Dann gilt für die Eigenwerte λ_p, λ_p^* *der beiden Aufgaben*

$$\lambda_p^* \leqq \lambda_p,$$

soweit diese Eigenwerte existieren.

Beweis. Zunächst möge die erste der beiden Eigenwertaufgaben positive Eigenwerte λ_p haben. Sind y, y^* zulässige Funktionen, für die

$$K(y) > 0 \quad \text{bzw.} \quad K^*(y^*) = \int y^*\,G^*(y^*)\,dx > 0$$

ist, so ist mit

$$K(y) > 0 \quad \text{auch} \quad K^*(y) > 0$$

erfüllt, d. h. der Bereich der y^* enthält den Bereich der y. Nach Satz 2 ist daher

$$\lambda_1^* = \operatorname*{Min}_{y^*} \frac{J(y^*)}{K^*(y^*)} \leqq \operatorname*{Min}_{y} \frac{J(y)}{K^*(y)} \leqq \operatorname*{Min}_{y} \frac{J(y)}{K(y)} = \lambda_1.$$

Für die höheren Eigenwerte ergibt sich die Behauptung mit Satz 9. Denn sind y, y^* zulässige Funktionen, für die

$$K(y) > 0 \quad \text{und} \quad \int w_\nu\,y\,dx = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, p-1)$$

bzw.

$$K^*(y^*) > 0 \quad \text{und} \quad \int w_\nu\,y^*\,dx = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, p-1)$$

ist, so ist der Bereich der y wegen (88) wieder in dem Bereich der y^* enthalten, und daher ist nach Satz 9

$$m^*(w_1, \ldots, w_{p-1}) = \operatorname*{fin}_{y^*} \frac{J(y^*)}{K^*(y^*)} \leqq \operatorname*{fin}_{y} \frac{J(y)}{K^*(y)}$$

$$\leqq \operatorname*{fin}_{y} \frac{J(y)}{K(y)} = m(w_1, \ldots, w_{p-1}) \leqq \lambda_p.$$

Da dieses für beliebige w_ν gilt, ergibt sich mit dem zweiten Teil von Satz 9. daß $\lambda_p^* \leqq \lambda_p$ ist.

Damit ist die Behauptung für die Eigenwerte der anfangs angegebenen Art bewiesen. Für die anderen Eigenwerte läßt sie sich wieder auf den schon erledigten Fall zurückführen, indem man λ, G durch $-\lambda$, $-G$ ersetzt.

§ 7.

Genäherte Berechnung der Eigenwerte nach Ritz-Galerkin.

Das Verfahren von Ritz-Galerkin zur genäherten Bestimmung der Eigenwerte und der Satz von Kryloff und Bogoliubov [29]) über die Abschätzung

[29]) Für Literaturangaben vgl. K I, S. 782, Fußnote [26]).

der Eigenwerte läßt sich ebenfalls auf die Aufgabe (1), (2) übertragen. Man erhält so den

Satz 11. *Die Aufgabe* (1), (2) *sei selbstadjungiert und eigentlich definit. Ferner sei* $u_1(x), \ldots, u_k(x)$ *ein System zulässiger Funktionen, für welche die Orthogonalitätsbeziehungen*

$$\int u_p G(u_q)\, dx = 0 \qquad (p \neq q)$$

und außerdem die Ungleichungen

$$\int u_p G(u_p)\, dx > 0 \tag{89}$$

bestehen [30]). *Dann sind die Nullstellen der Determinante*

$$D(\lambda) = \text{Det.} \left| \int u_p \left[F(u_q) - \lambda e_{pq} G(u_q) \right] dx \right|$$
$$(p, q = 1, \ldots, k)$$

sämtlich reell. Sind sie der Größe nach geordnet

$$\bar{\lambda}_1 \leqq \bar{\lambda}_2 \leqq \ldots \leqq \bar{\lambda}_k,$$

so ist

$$\lambda_p \leqq \bar{\lambda}_p \qquad (p = 1, \ldots, k).$$

Erfüllen die u_p *statt* (89) *die Ungleichungen*

$$\int u_p G(u_p)\, dx < 0 \tag{89a}$$

und sind dann

$$\bar{\lambda}_{-1} \geqq \bar{\lambda}_{-2} \geqq \ldots \geqq \bar{\lambda}_{-k}$$

die Nullstellen von $D(\lambda)$, *so ist*

$$\lambda_{-p} \geqq \bar{\lambda}_{-p} \qquad (p = 1, \ldots, k).$$

Beweis. Es gilt der Beweis von K I, § 5, wenn man Ausdrücke der Gestalt

$$\int g\, u\, v\, dx \quad \text{durch} \quad \int u\, G(v)\, dx$$

ersetzt.

§ 8.

Das Iterationsverfahren.

Das Iterationsverfahren [31]), das bei einfacheren Typen von Eigenwertaufgaben in der einen oder anderen Form vielfach zur genäherten Berechnung von Eigenwerten und Eigenfunktionen benutzt wird, ist auch bei der allgemeinen Aufgabe (1), (2) anwendbar.

---

[30]) Man kann auch auf die Orthogonalitätsbedingungen verzichten, muß dann jedoch (89) abändern.

[31]) Vgl. hierzu L. Collatz, Zeitschr. f. angewandte Mathematik u. Mechanik **19** (1939), S. 225–231; O. Blumenthal, ebenda **17** (1937), S. 232–244.

Satz 12. *Die Aufgabe* (1), (2) *sei selbstadjungiert, im engeren Sinne definit und abgeschlossen; ferner sei*

$$\int u\,G(u)\,dx \geqq 0 \tag{90}$$

für jede zulässige Funktion $u(x)$, *so daß also alle Eigenwerte positiv sind. Mit einer beliebigen stetigen Funktion* $y_0(x)$ *als Ausgangsfunktion, wobei jedoch* $G(y_0) \not\equiv 0$ *sein soll, löst man nacheinander für* $k = 1, 2, \ldots$ *die Randwertaufgaben*

$$F(y_k) = G(y_{k-1}),\quad U_\mu(y_k) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, 2m). \tag{91}$$

In gewissen festen Intervallen ist dann $y_k(x) \not\equiv 0$ *für alle hinreichend großen* k, *ferner existiert*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y_{k-1}}{y_k}$$

und ist ein Eigenwert λ_r; *schließlich existiert*

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_r^k\, y_k(x)$$

gleichmäßig in $a \leqq x \leqq b$ *und ist eine zu* λ_r *gehörige Eigenfunktion.*

Beweis. Für $k > 0$ sind alle y_k zulässige Funktionen. Für den Beweis kann daher angenommen werden, daß auch schon y_0 eine solche ist. Nach Satz 7 hat dann y_0 eine gleichmäßig konvergente Entwicklung

$$y_0(x) = \sum_p a_p\, \psi_p(x).$$

Die Lösung y_1 von (91) mit $k = 1$ kann mittels der Greenschen Funktion $\Gamma(x, \xi)$ in der Gestalt

$$y_1(x) = \int \Gamma(x, \xi)\, G_\xi(y_0)\, d\xi$$

dargestellt werden, wobei der Index bei G die unabhängige Veränderliche andeuten soll. Wegen $n < m$ ist $\Gamma(x, \xi)$ $2n$-mal stetig differenzierbar nach ξ und eine zulässige Funktion in bezug auf G (vgl. hierzu S. 271). Daher ist auch

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \int y_0(\xi)\, G_\xi(\Gamma)\, d\xi \\ &= \sum_p a_p \int \psi_p(\xi)\, G_\xi(\Gamma)\, d\xi \\ &= \sum_p a_p \int \Gamma(x, \xi)\, G_\xi(\psi_p)\, d\xi. \end{aligned}$$

Da ψ_p der Gleichung

$$F(\psi_p) = \lambda_p\, G(\psi_p)$$

genügt, ist

$$\psi_p(x) = \lambda_p \int \Gamma(x, \xi)\, G_\xi(\psi_p)\, d\xi$$

und somit

$$y_1(x) = \sum_p \frac{a_p}{\lambda_p}\, \psi_p(x).$$

Durch Wiederholung dieses Verfahrens ergibt sich

$$y_k(x) = \sum_p \frac{a_p}{\lambda_p^k} \psi_p(x). \tag{92}$$

Es sei nun a_r der erste von Null verschiedene Fourier-Koeffizient. Ist λ_r ein mehrfacher Eigenwert, so seien $c_r = a_r, \ldots, c_s = a_s$ die Fourier-Koeffizienten, die zu $\lambda_p = \lambda_r$ gehören. Dann folgt aus (92)

$$\lambda_r^k y_k(x) = \sum_{p=r}^{s} c_p \psi_p(x) + \lambda_r^k \sum_{\lambda_p > \lambda_r} \frac{a_p}{\lambda_p^k} \psi_p(x). \tag{93}$$

Da

$$\sum_p |a_p \psi_p(x)|$$

nach Satz 7 unter einer festen Schranke A liegt, ist also, wenn λ_q der kleinste Eigenwert $> \lambda_r$ ist,

$$\left| \lambda_r^k y_k(x) - \sum_{p=r}^{s} c_p \psi_p(x) \right| \leqq A \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_q}\right)^k \to 0 \quad \text{für} \quad k \to \infty.$$

Damit ist der letzte Teil des Satzes bewiesen.

Da $\sum c_p \psi_p$ nur endlich viele Nullstellen haben kann und da die Konvergenz von $\lambda_r^k y_k(x)$ eine gleichmäßige ist, gibt es feste Intervalle, in denen $y_k \neq 0$ für alle hinreichend großen k gilt. In solchen Intervallen gilt dann nach (93)

$$\frac{y_{k-1}}{y_k} = \lambda_r \frac{\sum c_p \psi_p + \lambda_r^{k-1} \sum_{\lambda_p > \lambda_r} \lambda_p^{-k+1} a_p \psi_p}{\sum c_p \psi_p + \lambda_r^k \sum_{\lambda_p > \lambda_r} \lambda_p^{-k} a_p \psi_p} \to \lambda_r \quad \text{für} \quad k \to \infty.$$

Damit ist auch der erste Teil des Satzes bewiesen.

Kommt es nur auf eine genäherte Bestimmung von Eigenwerten, aber nicht von Eigenfunktionen an, so führt das Verfahren schneller zum Ziel, das auf dem folgenden Satz beruht.

Satz 13. *Unter den Voraussetzungen des vorigen Satzes wird mit derselben Folge* $y_0(x), y_1(x), \ldots$

$$\alpha_k = \int y_\nu G(y_{k-\nu})\, dx \qquad (0 \leqq \nu \leqq k)$$

gebildet und

$$\varrho_k = \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}$$

gesetzt. Dann nehmen die ϱ_k *monoton ab und konvergieren gegen einen Eigenwert.*

Beweis. Die Zahlen α_k sind von der Wahl des ν innerhalb der angegebenen Grenzen unabhängig, da für beliebige Zahlen $p \geqq 1$, $q \geqq 0$

$$\int y_p G(y_q)\, dx = \int y_p F(y_{q+1})\, dx = \int y_{q+1} F(y_p)\, dx$$
$$= \int y_{q+1} G(y_{p-1})\, dx .$$

ist. Weiter ist für $k \geqq 1$ und beliebige reelle Zahlen r, s nach (90)

$$0 \leqq \int (r\,y_k + s\,y_{k-1})\,G\,(r\,y_k + s\,y_{k-1})\,dx$$
$$= r^2\,\alpha_{2k} + 2\,r\,s\,\alpha_{2k-1} + s^2\,\alpha_{2k-2},$$

also $\alpha_{2k-2} \geqq 0$, $\alpha_{2k} \geqq 0$ und

$$\alpha_{2k-1}^2 \leqq \alpha_{2k}\,\alpha_{2k-2}. \tag{94}$$

Da die Aufgabe definit ist, gilt weiter

$$0 \leqq \int (r\,y_{k+1} + s\,y_k)\,F\,(r\,y_{k+1} + s\,y_k)\,dx$$
$$= \int (r\,y_{k+1} + s\,y_k)\,G\,(r\,y_k + s\,y_{k-1})\,dx$$
$$= r^2\,\alpha_{2k+1} + 2\,rs\,\alpha_{2k} + s^2\,\alpha_{2k-1},$$

also $\alpha_{2k-1} \geqq 0$, $\alpha_{2k+1} \geqq 0$ und

$$\alpha_{2k}^2 \leqq \alpha_{2k+1}\,\alpha_{2k-1}. \tag{95}$$

Da die Aufgabe im engeren Sinne definit und somit $y_1 \not\equiv 0$ wegen $G(y_0) \not\equiv 0$ ist, ist

$$\alpha_1 = \int y_1\,G(y_0)\,dx = \int y_1\,F\,(y_1)\,dx > 0,$$

also sind nach (94) und (95) alle $\alpha_k > 0$. Daher können die ϱ_k gebildet werden und nehmen nach (94) und (95) monoton ab.

Mit der Entwicklung (92) ergibt sich weiter

$$\alpha_k = \int y_\nu\,G\,(y_{k-\nu})\,dx = \sum_\mu \frac{a_\mu}{\lambda_\mu^\nu} \int \psi_\mu\,G\,(y_{k-\nu})\,dx$$
$$= \sum_\mu \frac{a_\mu}{\lambda_\mu^\nu} \int y_{k-\nu}\,G\,(\psi_\mu)\,dx$$
$$= \sum_{\mu,\varrho} \frac{a_\mu\,a_\varrho}{\lambda_\mu^k} \int \psi_\varrho\,G\,(\psi_\mu)\,dx = \sum_\mu \frac{a_\mu^2}{\lambda_\mu^k},$$

also

$$\varrho_k = \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} = \frac{\Sigma\,a_\mu^2\,\lambda_\mu^{-k+1}}{\Sigma\,a_\mu^2\,\lambda_\mu^{-k}}$$

und hieraus $\varrho_k \to \lambda_r$ mit denselben Schlüssen wie am Schluß des vorigen Beweises.

(Eingegangen am 12. Dezember 1939.)

Der Fundamentalsatz der Algebra und der Intuitionismus.

Herrn Oskar Perron zum 60. Geburtstag am 7. Mai 1940 gewidmet.

Von

Hellmuth Kneser in Tübingen.

Für eine vergleichende Betrachtung darüber, wie die Forderungen des Intuitionismus in das Gefüge mathematischer Beweise eingreifen, ist der Fundamentalsatz der Algebra ein dankbarer Gegenstand. Zwischen Algebra und Analysis stehend hat er Anteil an beiden Gebieten und läßt sich auf verschiedene Art beweisen, je nachdem, von welcher Seite man an ihn herangeht. Wir wollen zuerst die wichtigsten Beweisgedanken überschauen[1]), dann sehen, wieweit sie den intuitionistischen Forderungen genügen oder sich ihnen anpassen lassen, und schließlich eine dabei sich zeigende Lücke ausfüllen, nämlich den Argand-Cauchy-Lipschitzschen Beweis intuitionistisch zurechtmachen. Angefügt wird ein gegenüber dem bisherigen einfacherer Beweis der — für den Intuitionisten nicht selbstverständlichen — Erweiterung des Satzes auf den Fall, daß der höchste Beiwert des gegebenen Polynoms nicht notwendig von Null verschieden vorausgesetzt wird.

§ 1.

Übersicht über die Beweise.

1. Allen Beweisen liegt letzten Endes, wenn auch manchmal an verborgener Stelle, der Gedanke zugrunde, den Betrag des Polynoms

$$f(x) = x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + a_0$$

durch geeignete Wahl des Arguments möglichst zu verkleinern. Dieser Gedanke ist das einzige, was von dem ersten Beweisversuch, dem von d'Alembert [1][2]), bestehen geblieben ist.

2. Die „algebraischen" Beweise benutzen aus der Analysis nur das Vorhandensein der Quadratwurzel aus einer komplexen Zahl und den Satz, daß ein reelles Polynom ungraden Grades eine reelle Nullstelle hat. Die schon vor Gauß angestellten algebraischen Überlegungen gehen in zwei Richtungen:

[1]) Eine ähnliche Durchmusterung gab schon de Loor [24][2]). Wir wollen weniger einzelne durchgeführte Beweise ins Auge fassen, sondern mehr von den immer wiederkehrenden Grundgedanken feststellen, welche Rolle sie in intuitionistischen Beweisen spielen können.

[2]) Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Schriftenverzeichnis am Ende der Arbeit.

2a. Euler [2], Foncenex [3] und Laplace [7] suchen einen quadratischen Faktor von $f(x)$ zu bestimmen, während

2b. Euler [2] und Lagrange [4, 5] ein Polynom graden Grades in zwei Faktoren gleichen Grades aufzuspalten suchen.

Alle diese Beweisversuche unterlagen dem Gaußschen Haupteinwand [6], daß sie die zu beweisende Existenz der Gleichungswurzeln voraussetzen. Die Art, wie Lagrange und Laplace ihre Ansätze durchführten, unterlagen nur diesem Einwand und waren daher, wie A. Kneser [16] bemerkte, in dem Augenblick zu gültigen Beweisen ergänzt, als die neuere Algebra mit Hilfe des allgemeinen Körperbegriffes diese Existenz — wo nicht im Körper der komplexen Zahlen, so doch jedenfalls in einem Erweiterungskörper — festgestellt hatte. Schon vorher hatte Gauß [10] den Ansatz 2a zum Beweis gemacht, indem er das echt algebraische Hilfsmittel der Unbestimmten heranzog und damit Überlegungen anstellte, die auch dem Existenzsatz der modernen Algebra zugrunde liegen.

3. Viele Beweisanordnungen zählen — offen oder in analytischer Verkleidung — die Umläufe, die der Punkt $f(z)$ um den Nullpunkt beschreibt, wenn der Punkt z eine geschlossene Kurve durchläuft. Hierher gehören der erste, dritte und vierte Beweis von Gauß [6, 11, 14] sowie der, den man in einer funktionentheoretischen Vorlesung zu geben pflegt.

4. Von der elementaren Analysis ist der gradeste Weg zum Fundamentalsatz der, den zuerst Argand [8, 9] beschritt. Argand vereinfacht die Anwendung des Grundgedankens 1. gegenüber d'Alembert, benutzt den allgemeinen analytischen Satz vom Vorhandensein der unteren Grenze bzw. des kleinsten Wertes einer Funktion und gewinnt so seinen ganz neuartigen Beweis. Cauchy [12] gab im wesentlichen denselben Beweis, aber in zugänglicherer Gestalt und dürfte damit zu dessen Verbreitung beigetragen haben. Auch bei ihm wird nicht näher begründet, daß $|f(x)|$ irgendwo einen kleinsten Wert annimmt; das wurde erst möglich, nachdem der Allgemeinbegriff der unteren Grenze eingeführt worden war. Dem Argandschen Beweis gliedern sich die mannigfachen Beweisanordnungen an, die die Berufung auf den kleinsten Wert von $|f(x)|$ vermeiden und durch Herstellung einer konvergenten Folge ersetzen. Die erste dieser Anordnungen, die von Lipschitz [15], wird im folgenden noch besprochen.

5. Ähnlich geradezu gehen die „Kontinuitätsbeweise" von Weierstraß [17, 18] und Koebe [19] auf ihr noch weiter gestecktes Ziel los: Sie suchen in dem Polynom

$$\varphi(x) = (x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_n)$$

den Größen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ durch schrittweise kleine Änderungen schließlich solche Werte beizulegen, daß $\varphi(x)$ mit $f(x)$ übereinstimmt.

In eine der hiermit umrissenen Klassen getraue ich mir jeden der vorliegenden Beweise des Fundamentalsatzes — die französische Encyclopédie bringt etwa hundert Hinweise — einzuordnen.

§ 2.

Der Intuitionismus.

Ich will möglichst nicht nur für Kenner des Intuitionismus verständlich sein und erinnere daher vorab an das Folgende. Für den Intuitionisten ist eine reelle Zahl dann und nur dann gegeben, wenn man die Mittel hat, sie — bei genügender Geduld — in beliebig enge rationale Grenzen einzuschließen. Danach kann man von einer gegebenen reellen Zahl nicht ohne weiteres entscheiden, ob sie positiv, negativ oder Null ist, und man kann sogar leicht Zahlen angeben, bei denen diese Entscheidung nach dem gegenwärtigen Stande unserer Kenntnisse nicht möglich ist[3]). Ähnlich ist für den Intuitionisten eine Aussage „A oder B gilt" erst dann begründet, wenn man entscheiden kann, ob A oder B gilt (oder alle beide). Z. B. ist gewiß

$$(|\alpha| + \alpha)(|\alpha| - \alpha) = |\alpha|^2 - \alpha^2 = 0;$$

daß aber einer der Faktoren links verschwindet, kann erst behauptet werden, wenn über das Vorzeichen von α entschieden ist.

Unberührt vom Intuitionismus bleibt die Gültigkeit der für die „algebraischen" Beweise erforderlichen, in § 1, 2 angeführten Hilfssätze aus der Analysis[4]). Dagegen verfallen alle „algebraischen" Beweise mit Ausnahme des Ansatzes von Laplace dem Einwand, daß zu ihrer Durchführung die Entscheidung darüber nötig ist, ob die Diskriminante des gegebenen Polynoms verschwindet oder nicht[5]). Sie sind nämlich nur bei von Null verschiedener

---

[3]) Die bekannteste Art (ähnlich wie z. B. bei Brouwer [23]) ist die folgende: Sei $\gamma_n = (-\frac{1}{2})^n$ oder $\gamma_n = 0$ je nachdem, ob an der n-ten Stelle in der Dezimalbruchentwicklung von π eine bestimmte, bisher in ihr nicht beobachtete Zahlenfolge (etwa drei aufeinanderfolgende Dreien) auftritt oder nicht; dann ist $\alpha = \sum_1^\infty \gamma_n$ eine solche Zahl.

[4]) Wenn auch der Satz, daß eine stetige Funktion, die Werte beiderlei Vorzeichens annimmt, eine Nullstelle hat, dem Intuitionisten nicht gilt: Sei etwa $\varphi(x)$ durch $\varphi(-1) = -1$, $\varphi(0) = \alpha$, $\varphi(1) = |\alpha|$, $\varphi(2) = 1$ und dazwischen als lineare Funktion erklärt; dann ist $\frac{1}{2}$ bzw. $-\alpha/(1+\alpha)$ die einzige Nullstelle von $\varphi(x)$, wenn $\alpha < 0$ bzw. $\alpha > 0$ ist. Welche Zahl Nullstelle von $\varphi(x)$ ist, kann man erst sagen, wenn man über das Vorzeichen von α Bescheid weiß; vorher kann man also die Nullstelle nicht mit beliebiger Genauigkeit angeben.

[5]) Diese Schwierigkeit kann auch an anderer Stelle auftreten; bei v. Staudt [13] z. B. wird zwar die Diskriminante nicht benutzt, dafür aber gelegentlich der größte gemeinsame Teiler zweier Polynome gebildet; und das erfordert ebenfalls die Entscheidung darüber, ob eine Zahl gleich Null ist oder nicht.

Diskriminante durchführbar und verlangen daher, daß man vorweg entscheidet, ob die Diskriminante Null ist oder nicht, und im ersten Falle die Doppelfaktoren beseitigt. Noch schlimmer ist es mit den „algebraischen" Beweisen in moderner Fassung; denn für den Intuitionisten hat der Bereich der reellen Zahlen nicht einmal das Merkmal eines Körpers, daß jede Zahl gleich Null oder von Null verschieden ist. Diese Sachlage war für mich der Anlaß, den Laplaceschen Ansatz nicht in moderner, sondern in Gaußscher Weise durchzuführen[6]). Doch die Hoffnung, dadurch den intuitionistischen Einwänden zu entgehen, war vergebens: an einer anderen Stelle mußte aus dem Verschwinden eines Produktes auf das Verschwinden mindestens eines Faktors geschlossen werden.

De Loor [24] hat den Ausweg beschritten, den Fundamentalsatz zunächst nur für Polynome mit von Null verschiedener Diskriminante zu beweisen und dann durch einen Grenzübergang den allgemeinen Satz abzuleiten. So sind denn die „algebraischen" Beweise durch ein nochmaliges Eingreifen der Analysis intuitionistisch gerechtfertigt.

Mit Umlaufzählung hat Weyl [20] den ersten intuitionistischen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra gegeben; dieser Beweis zeichnet sich durch sein einheitliches Gepräge aus. Der beinahe gleichzeitige Beweis von Brouwer und de Loor [21] benutzt auch die Umlaufzählung, tut aber die Hauptarbeit in der im folgenden Absatz zu schildernden Lipschitzschen Weise und gebraucht den im vorigen Absatz erwähnten Grenzübergang.

Der Argand-Cauchysche Beweis scheint den intuitionistischen Forderungen schärfstens zu widersprechen; benutzt er doch bei strenger Fassung den allgemeinen Begriff der unteren Grenze. Zwar bei den hier gegebenen Umständen läßt sich der kleinste Wert von $|f(x)|$ auch für den Intuitionisten herstellen, aber nicht die Stelle, an der er angenommen wird. Lipschitz [15] scheint das Verfahren auch unbehaglich gefunden zu haben; jedenfalls zog er es vor, eine konvergente Folge $x_\lambda \to x_\infty$ mit $f(x_\lambda) \to 0$ herzustellen, so daß $f(x_\infty) = 0$, also x_∞ die gesuchte Gleichungswurzel ist. Um dies aber bequem durchführen zu können, mußte er voraussetzen, daß keine Doppelwurzeln vorhanden sind, und verfällt damit demselben intuitionistischen Einwand wie die meisten „algebraischen" Beweise. In § 3 und 4 wollen wir sehen, daß man mit einigem Opfer an Bequemlichkeit um jene Voraussetzung herumkommt, daß sich dieser direkteste analytische Beweis auch in intuitionistischer Weise durchführen läßt.

---

[6]) Da öffentlich die Meinung hervorgetreten ist, das Ergebnis meiner Arbeit [25] sei der moderne Beweis von Dörge, benutze ich diese Gelegenheit, um darauf hinzuweisen, daß dies nicht der Fall ist, daß z. B. meine Durchführung des Laplaceschen Ansatzes unabhängig ist von den feineren arithmetischen Eigenschaften des vorgelegten Polynoms.

Beim Kontinuitätsbeweis spielt ebenfalls die Voraussetzung des Fehlens von Doppelwurzeln eine wichtige Rolle; wegen der größeren rechnerischen Verwicklung dürfte sie hier nur mit sehr großen Umständlichkeiten zu vermeiden sein.

§ 3.

Intuitionistischer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.

Sei $n > 1$ und ein Polynom

$$f(x) = x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_0$$

gegeben. Wir wollen eine Folge komplexer Zahlen x_λ herstellen, bei der $|f(x_{\lambda+1})|$ gegenüber $|f(x_\lambda)|$ möglichst wirksam verkleinert ist. Zu dem Zweck setzen wir an

$$f(x_\lambda + y) = f(x_\lambda) + \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu\, y^\nu \tag{1}$$

und suchen y so zu wählen, daß eines der Glieder $b_k y^k$ die anderen stark überwiegt, daß es das Argument von $-f(x_\lambda)$ und einen passenden Betrag hat. Der Beweis von Lipschitz ist auf Grund seiner Voraussetzung nicht verschwindender Diskriminante so angelegt, daß allemal $|b_1|$ über einer festen positiven Schranke und $|f(x_\lambda)|, |b_2|, \ldots, |b_n|$ unter einer festen Schranke liegen. Damit gelingt es, y so zu wählen, daß $|f(x_\lambda + y)|$ nicht größer ist als ein fester echter Bruchteil von $|f(x_\lambda)|$, daß also die Folge $[f(x_\lambda)]$ mindestens wie eine geometrische Reihe gegen Null strebt. Bei dem Argand-Cauchyschen Beweis hat man außer $b_n = 1$ keine Kenntnis über die Werte b_ν und nimmt für k den kleinsten Wert, bei dem $b_k \neq 0$ ist. Dann muß man $|y|$ hinreichend klein machen, damit das Glied $b_k y^k$ die anderen überwiegt, und erhält eine Verkleinerung von $|f(x_\lambda + y)|$ gegenüber $|f(x_\lambda)|$, kann aber nicht sagen um wieviel. Ist z. B. $|b_1|$ nicht Null, aber äußerst klein, so muß $|y|$ sehr klein sein, damit das Glied $b_1 y$ die anderen überwiegt. Ist aber etwa $|b_2|$ nicht besonders klein und die folgenden Werte $|b_\nu|$ nicht allzu groß, so kann man günstigenfalls $|y|$ so groß wählen, daß das Glied $b_2 y^2$ das vorhergehende stark übertrifft, und gleichzeitig so klein, daß es die folgenden Glieder stark übertrifft. Bei geeignetem Argument von y wird dann eine stärkere Verkleinerung von $|f(x_\lambda + y)|$ erreicht werden können, als wenn $b_1 y$ die Hauptrolle spielt.

Untersucht man überhaupt genauer, für welche Beträge von y ein Glied der Summe in (1) die anderen in hinreichendem Maße überwiegen und welche Werte dann der Betrag dieses Gliedes annehmen kann, so ist ein für unseren Zweck geeignetes Ergebnis der folgende

Hilfssatz. *Zu jedem $n > 1$ gibt es eine positive Zahl $\omega > 1$ mit der folgenden Eigenschaft: Sind $\beta_1, \ldots, \beta_n$ nicht negative Zahlen, insbesondere*

$\beta_n = 1$, *und ist* $t > 0$, *so gibt es eine Nummer* k $(1 \leqq k \leqq n)$ *und eine positive Zahl* ξ *derart, daß*

$$t < \beta_k \xi^k < \omega t,$$

$$\beta_k \xi^k > (2n-2)\beta_\nu \xi^\nu \quad \text{für} \quad 1 \leqq \nu \leqq n,\ \nu \neq k$$

gilt.

Da der Beweis etwas umständlich ist, bringe ich ihn für sich im § 4.

Auf Grund des Hilfssatzes können wir leicht eine konvergente Zahlenfolge $x_0, x_1, \ldots$ mit $f(x_\lambda) \to 0$ herstellen. Das Anfangsglied x_0 setzen wir beliebig an, etwa $x_0 = 0$. Ist dann x_λ schon festgesetzt, so gilt eine der beiden Ungleichungen

(A) $\quad |f(x_\lambda)| < 2^{-\lambda-1}$, $\qquad$ (B) $\quad |f(x_\lambda)| > 2^{-\lambda-2}$

oder beide[7]). Gelten beide, so entscheiden wir nach Willkür für einen der beiden Fälle. Gilt (A), so setzen wir $x_{\lambda+1} = x_\lambda$ und haben damit

$$|f(x_{\lambda+1})| < 2^{-\lambda-1}. \tag{2}$$

Gilt (B), so entwickeln wir nach (1) und wenden den Hilfssatz an mit $\beta_\nu = |b_\nu|$, $t = \omega^{-1}|f(x_\lambda)|$. Er gibt uns k und ξ mit

$$\omega^{-1}|f(x_\lambda)| < \beta_k \xi^k < |f(x_\lambda)|, \tag{3}$$

$$\beta_k \xi^k > (2n-2)\beta_\nu \xi^\nu \quad \text{für} \quad 1 \leqq \nu \leqq n,\ \nu \neq k. \tag{4}$$

Jetzt stellen wir $f(x_\lambda)$ und b_k durch Betrag und Argument dar:

$$f(x_\lambda) = |f(x_\lambda)|\, e^{i\varphi}, \quad b_k = \beta_k e^{i\psi}$$

— das ist auch für den Intuitionisten möglich, da in (B) und (3) positive untere Schranken für die Beträge vorliegen — und setzen

$$y = \xi e^{i(\varphi - \psi + \pi)/k}, \quad x_{\lambda+1} = x_\lambda + y.$$

Dann wird auf Grund von (3) und (4)

$$\begin{aligned}
|f(x_{\lambda+1})| &= \Big|f(x_\lambda) + \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu y^\nu\Big| \\
&\leqq |f(x_\lambda) + b_k y^k| + \Big|\sum_{\nu \neq k} b_\nu y^\nu\Big| \\
&< \Big||f(x_\lambda)|\, e^{i\varphi} + \beta_k e^{i\psi} \cdot \xi^k e^{i(\varphi - \psi + \pi)} + \frac{n-1}{2n-2}\beta_k \xi^k \\
&= \Big||f(x_\lambda)| - \beta_k \xi^k\Big| + \tfrac{1}{2}\beta_k \xi^k \\
&= |f(x_\lambda)| - \tfrac{1}{2}\beta_k \xi^k,
\end{aligned}$$

$$|f(x_{\lambda+1})| < |f(x_\lambda)|\Big(1 - \frac{1}{2\omega}\Big). \tag{5}$$

Jetzt folgt

$$|f(x_\lambda)| < \mathrm{Max}\,[1, |f(x_0)|]\Big(1 - \frac{1}{2\omega}\Big)^\lambda \tag{6}$$

[7]) Der Intuitionist kann eine Fallunterscheidung nach $u < v$ oder $u \rightarrow v$ nicht machen, wohl aber eine solche wie die hier benutzte. Näheres darüber in § 4.

für $\lambda > 0$. Im Falle (A) gilt ohne weiteres (6) mit $\lambda + 1$ statt λ, da

$$\omega > 1, \quad \frac{1}{2} < 1 - \frac{1}{2\omega}$$

ist. Im Falle (B) aber folgt aus (6) nach (5) die entsprechende Ungleichung mit $\lambda + 1$ statt λ, und zwar auch wenn statt (6), wie es für $\lambda = 0$ der Fall sein kann, nur die entsprechende Gleichheit besteht. Damit ist (6), d. h.

$$\lim_{\lambda \to \infty} f(x_\lambda) = 0 \tag{7}$$

bewiesen.

Nun schätzen wir noch die Größe $|x_{\lambda+1} - x_\lambda| = \xi$ ab. Im Falle (A) ist sie gleich Null. Im Falle (B) entnehmen wir, wenn $k = n$ ist,

$$\xi^n < |f(x_\lambda)|$$

aus (3); für $k \neq n$ nehmen wir (3) und (4) (mit $\nu = n$) zusammen:

$$(2n - 2)\,\xi^n < \beta_k\,\xi^k < |f(x_\lambda)|.$$

In jedem Falle ist also

$$|x_{\lambda+1} - x_\lambda| < \sqrt[n]{|f(x_\lambda)|} < \sqrt[n]{\mathrm{Max}\,[1, |f(x_0)|]} \cdot \left(1 - \frac{1}{2\omega}\right)^{\frac{\lambda}{n}}$$

Daher strebt die Folge (x_λ) einem Grenzwert x_∞ zu, und wegen (7) und der Stetigkeit von $f(x)$ an dieser Stelle ist

$$f(x_\infty) = 0.$$

Damit ist der Fundamentalsatz der Algebra bewiesen.

§ 4.

Beweis des Hilfssatzes.

Zur Aufstellung des Hilfssatzes kommt man folgendermaßen. Von den Gliedern $b_\nu y^\nu$ in (1) soll eines, etwa $b_k y^k$, die anderen hinreichend überwiegen, sein Betrag etwa mehr als doppelt so groß sein als die Summe der Beträge der übrigen. Schreiben wir β_ν für $|b_\nu|$ und ξ für $|y|$, so heißt das

$$\beta_k\,\xi^k > 2 \sum_{\nu \neq k} \beta_\nu\,\xi^\nu.$$

Diese Forderung vergröbern wir zu

$$\beta_k\,\xi^k > (2n - 2)\,\beta_\nu\,\xi^\nu \quad \text{für} \quad 1 \leqq \nu \leqq n,\ \nu \neq k; \tag{8}$$

das ist die eine Behauptung des Hilfssatzes. Es fragt sich nun, welche Werte unter dieser Bedingung die Größe $\beta_k\,\xi^k$ haben kann. Um dieser Frage näher zu kommen, gehen wir zu Logarithmen über und schreiben

$$\gamma_\nu = \log \beta_\nu, \qquad \eta = \log \xi, \qquad \zeta = \log (2n - 2).$$

Daß auch $\beta_\nu = 0$ sein kann, soll uns nicht bekümmern und schadet übrigens den folgenden Betrachtungen nicht. Zeichnen wir in der X-Y-Ebene die

Punkte P_ν mit den Koordinaten ν, γ_ν (in den Figuren mit vollen Kreisen angegeben) und die Punkte Q_ν mit den Koordinaten $\nu, \gamma_\nu + \zeta$ (leere Kreise in den Figuren) ein, so besagt (8), daß die Punkte Q_ν mit $\nu \neq k$ unter der Geraden

$$\eta X + Y = \eta k + \gamma_k \tag{9}$$

liegen müssen. Diese geht durch P_k und hat die Steigung $-\eta$; für diese Steigung sind bei jedem k nur gewisse Werte, vielleicht gar keine zulässig. In Fig. 1 sind durch P_2 und P_3 keine Graden (9) zulässig; die zulässigen

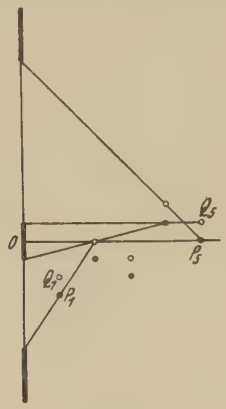


Fig. 1.

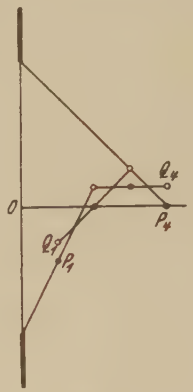


Fig. 2.

Graden durch P_4 liegen zwischen den beiden gezeichneten; die zulässigen Graden durch P_1 und P_5 verlaufen steiler als die eingezeichneten. Die Ordinate des Schnittpunktes einer Graden (9) mit der Y-Achse ist $\eta k + \gamma_k$, der Logarithmus der für uns wichtigen Größe $\beta_k \xi^k$. Unsere Frage heißt also: Welche Punkte der Y-Achse sind deren Schnittpunkte mit zulässigen Graden (9)? In den Figuren sind die von Schnittpunkten erfüllten Teile der Y-Achse stark ausgezogen. Eine leichte Überlegung führt zu der Einsicht, daß die nicht stark ausgezogenen Strecken keine größere Gesamtlänge haben können als in dem schlimmsten, mit $n = 4$ in Fig. 2 dargestellten Falle, daß für $1 < \nu < n$ immer P_ν auf der Graden $Q_{\nu-1} Q_{\nu+1}$ liegt. Diese Gesamtlänge ist aber durch n und ζ, d. h. durch n allein bestimmt, und so kommt man zum Wortlaut des Hilfssatzes.

Diese Betrachtung gibt den Leitfaden für einen intuitionistisch einwandfreien Beweis des Hilfssatzes. Bei ihm müssen wir die sonst übliche Entscheidung zwischen der Gültigkeit der Ungleichungen $a < b$ und $a \geqq b$ vermeiden. Statt dessen kann man aber sagen: ist $a < b$, so gilt für jede reelle Zahl x entweder $a < x$ oder $x < b$. Schließt man nämlich a, b und x ein in rational begrenzte Strecken, deren Länge kleiner ist als $\frac{1}{3}(b - a)$, und sind nicht beide Grenzzahlen der x enthaltenden Strecke größer als die

Grenzzahlen der a enthaltenden Strecke, so sind sie beide kleiner als die Grenzzahlen der b enthaltenden Strecke. Gelten beide Ungleichungen $a < x < b$ und hängt der weitere Verlauf des Beweises davon ab, welche von beiden gilt, so entscheiden wir uns willkürlich für eine von beiden. Für die Einordnung einer positiven Zahl x zwischen die Glieder einer geometrischen Reihe $\ldots, q^{-1}, 1, q, q^2, \ldots$ $(0 < q < 1)$ ergibt sich das Folgende. Bei jedem n gilt $q^{n+1} < x$ oder $x < q^n$; für hinreichend große n nur die erste, für hinreichend große negative n nur die zweite Ungleichung. Ist m der größte Wert von n, für den die zweite Ungleichung gilt, so haben wir

$$q^{m+2} < x < q^m.$$

Seien nun, wie der Hilfssatz voraussetzt, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ nicht negative Zahlen und $\beta_n = 1$. Wir wählen ein q mit $0 < q < 1$. Ist $1 \leqq k < n$ und $\beta_k > 0$, so ordnen wir die größte der Zahlen

$$\left[(2n-2)\frac{\beta_\nu}{\beta_k}\right]^{\frac{1}{\nu-k}} \qquad (k < \nu \leqq n)$$

— sie ist positiv wegen $\beta_n = 1$ — in die geometrische Reihe mit dem Quotienten q ein. Das gibt eine ganze Zahl c mit der Eigenschaft, daß

$$\left[(2n-2)\frac{\beta_\nu}{\beta_k}\right]^{\frac{1}{\nu-k}} < q^\alpha \qquad (k < \nu \leqq n)$$

gilt für alle $\alpha \leqq c$, und

$$\left[(2n-2)\frac{\beta_\nu}{\beta_k}\right]^{\frac{1}{\nu-k}} > q^{c+2}$$

für mindestens eines dieser ν, etwa für $\nu = \nu'_k$. Nach leichter Umformung und mit der Bezeichnung $-m'_k$ statt c und $-m$ statt α heißt dies

$$k < \nu'_k \leqq n, \tag{10}$$

$$\beta_k q^{mk} > (2n-2)\beta_\nu q^{m\nu} \quad \text{für} \quad k < \nu \leqq n \quad \text{und} \quad m \geqq m'_k, \tag{11}$$

$$\beta_k q^{(m'_k-2)k} < (2n-2)\beta_{\nu'_k} q^{(m'_k-2)\nu'_k}. \tag{12}$$

Ebenso vergleichen wir ein positives β_k mit β_ν für $\nu < k$: ist $1 < k \leqq n$ und $\beta_k > 0$, so suchen wir die größte der Zahlen

$$\left[(2n-2)\frac{\beta_\nu}{\beta_k}\right]^{\frac{1}{k-\nu}} \qquad (\nu = 1, \ldots, k-1)$$

— wegen $\nu < k$ nehmen wir den entgegengesetzten Exponenten wie vorher — in die geometrische Reihe mit dem Quotienten q einzuordnen. Allerdings braucht diese Zahl nicht positiv zu sein; aber jedenfalls gilt

$$\left[(2n-2)\frac{\beta_\nu}{\beta_k}\right]^{\frac{1}{k-\nu}} < q^m \qquad (\nu = 1, \ldots, k-1) \tag{13}$$

für jedes hinreichend große negative m. Lassen wir nun m wachsend die Reihe der ganzen Zahlen bis zu einer gewissen Stelle durchlaufen, so bleiben

entweder die Ungleichungen (13) gültig — dies bezeichnen wir als „Fall P“ — oder es ergibt sich eine ganze Zahl $m''(k)$, bei der zuerst eine der Ungleichungen (13), etwa die mit $\nu = \nu''(k)$, durch die Ungleichung

$$\left[(2n-2)\frac{\beta_\nu}{\beta_k}\right]^{\frac{1}{k-\nu}} > q^{m+2}$$

ersetzt werden kann — dies nennen wir „Fall Q“. Es gelten also die Ungleichungen

$$1 \leqq \nu''(k) < k, \tag{14}$$

$$\beta_k q^{mk} > (2n-2)\beta_\nu q^{m\nu} \quad \text{für} \quad m \leqq m''(k),\ \nu = 1, \ldots, k-1, \tag{15}$$

$$\beta_k q^{[m''(k)+2]k} < (2n-2)\,\beta_{\nu''(k)}\, q^{[m''(k)+2]\nu''(k)} \tag{16}$$

im folgenden Sinne: im Fall P sind m'' und ν'' nicht erklärt und (15) gilt für so große Werte m, wie wir sie brauchen; im Falle Q gelten (14), (15) und (16) so, wie sie dastehen.

Man sieht, was bisher erreicht ist: wenn $\beta_k > 0$ und $m'(k) \leqq m''(k)$ ist, so besagen (11) und (15), daß q^m für $m' \leqq m \leqq m''$ ein zulässiger Wert für ξ ist, d. h. ein solcher, für den das Glied $b_k y^k$ aus (1) die übrigen stark genug überwiegt. Die Ungleichungen (10) und (12), (14) und (16) zeigen, daß m' und m'' nahezu die weitesten Schranken für m sind.

Nun heißt es noch eine Verbindung schaffen zwischen den zulässigen Werten $\beta_k \xi^k$, die bei verschiedenen Nummern k mit $m'(k) \leqq m''(k)$ auftreten können. Wir suchen eine absteigende Folge von Nummern $k_0, k_1, \ldots$, die dafür in Betracht kommen, daß bei ihnen $m'(k) \leqq m''(k)$ ist. Dazu muß β_k verhältnismäßig groß sein. Nun liefert (16) zu beliebigem k eine Nummer $\nu = \nu''(k)$, für die β_ν wenigstens nach unten beschränkt ist. Also setzen wir

$$k_0 = n$$

und, wenn k_λ erklärt ist und für diesen Wert der Fall Q eintritt

$$k_{\lambda+1} = \nu''(k_\lambda).$$

Um die folgenden Formeln von Anhängseln zu entlasten, schreiben wir

$$k_\lambda = g,\ \ k_{\lambda+1} = \nu''(g) = h,\ \ \nu'(h) = j.$$

Wegen (10) und (14) ist dann

$$h < g,\ \ h < j,$$

und wir unterscheiden die Fälle

U: $\quad h < g < j,$

V: $\quad h < g = j,$

W: $\quad h < j < g.$

Im Falle U setzen wir $k = g$, $\nu = j$, $m = m'(g)$ in die Ungleichung (11) ein, $k = h$, $\nu = g$, $m = m'(h)$ in (11) und $k = h$, $\nu'(k) = j$ in (12). Das gibt

$$\beta_g q^{m'(g)(g-j)} > (2n-2)\beta_j,$$

$$\beta_h q^{m'(h)(h-g)} > (2n-2)\beta_g,$$

$$(2n-2)\beta_j q^{[m'(h)-2](j-h)} > \beta_h.$$

Multiplikation der rechten und linken Seiten dieser drei Ungleichungen ergibt

$$q^{[m'(h)-m'(g)](j-g)} > (2n-2)q^{2(j-h)},$$

$$q^{m'(h)-m'(g)} > (2n-2)^{\frac{1}{j-g}} q^{2\frac{j-h}{j-g}} \geqq (2n-2)^{\frac{1}{n-1}} q^{2n-2} \tag{17}$$

(das letzte wegen $1 \leqq j-g \leqq n-1$). Im Falle V setzen wir $k = h$, $\nu'(k) = g$ in (12) ein und $k = g$, $\nu''(k) = h$ in (16):

$$(2n-2)\beta_g q^{[m'(h)-2](g-h)} > \beta_h,$$

$$(2n-2)\beta_h q^{[m''(g)+2](h-g)} > \beta_g.$$

Multiplikation ergibt

$$(2n-2)^2 q^{[m'(h)-m''(g)-4](g-h)} > 1,$$

$$q^{m'(h)-m''(g)} > (2n-2)^{\frac{-2}{g-h}} q^4 \geqq (2n-2)^{-2} q^4. \tag{18}$$

Im Falle W schließlich setzen wir $k = g$, $\nu''(k) = h$ in (16) ein, $k = h$, $\nu'(k) = j$ in (12) und $k = g$, $\nu = j$, $m = m''(g)$ in (15):

$$(2n-2)\beta_h q^{[m''(g)+2](h-g)} > \beta_g,$$

$$(2n-2)\beta_j q^{[m'(h)-2](j-h)} > \beta_h,$$

$$\beta_g q^{m''(g)(g-j)} > (2n-2)\beta_j.$$

Multiplikation ergibt

$$(2n-2)q^{[m'(h)-m''(g)](j-h)-2(g-h+j-h)} > 1,$$

$$q^{m'(h)-m''(g)} > (2n-2)^{\frac{-1}{j-h}} q^{2+2\frac{g-h}{j-h}} \geqq (2n-2)^{-1} q^{n+1}. \tag{19}$$

Die Schlußglieder von (17), (18) und (19) sind bei fest gewähltem q nur von n abhängige positive Zahlen, von denen übrigens zwei kleiner sind als Eins. Wir bezeichnen die kleinste unter ihnen mit $A(n)$ und fassen (17), (18) und (19) zusammen, indem wir von den beiden Ausdrücken, die in (17), (18) und (19) links stehen, den größeren beibehalten. So erhalten wir

$$\operatorname{Max}(q^{m'(h)-m'(g)}, q^{m'(h)-m''(g)}) = q^{m'(h)-\operatorname{Max}[m'(g),m''(g)]} > A(n)$$

oder, indem wir zu den früheren Bezeichnungen zurückkehren,

$$q^{m'(k_{\lambda+1})-\operatorname{Max}[m'(k_\lambda),m''(k_\lambda)]} > A(n) \tag{20}$$

und dabei ist

$$0 < A(n) < 1. \tag{21}$$

Von den Nummern $k_0, k_1, \ldots$ sind nur die für uns wichtig, für die bei geeignetem m die Ungleichungen (8) mit $\xi = q^m$ gelten, d. h. im Hinblick auf (11) und (12), (15) und (16) im wesentlichen, daß $m'(k) \leqq m''(k)$ ist. Hinzu kommt noch $k_0 = n$ und ein etwaiger Wert k_λ, bei dem der Fall P eintritt. Von allen diesen Werten seien k_φ und k_ψ zwei benachbarte, also

$$m'(k_\varrho) > m''(k_\varrho) \quad \text{für} \quad \varphi < \varrho < \psi.$$

Es ist also

(22) $$\operatorname{Max}[m'(k_\varphi),\ m''(k_\varphi)] = m''(k_\varphi), \quad \text{wenn} \quad \varphi > 0;$$

(23) $$\operatorname{Max}[m'(k_\varrho),\ m''(k_\varrho)] = m'(k_\varrho), \quad \text{für} \quad \varphi < \varrho < \psi.$$

Für $\varphi = 0$, $k_\varphi = k_0 = n$ ist $m'(k_\varphi)$ nicht erklärt; aber dann kann wegen $k_\varphi = g = n$ der Fall U, der einzige, in dem $m'(g)$ auftritt, nicht vorkommen — es ist ja $j \leqq n = g$ — und so ergibt sich hier statt (20) einfach

(24) $$q^{m'(k_1) - m''(k_0)} > A(n).$$

Setzen wir nun in (20) statt λ der Reihe nach $\varphi,\ \varphi + 1, \ldots,\ \psi - 1$, so ergeben sich mit Rücksicht auf (22) und (23) die Ungleichungen

$$\begin{aligned} q^{m'(k_{\varphi+1}) - m''(k_\varphi)} &> A(n), \\ q^{m'(k_{\varphi+2}) - m'(k_{\varphi+1})} &> A(n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q^{m'(k_\psi) - m'(k_{\psi-1})} &> A(n) \end{aligned}$$

(ist $\varphi = 0$, so stimmt die erste mit (24) überein). Multiplikation ergibt

(25) $$q^{m'(k_\psi) - m''(k_\varphi)} > A(n)^{\psi - \varphi} \geqq A(n)^{n-1}.$$

Wir bauen jetzt eine Zahlenfolge auf, die uns endlich zum Beweis des Hilfssatzes führt. Sie beginnt, von links unbegrenzt, als geometrische Reihe mit dem Quotienten q^n:

(26) $$\ldots,\ \beta_n q^{n(m-1)},\ \beta_n q^{nm},\ \ldots$$

Wir setzen sie fort, soweit wir wollen oder es nötig haben, außer, wenn Fall Q eintritt. Dann ist $m''(n)$ erklärt, und wir brechen die Folge (26) vorläufig mit dem Gliede $\beta_n q^{n m''(n)}$ ab. Nun sei α das erste auf $k_0 = n$ folgende Glied der Folge $k_0, k_1, \ldots$, bei dem Fall P vorliegt oder, sofern bei ihm Fall Q eintritt, $m'(\alpha) \leqq m''(\alpha)$ ist. Dann setzen wir die Folge (26) folgendermaßen als geometrische Reihe mit dem Quotienten q^α fort:

$$\ldots,\ \beta_n q^{n m''(n)};\ \beta_\alpha q^{\alpha m'(\alpha)},\ \beta_\alpha q^{\alpha [m'(\alpha)+1]},\ \ldots$$

und zwar soweit wir wollen oder es nötig haben, außer wenn Fall Q eintritt. Dann ist $m''(\alpha)$ erklärt, und wir brechen die Folge wieder vorläufig mit dem Gliede $\beta_\alpha q^{\alpha m''(\alpha)}$ ab. Ganz wie vorher sei jetzt γ das erste auf α folgende Glied der Folge $k_0, k_1, \ldots$, bei dem Fall P vorliegt oder, wenn Fall Q ein-

tritt, $m'(\gamma) \leqq m''(\gamma)$ ist. Dann setzen wir unsere Folge folgendermaßen als geometrische Reihe mit dem Quotienten q^γ fort:

$$\ldots,\ \beta_\alpha q^{\alpha m''(\alpha)};\ \beta_\gamma q^{\gamma m'(\gamma)},\ \beta_\gamma q^{\gamma[m'(\gamma)+1]},\ \ldots$$

So können wir die Folge unbeschränkt fortsetzen. Vorläufig abbrechen müssen wir sie nur, wenn bei einem ihrer Abschnitte, der aus Gliedern $\beta_\varepsilon q^{\varepsilon m}$ besteht, für $k = \varepsilon$ der Fall Q eintritt. Dann ist $\varepsilon > 1$ und in der Folge $k_0, k_1, \ldots$ gibt es noch hinter ε weitere Glieder. Unter diesen suchen wir, so wie es eben zweimal geschildert wurde, das erste, bei dem Fall P eintritt oder andernfalls $m' \leqq m''$ ist. Solange nämlich bei einem Gliede k_λ der Fall Q mit $m'(k_\lambda) > m''(k_\lambda)$ vorliegt, gibt es noch ein folgendes Glied $k_{\lambda+1}$. Gelangen wir aber in der — absteigenden — Folge $k_0, k_1, \ldots$ zum Gliede $k_\omega = 1$, so behandeln wir es sinngemäß nach Fall P d. h. wir beschließen die Folge (26) mit der nach rechts unbegrenzten geometrischen Reihe

$$\ldots;\ \beta_1 q^{m'(1)},\ \beta_1 q^{m'(1)+1},\ \ldots$$

Die so aufgestellte Zahlenfolge bezeichnen wir für den Augenblick mit

$$\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots$$

Zwei Nachbarglieder a_ν und $a_{\nu+1}$ gehören entweder einem der Abschnitte an; dann ist

$$a_{\nu+1} = a_\nu q^\varkappa \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq n). \tag{27}$$

Oder wir befinden uns gerade an einer der Abbruchstellen; dann tritt die Überlegung ein, die zu (25) führte, es ist mit der dortigen Bezeichnung

$$a_\nu = \beta_{k_\varphi} q^{k_\varphi m''(k_\varphi)},\quad a_{\nu+1} = \beta_{k_\psi} q^{k_\psi m'(k_\psi)}.$$

Wegen $\varphi < \psi$, $k_\varphi > k_\psi$ ist jetzt (11) mit $k = k_\psi$, $\nu = k_\varphi$, $m = m'(k_\psi)$ anwendbar und liefert

$$\begin{aligned} a_{\nu+1} &> (2n-2)\beta_{k_\varphi} q^{k_\varphi m'(k_\psi)}, \\ &= (2n-2)\, a_\nu\, q^{k_\varphi[m'(k_\psi) - m''(k_\varphi)]}. \end{aligned}$$

und hieraus folgt nach (25) die Beziehung

$$a_{\nu+1} > a_\nu (2n-2)\, A(n)^{(n-1)^2}. \tag{28}$$

Nun bedenken wir noch, daß jede Abbruchstelle einem Vorrücken in der Folge $k_0, k_1, \ldots$, d. h. einem Rückschritt in der Reihe $1, 2, \ldots, n$ entspricht. Also können höchstens $n-1$ Abbrüche vorkommen. An diesen Stellen gilt (28), sonst (27). Daher gilt

$$\begin{aligned} a_\nu &\to 0 \quad \text{für} \quad \nu \to \infty \\ a_\nu &\to +\infty \quad \text{für} \quad \nu \to -\infty. \end{aligned} \tag{29}$$

Wir wählen jetzt ω und ω_1 gemäß

$$\omega > \omega_1 > \operatorname{Max}\left[q^{-n},\ (2n-2)^{-1} A(n)^{-(n-1)^2}\right]. \tag{30}$$

Ist dann t irgendeine positive Zahl, so gilt bei jedem ν eine der Ungleichungen

$$a_\nu < t\omega, \quad a_\nu > t\omega_1,$$

und zwar wegen (29) bei hinreichend großem ν die erste, bei hinreichend großem negativem ν die zweite. Sei $\nu = \varkappa - 1$ die letzte Nummer, bei der die zweite Ungleichung gilt; dann ist

$$a_{\varkappa-1} > t\omega_1, \quad a_\varkappa < t\omega$$

und wegen (27) oder (28) und (30) schließlich

$$a_\varkappa \geqq a_{\varkappa-1} \operatorname{Min}\left[q^n, (2n-2)\,A\,(n)^{(n-1)^2}\right] > \frac{a_{\varkappa-1}}{\omega_1} > t,$$

$$t < a_\varkappa < t\omega.$$

Die Zahlen $a_\varkappa$ sind aber von der Gestalt $\beta_k \xi^k$ mit $\xi = q^m$, $m'(k) \leqq m \leqq m''(k)$, so daß (11) und (15) gelten. Damit sind die Behauptungen des Hilfssatzes bewiesen.

§ 5.

Intuitionistische Erweiterung des Fundamentalsatzes der Algebra.

Unter dieser Überschrift hat Brouwer [22] bewiesen, daß sich jedes Polynom, bei dem, wenn nicht der höchste, so doch irgendein Beiwert von Null verschieden ist, sich in Faktoren der Gestalt $a + bx$ zerlegen läßt, wobei von den Beiwerten a und b jeweils mindestens einer von Null verschieden ist. („Von Null verschieden" bedeutet hier immer das, was in der intuitionistischen Kunstsprache „positiv von Null verschieden" genannt wird: eine Zahl a ist positiv von Null verschieden, wenn man eine positive rationale Zahl r angeben kann, derart, daß $|a| > r$ ist.) Brouwer benutzt dabei wieder die Annäherung des gegebenen Polynoms durch eines mit rationalen Beiwerten. Ich bemerke hier, daß die Erweiterung des Fundamentalsatzes sich ganz leicht aus dem Fundamentalsatz selbst ableiten läßt. Sei

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

das gegebene Polynom und etwa $a_k \neq 0$. Wir suchen zunächst einen Wert c mit $f(c) \neq 0$. Fassen wir die Gleichungen

$$f(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + \ldots + a_n \lambda^n \quad (\lambda = 0, 1, \ldots, n)$$

als lineare Gleichungen für $a_0, \ldots, a_n$ auf, so ist ihre Determinante als Vandermandesche Determinante von Null verschieden, und die Gleichungen ergeben eine Darstellung

$$a_k = C_0 f(0) + \ldots + C_n f(n) \tag{31}$$

in der $C_0, \ldots, C_n$ bestimmte rationale Zahlen sind und nicht alle verschwinden, wie das Beispiel $f(x) = x^k$ zeigt. Nun gilt für $f(0), \ldots, f(n)$ jeweils eine der Ungleichungen

$$|f(\lambda)| < \frac{|a_k|}{\Sigma |C_\nu|}, \quad |f(\lambda)| > \frac{|a_k|}{2\,\Sigma |C_\nu|},$$

und zwar nicht immer die erste, weil sonst (31) nicht bestehen könnte. Ein Wert von λ, bei dem die zweite Ungleichung gilt, ist der gesuchte Wert c. Nun setzen wir

$$g(y) = y^n f\left(c + \frac{1}{y}\right);$$

dann ist $g(y)$ ein Polynom n-ten Grades mit dem höchsten Beiwert $f(c) \neq 0$. Nach der üblichen Folgerung aus dem Fundamentalsatz der Algebra gibt es eine Zerlegung

$$g(y) = f(c) \prod_{\nu=1}^{n} (y - \alpha_\nu).$$

Setzt man hierin $y = \frac{1}{x - c}$ ein, so folgt

$$f(x) = f(c) \prod_{\nu=1}^{n} (1 + \alpha_\nu c - \alpha_\nu x),$$

und dies ist die behauptete Zerlegung, wenn man noch den Faktor $f(c)$ zu einem der folgenden dazuschlägt.

Schriftenverzeichnis.

1. J. le Rond d'Alembert: Recherches sur le calcul intégral par Mr. d'Alembert. Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres. Année MDCCXLVI (Berlin 1748), S. 182–224.

2. L. Euler: Recherches sur les racines imaginaires des équations. Par M. Euler. Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres. Année MDCCXLIX (Berlin 1751), S. 222–288.

3. F. Daviet de Foncenex: Réflexions sur les quantités imaginaires. Par M. le Chev. Daviet de Foncenex. Miscellanea philosophico-mathematica societatis privatae Taurinensis. Augustae Taurinorum MDCCLIX, S. 113–146.

4. J.-L. Lagrange: Sur la forme des racines imaginaires des équations. Par M. de la Grange, Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des sciences et belles lettres. Année MDCCLXXVII (Berlin 1774), S. 222–258.

5. J.-L. Lagrange: De la résolution des équations de tous les degrés. Paris, An VI (= 1797/8). Hierin: Note IX, S. 181–201.

6. C. F. Gauß: Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores primi vel secundi gradus resolvi posse. Helmstadii MDCCLXXXXIX (= Werke, Bd. 3, S. 1–30).

7. P. S. Laplace: Lecons de Mathématiques données à l'Ecole Normale, en 1795, par M. Laplace. Journal de l'Ecole Polytechnique, (Septième et huitième cahier) Tome II (Paris 1812), S. 1–278. besonders S. 56–58 (= Oeuvres complètes, Bd. 14, S. 10–111; besonders S. 63–65).

8. R. Argand: Essai sur une manière de réprésenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques (Paris 1806).

9. R. Argand: Réflexions sur la nouvelle théorie des imaginaires, suivies d'une application à la démonstration d'un théorème d'Analyse. Annales de Mathématiques, 5, (181), S. 197–209.

10. C. F. Gauß: Demonstratio nova altera theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores primi vel secundi gradus resolvi posse. Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores (classis mathematicae). Vol. III (1816), S. 107—134 (= Werke, Bd. 3, S. 31—56).

11. C. F. Gauß: Theorematis de resolubilitate functionum algebraicarum in factores reales demonstratio tertia, supplementum commentationis praecedentis. Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores (classis mathematicae). Vol. III (1816), S. 135—142 (= Werke, Bd. 3, S. 57—64).

12. A. L. Cauchy: Sur les racines imaginaires des équations. Journal de l'Ecole Polytechnique, (XVIII^{e} Cahier) Tome XI (1820), S. 411—416 (= Oeuvres complètes, II^{e} Série, Tome 1, S. 258—263).

13. G. K. Chr. v. Staudt: Beweis des Satzes, daß jede algebraische rationale ganze Function von einer Veränderlichen in Factoren vom ersten Grade aufgelöset werden kann. Journ. f. d. reine u. angew. Math. **29** (1845), S. 97—102.

14. C. F. Gauß: Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen. Abhandl. d. Königl. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen, Abhandl. d. math. Klasse d. Königl. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen, Bd. IV (1850), S. 3—34 (= Werke, Bd. 3, S. 71—102).

15. R. Lipschitz: Lehrbuch der Analysis. Erster Band: Grundlagen der Analysis (1877), S. 248—282.

16. A. Kneser: Arithmetische Begründung einiger algebraischer Fundamentalsätze. Journ. f. d. reine u. angew. Math. **102** (1887), S. 20—55.

17. K. Weierstraß: Neuer Beweis des Satzes, daß jede ganze rationale Funktion einer Veränderlichen dargestellt werden kann als ein Produkt aus linearen Funktionen derselben Veränderlichen. Sitzungsber. d. Königl.-Preuß. Akad. d. Wissensch. zu Berlin, Jahrg. 1891, S. 1085—1101 (= Mathematische Werke, Bd. 3, S. 251—269).

18. K. Weierstraß: Neuer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. Mathematische Werke 1 (1894), S. 247—256. („Gelesen in der Königl. Akademie der Wissenschaften am 12. December 1859.")

19. P. Koebe: Kontinuitätsbeweis des Fundamentalsatzes der Algebra. Nachrichten von der Königl. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen 1918, S. 45—53.

20. H. Weyl: Randbemerkungen zu Hauptproblemen der Mathematik. Math. Zeitschr. **20** (1924), S. 131—150, besonders S. 142—146.

21. L. E. J. Brouwer und B. de Loor: Intuitionistisch bewijs van de hoofdstelling der algebra. Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam: Verslag van de gewone vergaderingen der wis- en natuurkundige Afdeeling, Deel XXXIII (1924), S, 82—84.

22. L. E. J. Brouwer: Intuitionistische aanvulling van de hoofdstelling der algebra. Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Verslag van de gewone vergaderingen der wis- en natuurkundige Afdeeling, Deel XXXIII (1924), S. 459—462.

23. L. E. J. Brouwer: Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten. Journ. f. d. reine u. angew. Math. **154** (1925), S. 1—7, besonders S. 3.

24. B. de Loor: Die hoofstelling van die algebra van intuisionistiese standpunt. (Academisch proefschrift, Amsterdam 1925.)

25. H. Kneser: Laplace, Gauß und der Fundamentalsatz der Algebra. Deutsche Mathematik, Jahrg. 4 (1939), S. 318—322.

(Eingegangen am 19. Februar 1940.)

Produktformeln für verallgemeinerte Gaußsche Summen und ihre Anwendung auf die Klassenzahlformel für reelle quadratische Zahlkörper.

Herrn Oskar Perron zum 60. Geburtstag am 7. Mai 1940 gewidmet.

Von

H. Hasse in Göttingen.

Die analytische Methode von Dirichlet liefert geschlossene arithmetische Ausdrücke für die Klassenzahl h des quadratischen Zahlkörpers mit der Diskriminante d. Diese fallen ganz verschiedenartig aus, je nachdem $d < 0$ oder $d > 0$ ist. Für $d < 0$ ist

$$h = \frac{\Sigma b - \Sigma a}{w\,|d|}. \tag{1}$$

Dabei ist w die Anzahl der Einheitswurzeln des Körpers ($w = 4$ für $d = -4$, $w = 6$ für $d = -3$, $w = 2$ sonst), und a, b durchlaufen die je $\frac{1}{2}\varphi(|d|)$ Zahlen aus dem kleinsten positiven Restsystem mod $|d|$ mit $\left(\frac{d}{a}\right) = +1$, $\left(\frac{d}{b}\right) = -1$. Für $d > 0$ ist

$$\varepsilon^h = \frac{\Pi^+\left(e^{\frac{\pi i b}{d}} - e^{-\frac{\pi i b}{d}}\right)}{\Pi^+\left(e^{\frac{\pi i a}{d}} - e^{-\frac{\pi i a}{d}}\right)} = \frac{\Pi^+ \sin\frac{\pi b}{d}}{\Pi^+ \sin\frac{\pi a}{d}}. \tag{2}$$

Dabei ist ε die Grundeinheit des Körpers (in der eindeutigen Normierung $\varepsilon > 1$), und a, b durchlaufen die je $\frac{1}{4}\varphi(d)$ positiven Zahlen aus dem absolutkleinsten Restsystem mod d mit $\left(\frac{d}{a}\right) = +1$, $\left(\frac{d}{b}\right) = -1$.

Für $d < 0$ liefert (1) unmittelbar einen rationalzahligen Ausdruck für h, dem man die Ganzzahligkeit leicht ansieht, und die Berechnung von h macht für nicht zu große $|d|$ keinerlei Schwierigkeiten. Für $d > 0$ dagegen ist der Ausdruck rechts in (2) eine rationale Bildung im Körper der $2d$-ten Einheitswurzeln. Man sieht ihm zwar wieder leicht an, daß er eine Einheit im Körper von $\sqrt{d}$ ist, aber die Darstellung dieser Einheit in der Form $\frac{u + v\sqrt{d}}{2}$ und damit die Berechnung von h macht selbst für kleine d erheb-

liche Schwierigkeiten, wenn man nicht auf Grund der zweiten Form von (2) vorgehen und die dem Arithmetiker wesensfremde Logarithmentafel zu Hilfe nehmen will.

Ich will im folgenden für den Spezialfall der positiven Primzahldiskriminanten $d = p$ (also $p \equiv 1 \bmod 4$) zeigen, daß man die Klassenzahlformel (2) in die Gestalt

$$(2') \qquad \varepsilon^h = \frac{U + V\sqrt{p}}{2} = \frac{2}{-U + V\sqrt{p}}$$

umrechnen kann, wo U, V ähnlich wie die Summen in (1) ganzrationalzahlige Ausdrücke sind, und zwar mit $U \equiv V \bmod 2$. Die Formel (2') setzt dann in Augenschein, daß $\frac{U + V\sqrt{p}}{2}$ einer Einheit des Körpers von $\sqrt{p}$ ist, und zwar mit der Norm -1, entsprechend der bekannten Tatsache, daß im betrachteten Spezialfall $N(\varepsilon) = -1$ und h ungerade ist. Zur Berechnung von h aus (2') hat man nur den Ausdruck U oder V zu berechnen und — etwa durch Kettenbruchentwicklung von $\frac{1 + \sqrt{p}}{2}$ — die Grundeinheit $\varepsilon = \frac{u + v\sqrt{p}}{2}$ zu bestimmen. Dann ist $\varepsilon^n = \frac{u_n + v_n\sqrt{p}}{2}$, wo u_n, v_n rekursiv durch

$$u_0 = 2, \quad u_1 = u, \qquad u_n + u u_{n+1} = u_{n+2},$$

$$v_0 = 0, \quad v_1 = v, \qquad v_n + u v_{n+1} = v_{n+2}$$

bestimmt sind, und man hat nur festzustellen, welches $u_h = U$ oder $v_h = V$ wird. Für zusammengesetzte d läßt sich eine entsprechende Formel herleiten; jedoch bin ich noch nicht zur Durchführung der Rechnung im einzelnen gekommen.

Die Herleitung von (2) erfordert den Mut, die Produkte im Zähler und Nenner von (2) in allgemeiner Form auszumultiplizieren. Dies wird durchsichtiger und damit leichter, wenn man der gruppentheoretischen Struktur jener Produkte nachgeht und die Aufgabe gleich für eine allgemeine Klasse von Produkten dieser Art anfaßt. Es sind das Produkte, deren Faktoren ein System verallgemeinerter Gaußscher Summen sind. Es ist anzunehmen, daß die im folgenden zunächst bewiesenen allgemeinen Produktformeln eine entsprechende Bedeutung für die Klassenzahlformel reeller absolutabelscher Zahlkörper haben. Auch stehen sie, wie ich glaube, im Zusammenhang mit dem noch offenen Problem der Lage der gewöhnlichen Gaußschen Summen für Charaktere mod p von höherer Ordnung als 2 auf dem Kreis vom Radius $\sqrt{p}$ [1]).

---

[1]) Siehe dazu E. Kummer, De residuis cubicis disquisitiones nonnullae analyticae, J. f. Math. 32 (1846), 341—359, besonders 353.

§ 1.

Produktformeln für verallgemeinerte Gaußsche Summen.

1. Es sei $\mathfrak{G}$ die Multiplikationsgruppe eines endlichen Körpers der Charakteristik p mit q Elementen. $\mathfrak{G}$ ist zyklisch von der Ordnung $q-1$. Es sei $\psi \neq 1$ ein Charakter der Ordnung n von $\mathfrak{G}$. Die zu ψ gehörige gewöhnliche Gaußsche Summe ist

$$\tau(\psi) = \sum_{x \text{ in } \mathfrak{G}} \psi(x)\, e(x).$$

Dabei ist zur Abkürzung

$$e(x) = e^{\frac{2\pi i}{p} Sp(x)}$$

gesetzt, wo $Sp(x)$ die Spur von x bedeutet. Wir werden zwar für unsere Anwendung nur den Fall $q = p$ des Primkörpers brauchen; es macht jedoch keine Mühe, die Rechnung gleich für den Fall eines beliebigen endlichen Körpers durchzuführen. Die Ersetzung der Summationsvariablen x durch ax, wo a ein festes Element aus $\mathfrak{G}$ ist, bezeichnen wir durch Anfügung von a als Index:

$$\tau_a(\psi) = \sum_{x \text{ in } \mathfrak{G}} \psi(x)\, e(ax) = \bar{\psi}(a)\, \tau(\psi).$$

Ist schon ein Index vorhanden, so wird a diesem als Faktor vorgefügt.

Die zu betrachtenden verallgemeinerten Gaußschen Summen sind die entsprechenden Bildungen für Charaktere von Untergruppen von $\mathfrak{G}$. Dem Charakter ψ der Ordnung n von $\mathfrak{G}$ entspricht für jeden Teiler m von $\frac{q-1}{n}$ eindeutig ein Charakter ψ_m derselben Ordnung n der Untergruppe $\mathfrak{G}^m$, erklärt durch

$$\psi_m(x) = \psi_m(y^m) = \psi(y) \quad \text{für} \quad x = y^m \text{ in } \mathfrak{G}^m.$$

Für $m \mid \frac{q-1}{n}$, also $n \mid \frac{q-1}{m}$ hängt nämlich $\psi(y)$ nicht von der Auswahl von y unter den m Lösungen von $y^m = x$ ab. Umgekehrt bestimmt sich ψ eindeutig durch ψ_m in folgender Weise. Es sei $\mathfrak{R}$ ein Repräsentantensystem von $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^m$, als einzeilige Matrix verstanden. Dann besteht für jedes x aus $\mathfrak{G}$ ein Gleichungssystem

$$x\,\mathfrak{R} = \mathfrak{R}\,X$$

mit einer monomialen Matrix X aus $\mathfrak{G}^m$. Daraus folgt durch Produktbildung

$$x^m = |X|,$$

wo $|X|$ das Produkt der m von Null verschiedenen Koeffizienten aus X bezeichnet. Es ist dann

$$\psi(x) = \psi_m(|X|).$$

Vom Standpunkt der allgemeinen Gruppentheorie ist $|X|$ die Verlagerung von x für $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^m$. Wegen $m \mid \frac{q-1}{n}$ gibt es m Charaktere χ mit $\chi^m = \psi$. Für diese gilt die Beziehung

$$\frac{1}{m} \sum_{\chi^m = \psi} \chi(x) = \frac{1}{m} \sum_{y^m = x} \psi(y) = \psi_m(x),$$

und zwar gleichgültig, ob x in $\mathfrak{G}^m$ liegt oder nicht, wenn man noch festsetzt:

$$\psi_m(x) = 0 \quad \text{für} \quad x \text{ nicht in } \mathfrak{G}^m.$$

Vom Standpunkt der allgemeinen Gruppentheorie ist dann $m\,\psi_m$ ein reduzibler Charakter von $\mathfrak{G}$, nämlich der durch den irreduziblen Charakter ψ_m von $\mathfrak{G}^m$ induzierte Charakter von $\mathfrak{G}$.

Die zu ψ und $\mathfrak{G}^m$ gehörige verallgemeinerte Gaußsche Summe erklären wir als

$$\tau(\psi_m) = \sum_{x \text{ in } \mathfrak{G}^m} \psi_m(x)\, e(x) \quad \Big(= \sum_{x \text{ in } \mathfrak{G}} \psi_m(x)\, e(x)\Big).$$

Es gilt

$$\tau_a(\psi_m) = \sum_{x \text{ in } \mathfrak{G}^m} \psi_m(x)\, e(a\,x) = \psi_m(b)\, \tau_r(\psi_m) \text{ für } a = r\,b \text{ mit } b \text{ in } \mathfrak{G}^m.$$

Die $\tau_a(\psi_m)$ reduzieren sich so wesentlich auf die m Summen $\tau_r(\psi_m)$ für die Repräsentanten r aus $\mathfrak{R}$. Durch gewöhnliche Gaußsche Summen $\tau(\chi)$ drückt sich $\tau(\psi_m)$ wie folgt aus:

$$\tau(\psi_m) = \frac{1}{m} \sum_{\chi^m = \psi} \tau(\chi),$$

also

$$\tau_a(\psi_m) = \frac{1}{m} \sum_{\chi^m = \psi} \bar{\chi}(a)\, \tau(\chi).$$

2. Es sei nun weiter $\mathfrak{G}^k/\mathfrak{G}^m$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^m$ vom Index l, gegeben durch eine Zerlegung $m = kl$. Dann besteht zwischen ψ_m und ψ_k die Beziehung

$$\psi_m(x^l) = \psi_k(x).$$

Schließlich sei $\mathfrak{R} = \mathfrak{r}_1 + \ldots + \mathfrak{r}_k$ die Zerlegung von $\mathfrak{R}$ in Repräsentantensysteme $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_k$ der Klassen, in die $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^m$ nach $\mathfrak{G}^k/\mathfrak{G}^m$ zerfällt. Ist dann $\mathfrak{r}$ ein Repräsentantensystem von $\mathfrak{G}^k/\mathfrak{G}^m$ und $w_1, \ldots, w_k$ ein Repräsentantensystem von $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^k$, so bestehen k Gleichungssysteme

$$w_i\,\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_i\, W_i$$

mit monomialen Matrizen W_i aus $\mathfrak{G}^m$.

Wir betrachten die k Produkte

$$\Theta_{\mathfrak{r}_i}(\psi_m) = \prod_{r_i \text{ in } \mathfrak{r}_i} \tau_{r_i}(\psi_m).$$

Sie hängen mit dem Produkt

$$\Theta_{\mathfrak{r}}(\psi_m) = \prod_{r \text{ in } \mathfrak{r}} \tau_r(\psi_m)$$

durch das Beziehungssystem

$$\Theta_{\mathfrak{r}_i}(\psi_m) = \psi_m(|W_i|)\,\Theta_{w_i\mathfrak{r}}(\psi_m)$$

zusammen. Daher genügt es, das eine Produkt $\Theta_{\mathfrak{r}}(\psi_m)$ zu behandeln.

Durch Ausmultiplizieren von

$$\Theta_{\mathfrak{r}}(\psi_m) = \prod_{r \text{ in } \mathfrak{r}} \sum_{x \text{ in } \mathfrak{G}^m} \psi_m(x)\, e(rx)$$

ergibt sich:

$$\Theta_{\mathfrak{r}}(\psi_m) = \sum_{\mathfrak{x} \text{ in } \mathfrak{G}^m} \psi_m(|\mathfrak{x}|)\, e(\mathfrak{r}\mathfrak{x}).$$

Dabei durchläuft $\mathfrak{x}$ die l-gliedrigen Elementsysteme aus $\mathfrak{G}^m$ als einspaltige Matrizen verstanden, und $|\mathfrak{x}|$ bezeichnet das Produkt der Elemente aus $\mathfrak{x}$. Durch Ordnen nach e-Werten folgt weiter:

$$\Theta_{\mathfrak{r}}(\psi_m) = \sum_{\substack{\mathfrak{r}\mathfrak{x}=0 \\ \mathfrak{x} \text{ in } \mathfrak{G}^m}} \psi_m(|\mathfrak{x}|) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{t \text{ in } \mathfrak{G}^k} \Big(\sum_{\substack{\mathfrak{r}\mathfrak{x} = w_i^{-1} t \\ \mathfrak{x} \text{ in } \mathfrak{G}^m}} \psi_m(|\mathfrak{x}|) \Big)\, e(w_i^{-1} t).$$

In den Summen über $\mathfrak{x}$ nehmen wir die Summationstransformation $\mathfrak{x} = T\mathfrak{y}$ vor, wo T die durch $t\mathfrak{r} = \mathfrak{r}T$ für t aus $\mathfrak{G}^k$ bestimmte monomiale Matrix aus $\mathfrak{G}^m$ ist. Dabei gilt einerseits

$$\mathfrak{r}\mathfrak{x} = \mathfrak{r}T\mathfrak{y} = t\mathfrak{r}\mathfrak{y},$$

andererseits $\psi_m(|T|) = \psi_m(t^l) = \psi_k(t)$ und daher

$$\psi_m(|\mathfrak{x}|) = \psi_m(|T|)\,\psi_m(|\mathfrak{y}|) = \psi_k(t)\,\psi_m(|\mathfrak{y}|).$$

Für $\sum_{\mathfrak{r}\mathfrak{x}=0}$ wählen wir dabei $t = u^k$ aus $\mathfrak{G}^k$ so, daß $\psi_k(t) = \psi(u) \neq 1$ wird; das geht wegen $\psi \neq 1$. Daraus folgt, daß diese Summe gleich 0 ist. Für $\sum_{\mathfrak{r}\mathfrak{x} = w_i^{-1} t}$ wählen wir das t aus $\mathfrak{G}^k$ der Summationsbedingung. Dann liefert die angegebene Transformation

$$\sum_{\substack{\mathfrak{r}\mathfrak{x} = w_i^{-1} t \\ \mathfrak{x} \text{ in } \mathfrak{G}^m}} \psi_m(|\mathfrak{x}|) = \psi_k(t) \sum_{\substack{\mathfrak{r}\mathfrak{x} = w_i^{-1} \\ \mathfrak{x} \text{ in } \mathfrak{G}^m}} \psi_m(|\mathfrak{x}|).$$

Durch die weitere Transformation $\mathfrak{x} = W_i^{-1}\mathfrak{y}$, wo W_i die oben erklärte Matrix mit $w_i\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_i W_i$ ist, folgt entsprechend

$$\sum_{\substack{\mathfrak{r}\mathfrak{x} = w_i^{-1} t \\ \mathfrak{x} \text{ in } \mathfrak{G}^m}} \psi_m(|\mathfrak{x}|) = \psi_k(t)\,\psi_m(|W_i|^{-1}) \sum_{\substack{\mathfrak{r}_i\mathfrak{x} = 1 \\ \mathfrak{x} \text{ in } \mathfrak{G}^m}} \psi_m(|\mathfrak{x}|).$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$R_i(\psi_m) = \sum_{\substack{\mathfrak{r}_i \mathfrak{x} = 1 \\ \mathfrak{x} \text{ in } \mathfrak{G}^m}} \psi_m(|\mathfrak{x}|) \,.$$

Dann haben wir

$$\Theta_{\mathfrak{r}}(\psi_m) = \sum_{i=1}^{k} \psi_m(|W_i|^{-1}) R_i(\psi_m) \sum_{t \text{ in } \mathfrak{G}^k} \psi_k(t)\, e(w_i^{-1} t)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \psi_m(|W_i|^{-1}) R_i(\psi_m)\, \tau_{w_i^{-1}}(\psi_k).$$

Drücken wir hierin noch die $\tau_{w_i^{-1}}(\psi_k)$ durch gewöhnliche Gaußsche Summen $\tau(\chi)$ aus, so erhalten wir als Ergebnis unserer Ausmultiplikation die Produktformel:

$$\Theta_{\mathfrak{r}}(\psi_m) = \frac{1}{k} \sum_{\chi^k = \psi} \Big(\sum_{i=1}^{k} \chi(w_i)\, \psi_m(|W_i|^{-1})\, R_i(\psi_m) \Big)\, \tau(\chi) \,.$$

Nach dem schon Gesagten folgt aus ihr für die uns eigentlich interessierenden Produkte das Formelsystem:

$$\Theta_{\mathfrak{r}_i}(\psi_m) = \frac{1}{k} \sum_{\chi^k = \psi} P_i(\chi, \psi_m)\, \tau(\chi) \,,$$

wo zur Abkürzung

$$P_i(\chi, \psi_m) = \sum_{j=1}^{k} \chi\Big(\frac{w_j}{w_i}\Big)\, \psi_m\Big(\frac{|W_i|}{|W_j|}\Big) R_i(\psi_m)$$

gesetzt ist. Man beachte, daß die Koeffizienten dieses linearen Gleichungssystems nicht von der Wahl des Repräsentantensystems $w_1, \ldots, w_k$ von $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^k$ abhängen, sondern nur von der Wahl des Repräsentantensystems $\mathfrak{R} = \mathfrak{r}_1 + \ldots + \mathfrak{r}_k$, mit dessen Hilfe die Produkte $\Theta_{\mathfrak{r}_i}(\psi_m)$ erklärt sind.

3. Für die nachher zu behandelnde Anwendung werden wir den Fall $k = 2$ brauchen. Wir fügen hier einige Bemerkungen über den Fall $k = 1$ an. Die Produktformel lautet in diesem Falle einfach

$$\Theta_{\mathfrak{R}}(\psi_m) = R(\psi_m)\, \tau(\psi),$$

wo

$$R(\psi_m) = \sum_{\substack{\mathfrak{R} \mathfrak{x} = 1 \\ \mathfrak{x} \text{ in } \mathfrak{G}^m}} \psi_m(|\mathfrak{x}|).$$

Sie zeigt, daß der Quotient $\frac{\Theta_{\mathfrak{R}}(\psi_m)}{\tau(\psi)}$ eine ganze Zahl $R(\psi_m)$ aus dem Körper von ψ (dem Körper der n-ten Einheitswurzeln) ist. Daß dieser Quotient im Körper von ψ liegt, folgt schon aus seinem Verhalten bei den Automorphismen des Körpers der p-ten Einheitswurzeln. Dagegen ist nicht von vornherein klar, daß er ganz ist. Man kann dies auch durch eine arithmetische Schlußweise zeigen, die zugleich ergibt, daß er prim zu p ist. Da ich dies als Aufgabe im Jahresbericht der DMV gestellt habe, begnüge ich mich hier mit diesem Hinweis.

Im Spezialfall $q = p$, $n = 2$, $m = \frac{p-1}{2}$ ist ψ der quadratische Charakter mod p, und $\mathfrak{G}^m$ besteht aus ± 1, so daß $\mathfrak{R} = (1, \ldots, m)$ gewählt werden kann. Das Produkt $\Theta_{\mathfrak{R}}(\psi_m)$ läßt sich dann in einfacher Weise direkt berechnen. Es ist

$$\Theta_{\mathfrak{R}}(\psi_m) = \prod_{x=1}^{m} (e(x) - e(-x)) = \left\{ \begin{array}{r} e(1 + \ldots + m) \prod_{x=1}^{m} (1 - e(-2x)) \\ = (-1)^m e(-1 - \ldots - m) \prod_{x=1}^{m} (1 - e(2x)) \end{array} \right\},$$

also

$$\Theta_{\mathfrak{R}}(\psi_m)^2 = (-1)^m p = \psi(-1)\, p = \tau(\psi)^2$$

und somit jedenfalls $\frac{\Theta_{\mathfrak{R}}(\psi_m)}{\tau(\psi)} = \pm 1$. Da die Faktoren $e(x) - e(-x)$ für $x = 1, \ldots, m$ positiv-imaginär sind, folgt

$$\Theta_{\mathfrak{R}}(\psi_m) = i^m \sqrt{p}$$

mit positiver Quadratwurzel. Indem man durch die erwähnte arithmetische Schlußweise nachweist, daß $\frac{\Theta_{\mathfrak{R}}(\psi_m)}{\tau(\psi)} \equiv \psi(-2) \bmod p$ ist, ergibt sich

$$R(\psi_m) = \frac{\Theta_{\mathfrak{R}}(\psi_m)}{\tau(\psi)} = \psi(-2) = (-1)^{\binom{m}{2}}$$

und damit das bekannte Resultat

$$\tau(\psi) = \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{p} & \text{für} \quad p \equiv 1 \bmod 4 \\ i\sqrt{p} & \text{für} \quad p \equiv -1 \bmod 4 \end{array} \right\}$$

über das Vorzeichen der quadratischen Gaußschen Summe. Es ist das die in Hilberts Zahlbericht § 124 auseinandergesetzte, wesentlich arithmetische Methode zur Bestimmung dieses Vorzeichens, die auf Kronecker zurückgeht. Der direkte Nachweis, daß

$$R(\psi_m) = \sum_{\substack{1 x_1 + \ldots + m x_m \equiv 1 \bmod p \\ x_1, \ldots, x_m = \pm 1}} x_1 \ldots x_m = \psi(-2) = (-1)^{\binom{m}{2}}$$

ist, ist mir nicht gelungen. Zur Vorzeichenbestimmung der Gaußschen Summe $\tau(\psi)$ würde es auch genügen, dies als Kongruenz mod 4 zu bestätigen; jedoch lohnt es nicht, darauf weiter einzugehen, da ja die Kongruenzbetrachtung mod p das gewünschte Resultat liefert.

Für $q = p$, $n > 2$, $m = \frac{q-1}{n}$ ist der Quotient $\frac{\Theta_{\mathfrak{R}}(\psi_m)}{\tau(\psi)} = R(\psi_m)$ im Gegensatz zu meiner ursprünglichen Erwartung nicht immer eine n-te Einheitswurzel. Des Interesses halber teile ich nachstehend einige von mir berechnete Zahlenbeispiele mit:

$p=7$, $n=3$, $\mathfrak{R}=(1,3)$, $\psi_2(2)=\varrho$, $R(\psi_3)=\varrho^2$ (Einheitswurzel),
$p=13$, $n=3$, $\mathfrak{R}=(1,2,4,8)$, $\psi_4(3)=\varrho$, $R(\psi_4)=\varrho^2-\varrho$ (Primfaktor von 3),
$p=19$, $n=3$, $\mathfrak{R}=(1,2,4,8,16,13)$, $\psi_6(7)=\varrho$, $R(\psi_6)=3+2\varrho$ (Primfaktor von 7),
$p=13$, $n=4$, $\mathfrak{R}=(1,2,4)$, $\psi_3(8)=i$, $R(\psi_3)=-1+2i$ (Primfaktor von 5),
$p=17$, $n=4$, $\mathfrak{R}=(1,3,9,10)$, $\psi_4(13)=i$, $R(\psi_4)=2+i$ (Primfaktor von 5).

Auch abgesehen von der Frage, ob sich mittels dieser Methode nach Analogie zum Falle $n = 2$ eine Aussage über die Lage von $\tau(\psi)$ auf dem Kreise vom Radius $\sqrt{p}$ gewinnen läßt, scheint es mir von Interesse, ein Gesetz für die hier auftretenden Faktoren aus dem Körper der n-ten Einheitswurzeln zu finden, die, wie gesagt, sicher ganz und prim zu p sind.

§ 2.

Anwendung auf die Klassenzahlformel für reelle quadratische Zahlkörper.

1. Für eine Primzahl $p \equiv 1 \bmod 4$ lautet die Klassenzahlformel des Körpers von $\sqrt{p}$:

$$\varepsilon^h = \frac{\prod_{b \text{ in } \mathfrak{b}} \left(e^{\frac{\pi i b}{p}} - e^{-\frac{\pi i b}{p}}\right)}{\prod_{a \text{ in } \mathfrak{a}} \left(e^{\frac{\pi i a}{p}} - e^{-\frac{\pi i a}{p}}\right)}.$$

Dabei bezeichnen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ die Systeme der je $\frac{p-1}{4}$ Zahlen a, b aus der Reihe $1, \ldots, \frac{p-1}{2}$ mit $\left(\frac{a}{p}\right) = +1$, $\left(\frac{b}{p}\right) = -1$. Es gilt

$$e^{\frac{\pi i}{p}} = e^{\frac{2\pi i}{p}\frac{1}{2}} = -e^{\frac{2\pi i}{p}\frac{p+1}{2}} = -e\left(\frac{p+1}{2}\right) = -e\left(\frac{1}{2}\right),$$

wobei der Bruch $\frac{1}{2}$ im e-Argument rechts (im Gegensatz zum e-Exponenten links) als Element des Restklassenkörpers mod p verstanden ist. Ersetzt man demgemäß die 2 p-ten durch p-te Einheitswurzeln, so tritt der Faktor

$$(-1)^{\Sigma b - \Sigma a} = (-1)^{\Sigma b + \Sigma a} = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = \left(\frac{2}{p}\right)$$

vor. Damit geht die Klassenzahlformel über in

$$\varepsilon^h = \left(\frac{2}{p}\right) \frac{\prod_{b \text{ in } \mathfrak{b}} \left(e\left(\frac{b}{2}\right) - e\left(-\frac{b}{2}\right)\right)}{\prod_{a \text{ in } \mathfrak{a}} \left(e\left(\frac{a}{2}\right) - e\left(-\frac{a}{2}\right)\right)}.$$

Hier stehen im Zähler und Nenner gerade zwei zusammengehörige Produkte des vorher betrachteten Typus $\Theta_{\mathfrak{r}_i}(\psi_m)$, und zwar handelt es sich um den folgenden Spezialfall unserer allgemeinen Theorie:

$q = p \equiv 1 \bmod 4$; $n = 2$, also ψ der quadratische Charakter mod p;

$$m = \frac{p-1}{2}, \text{ also } \mathfrak{G}^m = (\pm 1); \quad \mathfrak{R} = \left(1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\right);$$

$$k = 2, \; l = \frac{p-1}{4}, \text{ also } \mathfrak{G}^k = (\pm \mathfrak{a}); \quad \mathfrak{r}_1 = \mathfrak{a}, \; \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{b}.$$

In diesem Sinne hat man also

$$\varepsilon^h = \psi(2) \frac{\Theta_{\frac{1}{2}\mathfrak{b}}(\psi_m)}{\Theta_{\frac{1}{2}\mathfrak{a}}(\psi_m)}.$$

Wir behalten im folgenden die Beziehungen m, l für $\frac{p-1}{2}, \frac{p-1}{4}$ bei.

2. Wir geben jetzt die in unsere allgemeinen Produktformeln eingehenden Ausdrücke $R_i(\psi_m)$. $P_i(\chi, \psi_m)$ für den vorliegenden Spezialfall an. Es ist zunächst

$$R_1(\psi_m) = \sum_{\substack{\mathfrak{a}\mathfrak{x} = 1 \\ \mathfrak{x} \text{ in } \mathfrak{G}^m}} \psi_m(|\mathfrak{x}|) = \sum_{\substack{\mathfrak{a}\mathfrak{x} \equiv 1 \bmod p \\ \mathfrak{x} = (\pm 1, \ldots, \pm 1)}} |\mathfrak{x}| = A,$$

$$R_2(\psi_m) = \sum_{\substack{\mathfrak{b}\mathfrak{x} = 1 \\ \mathfrak{x} \text{ in } \mathfrak{G}^m}} \psi_m(|\mathfrak{x}|) = \sum_{\substack{\mathfrak{b}\mathfrak{x} \equiv 1 \bmod p \\ \mathfrak{x} = (\pm 1, \ldots, \pm 1)}} |\mathfrak{x}| = B.$$

Die Lösungen von $\chi^2 = \psi$ sind die beiden konjugierten biquadratischen Charaktere $\chi, \bar{\chi}$ mod p. Nimmt man $\mathfrak{r} = \mathfrak{a}$ als Repräsentantensystem von $\mathfrak{G}^2/\mathfrak{G}^m$ und $1, w$ (wo w eine primitive Wurzel mod p ist) als Repräsentantensystem von $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^2$, so lauten die Repräsentantengleichungssysteme:

$$1\,\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\,E, \quad w\,\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\,W.$$

Es ist dann

$$\psi_m(|E|) = 1, \quad \psi_m(|W|) = \psi_m\left(\frac{w^l\,|\mathfrak{a}|}{|\mathfrak{b}|}\right) = (-1)^\omega,$$

wo ω die Anzahl der Koeffizienten -1 in W ist, d. h. die Anzahl derjenigen Repräsentanten a, die sich bei Multiplikation mit w auf negative Repräsentanten $-b$ reduzieren. Normiert man χ gegenüber seinem konjugierten $\bar{\chi}$ durch die Festsetzung

$$\chi(w)\,\psi_m(|W|) = (-1)^\omega \chi(w) = i,$$

so hat man hiernach weiter

$$P_1(\chi, \psi_m) = \quad A + iB = P, \qquad P_1(\bar{\chi}, \psi_m) = A - iB = \bar{P};$$
$$P_2(\chi, \psi_m) = -iA + B = -iP, \quad P_2(\bar{\chi}, \psi_m) = iA + B = i\bar{P}.$$

In die Produktformeln geht also wesentlich nur der eine vorstehend bestimmte Ausdruck $P = A + iB$ ein, und sie lauten einfach:

$$\Theta_{\mathfrak{a}}(\psi_m) = \frac{P\tau(\chi) + \bar{P}\tau(\bar{\chi})}{2},$$

$$\Theta_{\mathfrak{b}}(\psi_m) = \frac{-iP\tau(\chi) + i\bar{P}\tau(\bar{\chi})}{2}.$$

Daraus folgt:

$$\Theta_{\frac{1}{2}\mathfrak{a}}(\psi_m) = \frac{\chi(2)P\tau(\chi) + \bar{\chi}(2)\bar{P}\tau(\bar{\chi})}{2},$$

$$\Theta_{\frac{1}{2}\mathfrak{b}}(\psi_m) = \frac{-i\chi(2)P\tau(\chi) + i\bar{\chi}(\bar{2})P\tau(\bar{\chi})}{2}.$$

Wie bereits früher gezeigt, ist

$$\Theta_{\mathfrak{R}}(\psi_m) = \Theta_{\mathfrak{a}}(\psi_m)\Theta_{\mathfrak{b}}(\psi_m) = \psi(-2)\ \tau(\psi),$$

also

$$\Theta_{\frac{1}{2}\mathfrak{R}}(\psi_m) = \Theta_{\frac{1}{2}\mathfrak{a}}(\psi_m)\ \ \Theta_{\frac{1}{2}\mathfrak{b}}(\psi_m) = \psi(-1)\tau(\psi) = \tau(\psi),$$

letzteres, weil hier $p \equiv 1 \bmod 4$ ist. Damit erhält die Klassenzahlformel folgende doppelte Gestalt:

$$\varepsilon^h = \psi(2)\frac{\Theta_{\frac{1}{2}\mathfrak{b}}(\psi_m)^2}{\tau(\psi)} = \psi(2)\frac{\tau(\psi)}{\Theta_{\frac{1}{2}\mathfrak{a}}(\psi_m)^2}.$$

Dabei ist

$$\Theta_{\frac{1}{2}\mathfrak{a}}(\psi_m)^2 = \frac{\frac{P^2\tau(\chi)^2 + \bar{P}^2\tau(\bar{\chi})^2}{2} + \psi(2)P\bar{P}\tau(\chi)\tau(\bar{\chi})}{2},$$

$$\Theta_{\frac{1}{2}\mathfrak{b}}(\psi_m)^2 = \frac{\frac{-P^2\tau(\chi)^2 + \bar{P}^2\tau(\bar{\chi})^2}{2} + \psi(2)P\bar{P}\tau(\chi)\tau(\bar{\chi})}{2}.$$

3. Für die Gaußsche Summen $\tau(\chi)$, $\tau(\bar{\chi})$ gilt nun einerseits

$$\tau(\chi)\tau(\bar{\chi}) = \chi(-1)p = (-1)^l p = \psi(2)p,$$

letzteres wegen $p \equiv 1 \bmod 4$, und andererseits[2])

$$\frac{\tau(\chi)^2}{\tau(\psi)} = \psi(2)\pi(\chi, \psi), \quad \frac{\tau(\bar{\chi})^2}{\tau(\psi)} = \psi(2)\pi(\bar{\chi}, \psi).$$

---

[2]) H. Davenport - H. Hasse, Die Nullstellen der Kongruenzzetafunktionen in gewissen zyklischen Fällen, J. f. Math. 172 (1934), S. 151—182, Formel (0.9_2) und § 6, II. Man beachte, daß die dortigen Gaußschen Summen und Charaktersummen noch den hier weggelassenen Faktor -1 haben.

Dabei sind

$$\pi(\chi, \psi) = \sum_{\substack{x+y=1 \\ x, y \text{ in } \mathfrak{G}}} \chi(x)\,\psi(y), \quad \pi(\bar{\chi}, \psi) = \sum_{\substack{x+y=1 \\ x, y \text{ in } \mathfrak{G}}} \bar{\chi}(x)\,\psi(y)$$

Charaktersummen von ähnlichem Bau wie unsere obigen allgemeinen Summen $R_i(\psi_m)$. Ihre arithmetische Bedeutung ist die folgende:

$$-\pi(\chi, \psi) = \pi = a + ib, \quad -\pi(\bar{\chi}, \psi) = \bar{\pi} = a - ib$$

sind die beiden Primfaktoren von

$$p = a^2 + b^2$$

im Körper von i in der Normierung

$$\pi, \bar{\pi} \equiv 1 \bmod 2\,(1-i),$$

$$\chi(w) \equiv w^l \bmod \pi.$$

Unter Berücksichtigung der oben getroffenen Normierung von χ lautet diese Normierung von π, $\bar{\pi}$ in rationaler Form:

$$b \equiv 0 \bmod 2, \quad a + b \equiv 1 \bmod 4,$$

$$a\,|\mathfrak{a}| + b\,|\mathfrak{b}| \equiv 0 \bmod p.$$

Die erste Bedingung unterscheidet a^2 und b^2, die zweite legt das Vorzeichen von a fest, die dritte das Vorzeichen von b.

Führt man diesen Formeln für $\tau(\chi)$, $\tau(\bar{\chi})$ entsprechend die Division durch $\tau(\psi)$ aus und beachtet $\tau(\psi) = \sqrt{p}$, so erhält die Klassenzahlformel die Gestalt:

$$\boxed{\varepsilon^h = \frac{\psi(2)\,\Re(P^3\pi) + |P|^2\sqrt{p}}{2} = \frac{2}{-\psi(2)\,\Re(P^3\pi) + |P|^2\sqrt{p}}}.$$

Das ist die in der Einleitung angegebene Gestalt (2′) mit

$$\boxed{\begin{aligned} U &= \psi(2)\,\Re(P^2\pi) = \psi(2)\,(a(A^2 - B^2) - 2bAB) \\ V &= |P|^2 = A^2 + B^2 \end{aligned}}.$$

Ersichtlich sind U, V ganzrational und es ist $U \equiv V \bmod 2$. Der arithmetischen Bedeutung der Zahl $\pi = a + ib$ tritt hiernach die folgende arithmetische Bedeutung der Zahl $P = A + iB$ zur Seite: In $\varepsilon^h = \frac{U + V\sqrt{p}}{2}$ ist $V = A^2 + B^2$, und dabei sind A, B (bis auf Reihenfolge und Vorzeichen) als die angegebenen Charaktersummen zu den Repräsentantensystemen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ bestimmt.

Beispiele.

$p = 5$.

$$\mathfrak{a} = (1), \qquad \mathfrak{b} = (2);$$

$$\left\{\begin{array}{ll} 1\,x_1 \equiv 1, & 2\,x_1 \equiv 1 \mod 5 \\ x_1 = +1, & \end{array}\right\};$$

$$A = 1, \qquad B = 0, \qquad \underline{P = 1};$$

$$5 = 1^2 + 2^2, \quad a = -1, \quad b = 2, \qquad \underline{\pi = -1 + 2i};$$

$$\Re(P^2\pi) = -1, \quad |P|^2 = 1, \quad \psi(2) = -1;$$

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varepsilon^1, \qquad \underline{h = 1}.$$

$p = 13$.

$$\mathfrak{a} = (1, 3, 4), \quad \mathfrak{b} = (2, 5, 6);$$

$$\left\{\begin{array}{lll} 1\,x_1 + 3\,x_2 + 4\,x_3 \equiv 1, & 2\,x_1 + 5\,x_2 + 6\,x_3 \equiv 1 \mod 13 \\ \text{---------------}, & +1 \quad +1 \quad -1 \end{array}\right\};$$

$$A = 0, \qquad B = -1, \qquad \underline{P = -i};$$

$$13 = 3^2 + 2^2, \quad a = 3, \quad b = 2, \qquad \underline{\pi = 3 + 2i};$$

$$\Re(P^2\pi) = -3, \quad |P|^2 = 1, \quad \psi(2) = -1;$$

$$\frac{3 + \sqrt{13}}{2} = \varepsilon^1, \qquad \underline{h = 1}.$$

$p = 17$.

$$\mathfrak{a} = (1, 2, 4, 8), \quad \mathfrak{b} = (3, 5, 6, 7);$$

$$\left\{\begin{array}{llll} 1\,x_1 + 2\,x_2 + 4\,x_3 + 8\,x_4 \equiv 1, & 3\,x_1 + 5\,x_2 + 6\,x_3 + 7\,x_4 \equiv 1 \mod 17 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad +1 \quad , & -1 \quad +1 \quad +1 \quad -1 \end{array}\right\};$$

$$A = -1, \qquad B = +1, \qquad \underline{P = -1 + i};$$

$$17 = 1^2 + 4^2, \quad a = 1, \quad b = 4, \qquad \underline{\pi = 1 + 4i};$$

$$\Re(P^2\pi) = 8, \quad |P|^2 = 2, \quad \psi(2) = +1;$$

$$\frac{8 + 2\sqrt{17}}{2} = 4 + \sqrt{17} = \varepsilon_1, \qquad \underline{h = 1}.$$

(Eingegangen am 1. April 1940.)

Ein Zusammenhang zwischen Randwertproblemen verschiedenen Typs.

Herrn Oskar Perron zum 60. Geburtstag am 7. Mai 1940 gewidmet.

Von

Gustav Doetsch in Freiburg i. Br., zur Zeit in der Fliegertruppe.

§ 1.

Einleitung.

Wir betrachten partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung in zwei Variablen mit konstanten Koeffizienten, die bekanntlich in drei Typen: elliptische, hyperbolische und parabolische Differentialgleichungen, zerfallen, und zwar wählen wir als Repräsentanten jeweils die klassische Gleichung des betreffenden Typs, auf die sich die anderen Gleichungen zurückführen lassen, nämlich

(1.1) die Potentialgleichung $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$ für den elliptischen Typ,

(1.2) „ Wellengleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$ „ „ hyperbolischen „ ,

(1.3) „ Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial W}{\partial y} = 0$ „ „ parabolischen „ .

Es wird sich zeigen, daß man durch einfache Integralkombinationen (Kompositionen) von der Art, wie sie in der Theorie der Integralgleichungen bei der Iteration eines Kerns auftreten, aus zwei Lösungen einer dieser Gleichungen oder auch zweier verschiedener Gleichungen wieder eine Lösung einer der drei Gleichungen ableiten kann (§ 2). Man wird danach fragen, wie die Randwerte der resultierenden Funktion mit denen der komponierenden Funktionen zusammenhängen (§ 3). Diese Frage wird dann von besonderem Interesse sein, wenn man als eine der komponierenden Funktionen eine „singuläre“ Lösung[1]) nimmt, die nicht im klassischen Sinn bis auf den Rand hinauf regulär ist, sondern ein intrikates Randverhalten zeigt, wofür wir einige Beispiele als Typen für viele ähnlicher Art diskutieren. Es ist klar, daß diese Dinge mit der Theorie der sogenannten singulären Integrale zusammenhängen. Sie stehen aber auch in interessanten Beziehungen zur Summabilitätstheorie divergenter Reihen, worauf in einer späteren Arbeit eingegangen werden soll. — Die Trans-

[1]) Siehe hierzu G. Doetsch, a) Les équations aux dérivées partielles du type parabolique. L'Enseignement Math. **35** (1936), S. 43—87; b Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, S. 363. Berlin 1937.

formation der bis heute bekannten singulären Lösungen der Wärmeleitungsgleichung nach unserer Methode in solche der Potentialgleichung gibt uns Veranlassung, die singulären Lösungen der Potentialgleichung auch von der Seite der analytischen Funktionen her zu beleuchten (§ 4). — Die folgenden Erörterungen sind keineswegs erschöpfend, sie stellen nur das Prinzip der Sache an drastischen Beispielen dar und werden vielleicht zum Aufsuchen weiterer Zusammenhänge dieser Art anregen.

§ 2.

Komposition zweier Lösungen zu einer neuen.

a) Die Funktion $W_1(x, y)$ genüge der Wärmeleitungsgleichung (1. 3) in dem Halbstreifen $a < x < b$, $0 < y$ und $W_2(x, y)$ derselben Gleichung in dem Halbstreifen $c < x < d$, $0 < y$. Das Integral

$$U(x, y) = \int_0^\infty W_1(x, t)\, W_2(y, t)\, dt \tag{2. 1}$$

konvergiere für $a < x < b$, $c < y < d$ und lasse sich nach x und y je zweimal unter dem Integralzeichen differenzieren, was z. B. dann möglich ist, wenn die entstehenden Integrale in einer gewissen Umgebung um x bzw. y gleichmäßig konvergieren. Dann ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \int_0^\infty \frac{\partial^2 W_1(x, t)}{\partial x^2} W_2(y, t)\, dt = \int_0^\infty \frac{\partial W_1(x, t)}{\partial t} W_2(y, t)\, dt,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \int_0^\infty W_1(x, t) \frac{\partial^2 W_2(y, t)}{\partial y^2}\, dt = \int_0^\infty W_1(x, t) \frac{\partial W_2(y, t)}{\partial t}\, dt.$$

Wenn das Produkt $W_1(x, t)\, W_2(y, t)$ für $t \to 0$ und $t \to \infty$ Grenzwerte besitzt[2]), so erhält man durch partielle Integration:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \lim_{t \to \infty} W_1(x,t) W_2(y,t) - \lim_{t \to 0} W_1(x,t) W_2(y,t) - \int_0^\infty \frac{\partial W_1(x, t)}{\partial t} W_2(y, t)\, dt.$$

Ist nun

$$\lim_{t \to \infty} W_1(x, t)\, W_2(y, t) - \lim_{t \to 0} W_1(x, t)\, W_2(y, t) = 0, \tag{2. 2}$$

so folgt:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0,$$

---

[2]) Diese Voraussetzungen der Konvergenz des Integrals, der Differenzierbarkeit unter dem Integralzeichen und der Existenz der Grenzwerte machen wir in der Folge immer, ohne sie nochmals zu erwähnen.

d. h. $U(x, y)$ genügt der Potentialgleichung (1. 1) in dem Rechteck $a < x < b$, $c < y < d$.

Analoge Betrachtungen gelten natürlich, wenn in $W_1(x, t)$ und $W_2(y, t)$ die Variable t nur in dem endlichen Intervall $\alpha < t < \beta$ variiert und wir dementsprechend das Integral

$$U(x, y) = \int_{\alpha}^{\beta} W_1(x, t)\, W_2(y, t)\, dt$$

bilden.

Wählt man beispielsweise für $W_1(x, t)$ die in der Wärmeleitungstheorie fundamentale Funktion

$$\psi(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}\, t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \tag{2. 3}$$

die einer „Doppelquelle" entspricht und übrigens in $0 < x, 0 < t$ eine singuläre Lösung darstellt, und für $W_2(y, t)$ eine Funktion $W(y, t)$, die in jedem Teilstreifen $c < \gamma \leqq y \leqq \delta < d$ mitsamt $\frac{\partial W}{\partial t}$ (und damit $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$) beschränkt bleibt, so sind alle Bedingungen erfüllt, insbesondere auch (2. 2), da $\lim_{t \to 0} \psi(x, t) = \lim_{t \to \infty} \psi(x, t) = 0$ ist. Die Funktion

$$U(x, y) = \int_{0}^{\infty} \psi(x, t)\, W(y, t)\, dt$$

genügt daher in dem Halbstreifen $0 < x$, $c < y < d$ der Potentialgleichung. Auf dieses Beispiel werden wir später noch ausführlich zurückkommen.

b) $W_0(x, y)$ genüge für $a < x < b$, $0 < y$ der Wärmeleitungsgleichung (1. 3), $V(x, y)$ für $a < x < b$, $0 < y$ der Wellengleichung (1. 2). Für das Integral

$$W(y, t) = \int_{a}^{b} W_0(x, t)\, V(x, y)\, dx \tag{2. 4}$$

ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \int_{a}^{b} W_0(x, t) \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial y^2}\, dx = \int_{a}^{b} W_0(x, t) \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial x^2}\, dx,$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \int_{a}^{b} \frac{\partial W_0(x, t)}{\partial t} V(x, y)\, dx = \int_{a}^{b} \frac{\partial^2 W_0(x, t)}{\partial x^2} V(x, y)\, dx$$

$$= \frac{\partial W_0(x, t)}{\partial x} V(x, y) \Big|_{x \to a}^{x \to b} - \int_{a}^{b} \frac{\partial W_0(x, t)}{\partial x} \frac{\partial V(x, y)}{\partial x}\, dx$$

$$= \frac{\partial W_0(x, t)}{\partial x} V(x, y) \Big|_{x \to a}^{x \to b} - W_0(x, t) \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} \Big|_{x \to a}^{x \to b} + \int_{a}^{b} W_0(x, t) \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial x^2}\, dx.$$

Ist nun

$$(2.5)\quad \lim_{x\to b}\left\{\frac{\partial W_0(x,t)}{\partial x}V(x,y)-W_0(x,t)\frac{\partial V(x,y)}{\partial x}\right\}-\lim_{x\to a}\{\ldots\}=0,$$

so erhalten wir:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}=\frac{\partial W}{\partial t},$$

d. h. $W(y,t)$ genügt der Wärmeleitungsgleichung (1. 3) in der Viertelebene $0<y,\ 0<t$.

* * *

Einschaltung: Die unter b) abgeleitete Tatsache kann man so interpretieren, daß durch „Transformation" einer Lösung der Wellengleichung mit einer Lösung der Wärmeleitungsgleichung als Kern eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung entsteht, d. h. die zweite Ableitung in der einen Variablen auf die erste reduziert wird. Dies läßt eine merkwürdige Formel aus der Theorie der Laplace-Transformation

$$f(s)=\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt\equiv\mathfrak{L}\{F\}$$

in neuem Licht erscheinen. Ersetzt man s durch $\sqrt{s}$ (Hauptzweig):

$$f(\sqrt{s})=\int_0^\infty e^{-\sqrt{s}\,x}F(x)\,dx$$

und $e^{-\sqrt{s}\,x}$ durch[3])

$$e^{-x\sqrt{s}}=\mathfrak{L}\{\psi(x,t)\}=\int_0^\infty e^{-st}\psi(x,t)\,dt,$$

wo $\psi(x,t)$ die Funktion (2. 3) ist, so ergibt sich bei Vertauschbarkeit der Integrale, also z. B. bei absoluter Konvergenz des Integrals für $f(s)$:

$$(2.6)\quad f(\sqrt{s})=\int_0^\infty dx\,F(x)\int_0^\infty e^{-st}\psi(x,t)\,dt=\int_0^\infty dt\,e^{-st}\int_0^\infty\psi(x,t)\,F(x)\,dx$$
$$=\mathfrak{L}\left\{\int_0^\infty\psi(x,t)\,F(x)\,dx\right\},$$

d. h. dem Übergang von $F(t)$ zu

$$(2.7)\qquad G(t)=\int_0^\infty\psi(x,t)\,F(x)\,dx$$

im Bereich der „großen" Funktionen entspricht ein Wechsel des Argumentes s in $\sqrt{s}$ im Bereich der „kleinen" Funktionen: $\mathfrak{L}\{G\}\equiv g(s)=f(\sqrt{s})$.

---

[3]) Siehe l. c. [1]), b), S. 25.

Ersetzt man nun in $G(t)$ die Funktion $F(x)$ durch eine Funktion $V(x, y)$, die noch von einer weiteren Variablen y abhängt und der Wellengleichung genügt, so erhält man, da $\psi(x, t)$ die Wärmeleitungsgleichung erfüllt, gerade eine Komposition $W(y, t)$ der Art (2. 4) mit $a = 0$, $b = \infty$. Unterwirft man $V(x, y)$ hinsichtlich x und $W(y, t)$ hinsichtlich t der Laplace-Transformation, so bekommt man zwei Funktionen $v(s, y)$ und $w(y, s)$, die nach dem Obigen in der Beziehung stehen:

$$w(y, s) = v(\sqrt{s}, y).$$

Diese macht nun aber das Ergebnis unter b) sofort verständlich. Denn wenn $V(x, y)$ der partiellen Differentialgleichung (1.2) für $0 < x$, $0 < y$ genügt und für $x \to 0$ die Randwerte

$$\lim_{x \to 0} V(x, y) = V_0(y), \quad \lim_{x \to 0} \frac{\partial V}{\partial x} = V_1(y)$$

besitzt, so erfüllt $v(s, y)$ bekanntlich die gewöhnliche Differentialgleichung[4]):

$$\frac{d^2 v(s, y)}{d y^2} = s^2 v(s, y) - s V_0(y) - V_1(y). \tag{2.8}$$

Gilt nun die Beziehung (2. 5), so muß wegen

$$\lim_{x \to 0} \psi(x, t) = \lim_{x \to \infty} \psi(x, t) = 0, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\, t^{\frac{3}{2}}}, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

$\lim_{x \to 0} V(x, y) = V_0(y) \equiv 0$ sein. Ist weiterhin $W(y, t) = \int_0^\infty \psi(x, t)\, V(x, y)\, dx$, und setzt man

$$\chi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \tag{2.9}$$

so ist

$$W(y,t) = -\int_0^\infty \frac{\partial \chi(x,t)}{\partial x} V(x,y)\, dx = -\chi(x,t)\, V(x,y)\Big|_{x \to 0}^{x \to \infty} + \int_0^\infty \chi(x,t) \frac{\partial V(x,y)}{\partial x} dx$$

$$= \int_0^\infty \chi(x, t) \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} dx$$

wegen $\lim_{x \to 0} V(x, y) = V_0(y) = 0$, $\lim_{x \to \infty} \chi(x, t) = 0$. Aus dieser Darstellung folgt[5])

$$W_0(y) = \lim_{t \to 0} W(y, t) = \lim_{x \to 0} \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} = V_1(y).$$

---

[4]) Siehe l. c. [1]), b), S. 153 und 19. Kap., § 3. Die Laplace-Transformation verwandelt die n-te Ableitung bei den „großen" Funktionen im wesentlichen in eine Multiplikation mit s^n bei den „kleinen" Funktionen:

$$\mathfrak{L}\{F^{(n)}\} = s^n f(s) - F(0)\, s^{n-1} - F'(0)\, s^{n-2} - \ldots - F^{(n-1)}(0).$$

[5]) Siehe hierzu die nähere Ausführung in § 3 unter a).

Führt man $V_0(y) = 0$ und $V_1(y) = W_0(y)$ in (2. 8) ein und ersetzt s durch $\sqrt{s}$, $v(\sqrt{s}, y)$ durch $w(y, s)$, so steht da:

$$\frac{d^2 w(y,s)}{d y^2} = s\, w(y,s) - W_0(y),$$

d. h.[6]) $W(y, t)$ erfüllt die Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \frac{\partial W}{\partial t}$. Man sieht: Die Tatsache, daß der Übergang von $F(t)$ zu der Funktion $G(t)$ von (2. 7) im Bereich der „großen" Funktionen sich in einem Übergang von s zu $\sqrt{s}$ bei den „kleinen" Funktionen widerspiegelt, wirkt sich dahin aus, daß aus dem s^2 in (2. 8) ein s wird, was bei den „großen" Funktionen mit der Reduktion der zweiten Ableitung auf die erste gleichbedeutend ist. — Allgemein wird, das Verschwinden der „Anfangswerte" $F(0), F''(0), \ldots, F^{(2n-2)}(0)$ vorausgesetzt, der Übergang von $F(t)$ zu $G(t)$ den Ersatz der 2 n-ten Ableitung $F^{(2n)}(t)$ durch die n-te $G^{(n)}(t)$ bewirken.

* * *

c) $U_1(x, y)$ genüge der Potentialgleichung (1. 1) in dem Rechteck $a < x < b$, $c < y < d$, $U_2(x, y)$ derselben Gleichung in dem Rechteck $\alpha < x < \beta$, $c < y < d$. Für die Funktion

$$V(x,t) = \int_c^d U_1(x,y)\, U_2(t,y)\, dy \tag{2. 10}$$

gilt:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \int_c^d \frac{\partial^2 U_1(x,y)}{\partial x^2} U_2(t,y)\, dy = -\int_c^d \frac{\partial^2 U_1(x,y)}{\partial y^2} U_2(t,y)\, dy$$

$$= -\frac{\partial U_1(x,y)}{\partial y} U_2(t,y)\Big|_c^d + \int_c^d \frac{\partial U_1(x,y)}{\partial y} \frac{\partial U_2(t,y)}{\partial y}\, dy$$

$$= -\frac{\partial U_1(x,y)}{\partial y} U_2(t,y) + U_1(x,y) \frac{\partial U_2(t,y)}{\partial y}\Big|_c^d - \int_c^d U_1(x,y) \frac{\partial^2 U_2(t,y)}{\partial y^2}\, dy.$$

Ist

$$\frac{\partial U_1(x,y)}{\partial y} U_2(t,y) - U_1(x,y) \frac{\partial U_2(t,y)}{\partial y}\Big|_c^d = 0, \tag{2. 11}$$

so ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} = -\int_c^d U_1(x,y) \frac{\partial^2 U_2(t,y)}{\partial y^2}\, dy = \int_c^d U_1(x,y) \frac{\partial^2 U_2(t,y)}{\partial t^2}\, dy = \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2},$$

d. h. $V(x, t)$ genügt der Wellengleichung (1. 2).

---

[6]) Hier wird die unter [4]) erwähnte Verwandlung in umgekehrter Richtung durchlaufen.

d) Durch Vorzeichenvertauschung in c) stellt man fest: Komponiert man in analoger Weise und unter gleichen Voraussetzungen eine Lösung der Potentialgleichung mit einer solchen der Wellengleichung, so entsteht eine Lösung der Potentialgleichung; komponiert man zwei Lösungen der Wellengleichung, so ergibt sich eine Lösung derselben Gleichung. — Die Komposition einer Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit einer der Potentialgleichung führt auf eine Lösung der Gleichung $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial W}{\partial t} = 0$, die durch Vertauschung von t mit $-t$ in die Wärmeleitungsgleichung übergeht und selbst auch vom parabolischen Typ ist.

Wir erhalten also für die Lösungen der drei Typen folgendes *Kompositionsschema*:

	elliptisch	hyperbolisch	parabolisch
elliptisch	hyperbolisch	elliptisch	parabolisch
hyperbolisch	elliptisch	hyperbolisch	parabolisch
parabolisch	parabolisch	parabolisch	elliptisch

§ 3.

Zusammenhang zwischen den Randwerten.

Sind die komponierenden Funktionen hinreichend regulär, daß man den Grenzübergang, der der Annäherung an den Rand entspricht, unter dem Integralzeichen ausführen kann, so sind die Randwerte der resultierenden Funktion leicht aus denen der komponierenden Funktionen zu berechnen, z. B. in (2. 4):

$$\lim_{t \to 0} W(y, t) = \int_a^b \{\lim_{t \to 0} W_0(x, t)\} V(x, y)\, dx.$$

Eigentliches Interesse bietet daher nur der Fall, daß mindestens eine der komponierenden Funktionen sich so singulär verhält, daß sich der Grenzübergang gerade *nicht* unter dem Integral ausführen läßt. Wir führen im Hinblick auf spätere Anwendungen zwei spezielle Beispiele an.

a) Setzt man in (2. 4) mit $a = 0$, $b = \infty$ für $W_0(x, t)$ die durch (2. 9) gegebene Funktion $\chi(x, t)$, die der durch eine „Quelle" erzeugten Temperaturverteilung entspricht:

$$W(y, t) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} V(x, y)\, dx \qquad (0 < y,\ 0 < t), \tag{3. 1}$$

so ist der Grenzübergang $t \to 0$ offenkundig nicht unter dem Integral ausführbar. Nun besagt aber ein bekannter Satz von Weierstraß aus der Theorie der Wärmeleitung, daß das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \Phi(x)\, dx$$

für $t \to +0$ gegen $\Phi(\xi)$ strebt, wenn $\Phi(x)$ an der Stelle ξ stetig ist[7]). Hat $V(x, y)$ für $x \to 0$ einen Grenzwert $V(y)$, so definieren wir $V(0, y) = V(y)$ und setzen $V(x, y)$ in das Intervall $-\infty < x < 0$ als gerade Funktion fort. Dann ist $W(y,t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty}$, ferner $V(x, y)$ an der Stelle $x = 0$ stetig, und der Weierstraßsche Satz liefert mit $\xi = 0$:

Wenn die Lösung $V(x, y)$ der Wellengleichung $(0 < x, 0 < y)$ für $x \to 0$ die Randfunktion $V(y)$ hat, so besitzt die Funktion $W(y, t)$, die unter der Voraussetzung (2. 5) eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung darstellt, auch ohne diese Voraussetzung dieselbe Randfunktion $V(y)$ für $t \to 0$.

---

[7]) Bei dieser Gelegenheit sei darauf aufmerksam gemacht, daß der Weierstraßsche Satz sofort aus einem Spezialfall des in der Theorie der Laplace-Transformation (s. S. 318) fundamentalen und leicht beweisbaren Satzes von „Abelschem Charakter" folgt [vgl. l. c. [1]), b), S. 188]: „Wenn $F(t) \sim A t^{\alpha}$ $(\alpha > -1)$ für $t \to 0$, so ist $f(s) \equiv \mathfrak{L}\{F\} \sim A \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$ für $s \to \infty$." Setzen wir nämlich in dem Weierstraßschen Integral

$$x = \xi - \sqrt{\tau} \text{ im Intervall } -\infty < x < \xi,$$
$$x = \xi + \sqrt{\tau} \text{ „ „ } \xi < x < \infty$$

und $\frac{1}{4t} = s$, so steht da:

$$-\int_{\infty}^{0} \sqrt{\frac{s}{\pi}}\, e^{-s\tau}\, \Phi(\xi - \sqrt{\tau})\, \frac{d\tau}{2\sqrt{\tau}} + \int_{0}^{\infty} \sqrt{\frac{s}{\pi}}\, e^{-s\tau}\, \Phi(\xi + \sqrt{\tau})\, \frac{d\tau}{2\sqrt{\tau}}$$

$$= \sqrt{\frac{s}{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-s\tau}\, \frac{\Phi(\xi+\sqrt{\tau}) + \Phi(\xi-\sqrt{\tau})}{2}\, \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} = \sqrt{\frac{s}{\pi}}\, \mathfrak{L}\left\{\frac{\Phi(\xi+\sqrt{\tau}) + \Phi(\xi-\sqrt{\tau})}{2}\, \tau^{-\frac{1}{2}}\right\}.$$

Ist nun Φ an der Stelle ξ stetig (oder existiert auch nur der Mittelwert

$$\lim_{z \to 0} \frac{\Phi(\xi+z) + \Phi(\xi-z)}{2}\Big),$$

so verhält sich die Funktion in $\{\ldots\}$ für $\tau \to 0$ wie $\Phi(\xi)\, \tau^{-\frac{1}{2}}$, also das Laplace-Integral für $s \to \infty$ wie

$$\Phi(\xi) \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}}} = \Phi(\xi) \sqrt{\frac{\pi}{s}},$$

der ganze Ausdruck strebt daher gegen $\Phi(\xi)$. $s \to \infty$ ist aber gleichbedeutend mit $t \to 0$.

b) Wir betrachten den schon S. 317 hervorgehobenen Spezialfall der Komposition (2. 1):

$$(3.\,2) \qquad U(x,y) = \int_0^\infty \psi(x,t)\, W(y,t)\, dt \quad (0 < x,\ c < y < d).$$

Die Funktion $\psi(x,t)$ ist das grundlegende Beispiel einer singulären Lösung der Wärmeleitungsgleichung in der Viertelebene $0 < x$, $0 < t$[8]). Sie hat bei senkrechter Annäherung an beide Ränder die Grenzwerte 0, in der Umgebung von $x = 0$, $t = 0$ verhält sie sich sehr kompliziert. Erfüllt $W(y,t)$ die S. 317 formulierte Bedingung, so ist $U(x,y)$ eine Lösung der Potentialgleichung, über deren Randwerte wir folgendes behaupten:

Wenn die Lösung $W(y,t)$ der Wärmeleitungsgleichung in $c < y < d$ für $t \to +0$ eine Randfunktion $W(y)$ besitzt, so hat die durch (3. 2) *definierte Lösung der Potentialgleichung für $x \to 0$ dieselbe Randfunktion $W(y)$.*

Der Beweis läßt sich auf den unter [7]) zitierten Satz von Abelschem Charakter für die Laplace-Transformation zurückführen und findet sich (ohne den Parameter y) in dem unter [1]), b) zitierten Buch S. 189.

Hat ferner $W(y,t)$ für $y \to c + 0$ an allen Stellen $t > 0$ einen konstanten Randwert k und ist für alle hinreichend nahe an c gelegenen y-Werte

$$(3.\,3) \quad |W(y,t)| < C_1 t^{-\alpha} \text{ für } t \to 0,\ |W(y,t)| < C_2 \text{ für } t \to \infty,$$

wo C_1, C_2 und α positive Konstante sind[9]), *so hat $U(x,y)$ für $y \to c + 0$ denselben konstanten Randwert k.*

Denn dann konvergiert (3. 2) in der Umgebung von $y = c$ gleichmäßig, der Grenzübergang kann also unter dem Integral ausgeführt werden und liefert:

$$\lim_{y \to c} U(x,y) = \int_0^\infty \psi(x,t)\, \{\lim_{y \to c} W(y,t)\}\, dt = k \int_0^\infty \frac{x}{2\sqrt{\pi}\, t^{\frac{3}{2}}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}\, dt$$

$$= 2\frac{k}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-u^2}\, du = k.$$

Analog überträgt sich ein konstanter Randwert von W für $y \to d - 0$ auf U.

In diesem Sonderfall stimmen also die Randwerte von $U(x,y)$ mit denen von $W(y,t)$ genau überein.

---

[8]) Siehe l. c. [1]), b), 20. Kap., § 5.

[9]) $W(y,t)$ braucht also für $y \to c$ den konstanten Randwert keineswegs gleichmäßig in $0 < t$ zu approximieren, sondern die Approximation kann z. B. in der Nähe von $t = 0$ so ungleichmäßig vor sich gehen, wie bei dem später betrachteten Beispiel $W(y,t) \equiv \psi(y,t)$ für $y \to 0$.

Unter den Funktionen $W(y, t)$ sind nun am interessantesten diejenigen, die an allen drei Rändern die Randwerte 0 haben, also selbst auch singuläre Lösungen sind. Aus jeder solchen singulären Lösung der Wärmeleitungsgleichung [die noch die S. 317 formulierte Bedingung sowie (3. 3) erfüllt] kann man vermittels (3. 2) eine Lösung der Potentialgleichung ableiten, die ebenfalls an allen drei Rändern die Randwerte 0 hat, also singulär ist. Solcher Funktionen $W(y, t)$ gibt es unendlich viele, die fundamentalen Beispiele sind[10])

im Intervall $0 < y < \infty$ die Funktion $\psi(y, t)$ und ihre partiellen Ableitungen nach t,

im Intervall $0 < y < 1$ die Funktion

$$W(y,t) = -\frac{\partial\, \vartheta_3\left(\frac{y}{2}, t\right)}{\partial\, y}$$

$$= 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi y$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi(y + 2n, t)$$

und ihre partiellen Ableitungen nach t.

Im Intervall $0 < y$ sind die hierzu gehörigen singulären Funktionen $U(x, y)$ von ganz elementarem Charakter, so ist z. B.

$$(3.4) \qquad U_0(x,y) = \int_0^{\infty} \psi(x,t)\,\psi(y,t)\,dt = \frac{xy}{4\pi}\int_0^{\infty} \frac{1}{t^3} e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}\,dt$$

$$= \frac{xy}{\pi(x^2+y^2)} \int_0^{\infty} \frac{x^2+y^2}{4}\,\frac{1}{t^2}\, e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}} \cdot \frac{dt}{t}$$

$$= \frac{xy}{\pi(x^2+y^2)} \left(e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}} \frac{1}{t}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}} \frac{1}{t^2}\,dt \right)$$

$$= \frac{4xy}{\pi(x^2+y^2)^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}\Big|_0^{\infty} = \frac{4xy}{\pi(x^2+y^2)^2}.$$

Diese Funktion hat tatsächlich alle verlangten Eigenschaften: Sie strebt gegen 0 bei festem $y > 0$ für $x \to 0$ und bei festem $x > 0$ für $y \to 0$, außerdem genügt sie für $0 < x$, $0 < y$ der Potentialgleichung, denn es ist

[10]) Siehe l. c. [1]), b), 20. Kap., § 5.

$U(x, y) = \Im \frac{-2}{\pi z^2}$, wo $z = x + iy$, und $\frac{1}{z^2}$ ist außer an der Stelle $z = 0$ analytisch. — Für $W(y, t) \equiv \frac{\partial \psi}{\partial t}$ erhält man:

$$U_1(x, y) = \int_0^\infty \psi(x, t) \frac{\partial \psi(y, t)}{\partial t} dt = \int_0^\infty \psi(x, t) \frac{\partial^2 \psi(y, t)}{\partial y^2} dt = \frac{\partial^2 U_0(x, y)}{\partial y^2}$$

$$= -\Im \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{-2}{\pi z^2}\right) = \Im \frac{12}{\pi z^4} = \frac{48}{\pi} \frac{xy(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^4}.$$

Unter Weglassung von irrelevanten konstanten Faktoren erhält man offenbar aus den Funktionen $\frac{\partial^n \psi(y,t)}{\partial t^n}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ die für die Potentialgleichung in der Viertelebene $0 < x$, $0 < y$ singulären Lösungen $\Im z^{-2n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Im Intervall $0 < y < 1$ erhält man aus den beiden Reihen für $W(y, t)$ folgende Darstellungen der entsprechenden Funktion $U(x, y)$[11]):

$$U(x, y) = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n\pi x} \sin n\pi y \tag{3.5}$$

$$= \frac{4}{\pi} x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{y + 2n}{(x^2 + (y + 2n)^2)^2}. \tag{3.6}$$

Der zweiten sieht man an, daß $U(x, y)$ für $x \to 0$, der ersten, daß $U(x, y)$ für $y \to 0$ und $y \to \pi$ gegen 0 strebt. Es ist

$$U(x, y) = -2\pi \Im \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n\pi z} = 2\Im \frac{d}{dz} \frac{e^{-\pi z}}{1 - e^{-\pi z}} = 2\pi \Im \frac{e^{\pi z}}{(1 - e^{\pi z})^2}. \tag{3.7}$$

§ 4.

Allgemeines über singuläre Lösungen der Potentialgleichung.

Die Frage nach singulären Lösungen, d. h. solchen, die im Innern des Gebiets der betreffenden Differentialgleichung genügen und bei Annäherung an den Rand in senkrechter (oder irgendeiner anderen) Richtung (also nicht notwendig bei zweidimensionalem, sondern bei einem eindimensionalen Grenzübergang) überall gegen 0 streben, ist zuerst bei der Wärmeleitungsgleichung aufgeworfen worden[12]). Durch die oben betrachteten Kompositionen sind wir darauf geführt worden, das entsprechende Problem bei der Potential-

[11]) Es ist nämlich

$$\int_0^\infty \psi(x, t) e^{-n^2\pi^2 t} dt = \mathfrak{L}\{\psi(x, t)\}_{s = n^2\pi^2} = e^{-n\pi x}.$$

[12]) G. Doetsch, Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung, II. Mitteilung. Math. Zeitschr. 22 (1925), S. 293—306 [§ 2]; siehe auch l. c. [1]), b), 20. Kap., § 5.

gleichung zu betrachten, wo es bisher nicht diskutiert worden zu sein scheint. Wir bemerken zunächst, daß die Funktionen $U(x, y) = \Im z^{-2n}$ uns darauf aufmerksam machen, daß es in der Viertelebene $0 < x$, $0 < y$ noch viel einfachere singuläre Lösungen gibt, nämlich $U(x, y) = \Im z^{2n}$:

$$\Im z^2 = 2xy, \quad \Im z^4 = 4xy(x^2 - y^2), \ldots,$$

in Polarkoordinaten:

$$\Im z^{2n} = r^{2n} \sin 2n\varphi.$$

Diese Funktionen streben sogar bei zweidimensionaler Annäherung an jeden Randpunkt gegen 0 (sind dafür aber im Gegensatz zu den vorigen weit draußen nicht beschränkt), denn beim Grenzübergang

gegen einen Punkt $(x, 0)$ mit $x > 0$ strebt $\varphi \to 0$, also $\sin 2n\varphi \to 0$,
gegen einen Punkt $(0, y)$ mit $y > 0$ strebt $\varphi \to \frac{\pi}{2}$, also $\sin 2n\varphi \to 0$,
gegen den Punkt $(0, 0)$ strebt $r \to 0$.

Das erklärt sich einfach daraus, daß die Funktionen $w = z^{2n}$ die Viertelebene $0 < x$, $0 < y$ auf die halbe ($n = 1$), volle ($n = 2$) oder mehrfach überdeckte ($n > 2$) w-Ebene abbilden, wobei die Ränder $x = 0$ und $y = 0$ in die reelle Achse der w-Ebene übergehen. Nähert sich z der Begrenzung der Viertelebene, so nähert sich also der komplexe Punkt w der reellen Achse, der Imaginärteil strebt daher gegen 0.

Man könnte nun meinen, daß man für jeden beliebigen einfach zusammenhängenden Bereich derartige singuläre Lösungen konstruieren könnte, indem man ihn durch analytische Funktionen auf die obere Halbebene oder einen anderen einfach zusammenhängenden Bereich abbildet, dessen Rand aus einem Teil der reellen Achse besteht, und dann den Imaginärteil der Funktion nimmt. Wir wollen zunächst einige Beispiele geben, wo dieses Verfahren zum gewünschten Erfolg führt, um dann an einem weiteren Fall zu zeigen, daß hier ein Trugschluß vorliegt.

1. Das Gebiet sei der Halbstreifen $0 < x < \pi$, $0 < y$. Eine analytische Funktion, die diesen auf die obere Halbebene abbildet, ist

$$w = -\operatorname{ctg}^2 \frac{z}{2} = \left(\frac{1 + e^{iz}}{1 - e^{iz}}\right)^2 = \left(\frac{\mathfrak{Sin}\, y + i \sin x}{\mathfrak{Cos}\, y - \cos x}\right)^2. \tag{4.1}$$

(Die Punkte $z = 0, \pi, \infty$ gehen in $w = \infty, 0, 1$ über.) Hier ist

$$\Im w = U(x, y) = \frac{2 \sin x\, \mathfrak{Sin}\, y}{(\mathfrak{Cos}\, y - \cos x)^2}. \tag{4.2}$$

Diesem Ausdruck sieht man sofort an, daß U bei Annäherung an alle Randpunkte des Halbstreifens mit Ausnahme der einen Ecke $x = 0$, $y = 0$ sogar zweidimensional gegen 0 strebt, da der Nenner nur für $x = y = 0$ verschwindet.

In der Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ verhält sich w wie $-\frac{1}{z^2}$ und U wie $\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, also bis auf einen Faktor wie die Funktion $U_0(x, y)$ von (3. 4). Zweidimensional existiert hier kein Grenzwert, aber eindimensional senkrecht zu den Rändern kann man in den Punkt (0, 0) nicht hineinwandern, also kommt er garnicht in Betracht.

2. Das Gebiet sei der Einheitskreis $x^2 + y^2 < 1$. Die Funktion

$$w = \frac{z}{(1-z)^2}, \tag{4. 3}$$

die beim Koebeschen Verzerrungssatz die Minimalfunktion darstellt, bildet das Innere des Einheitskreises auf die geschlitzte Vollebene ab, aus der der Strahl $-\infty < w \leqq -\frac{1}{4}$ herausgenommen ist. Dieser, doppelt gezählt, ist das Bild der Peripherie. Wandert z gegen einen Punkt der letzteren, so läuft w gegen einen Punkt der reellen Achse und $\Im w$ geht gegen 0, wie auch der geschlossene Ausdruck für $\Im w$ zeigt: In Polarkoordinaten ist

$$w = \frac{r e^{i\varphi}}{(1 - r e^{i\varphi})^2} = r \frac{e^{i\varphi} + r^2 e^{-i\varphi} - 2r}{(1 - 2r\cos\varphi + r^2)^2},$$

also

$$\Im w = U(x, y) = \frac{r(1-r^2)\sin\varphi}{(1 - 2r\cos\varphi + r^2)^2}. \tag{4. 4}$$

Auf dem Radius $\varphi = 0$ zum Punkte $x = 1$, $y = 0$ ist $U(x, y) = 0$, also auch $\lim_{r \to 1} U = 0$. Auf den übrigen Radien besorgt der Faktor $1 - r^2$ das Verschwinden[13]). Da der Nenner gleich der 4. Potenz des Abstandes des Punktes (r, φ) zum Punkte $z = 1$ ist, so strebt U sogar für jeden abgeschlossenen Bogen der Kreisperipherie, der den Punkt $z = 1$ nicht enthält, gleichmäßig zweidimensional gegen 0. Bei $z = 1$ dagegen findet keine zweidimensionale Annäherung an 0 statt. — Übrigens geht die Funktion (4. 3) durch die konforme Abbildung $z = e^{\pi\zeta}$ in die in (3. 7) vorkommende Funktion über.

3. Wir betrachten nunmehr ein Beispiel, wo die Ableitung des U aus einer analytischen Abbildungsfunktion keine singuläre Lösung ergibt. Die Funktion

$$w = i\frac{1+z}{1-z} \tag{4. 5}$$

bildet den Einheitskreis auf die obere Halbebene ab. Es ist

$$w = i\frac{1 + r e^{i\varphi}}{1 - r e^{i\varphi}} = i\frac{1 - r^2 + 2ri\sin\varphi}{1 + r^2 - 2r\cos\varphi},$$

---

[13]) Da $w = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n$, also $U = \sum_{n=1}^{\infty} n r^n \sin n\varphi$ ist, so folgt, daß die trigonometrische (nicht Fouriersche) Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin n\varphi$ für alle φ Abel-summierbar zum Werte 0 ist.

also

$$\Im w = U(x, y) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\varphi + r^2}. \tag{4.6}$$

Für $0 < \varphi < 2\pi$ ist zwar $U \to 0$ für $r \to 1$, für $\varphi = 0$ dagegen ist $U = \frac{1+r}{1-r}$, also $U \to \infty$ für $r \to 1$[14]); U ist also keine singuläre Lösung der Potentialgleichung. Das liegt daran, daß der Punkt $z = 1$ ein Pol für w ist, so daß $|w| \to \infty$ für $z \to 1$. Das Unendlichwerden wird hier unglücklicherweise gerade vom Imaginärteil besorgt, während der Realteil $-\frac{2r\sin\varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2}$ auf dem Radius $\varphi = 0$ dauernd 0 ist. Bei dem Beispiel 2. war zwar $z = 1$ auch ein Pol, aber hier übernimmt auf dem Radius $\varphi = 0$ der Realteil das Unendlichwerden, während der Imaginärteil konstant 0 ist.

Man sieht also, daß es zur Erzeugung singulärer Lösungen der Potentialgleichung nicht genügt, analytische Funktionen zugrunde zu legen, die den Rand des betreffenden einfach zusammenhängenden Gebiets auf die reelle Achse oder einen Teil davon abbilden. Da der Punkt $w = \infty$ notwendig dazu gehört, muß es auf dem Rand des Gebiets eine singuläre Stelle geben, und es fragt sich, wie sich $\Im w$ bei Annäherung von z gegen diese Stelle senkrecht zum Rand benimmt.

---

[14]) Wegen $w = i\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n\right)$, $\Im w = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\varphi$ bedeutet das, daß die trigonometrische Reihe $1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\varphi$ für alle φ außer $\varphi \equiv 0 \pmod{2\pi}$ zum Werte 0 Abel-summierbar ist.

(Eingegangen am 14. März 1940.)

Über die Randverzerrung bei schlichter konformer Abbildung.

Herrn Oskar Perron zum 60. Geburtstag am 7. Mai 1940 gewidmet.

Von

Helmut Unkelbach in München.

In meiner Arbeit [4] habe ich die konforme Abbildung der Funktionen $w = F(z)$ betrachtet, welche die Bedingungen des Schwarzschen Lemmas erfüllen, und den Zusammenhang untersucht, der zwischen dem Vergrößerungsverhältnis auf dem Rand und dem Vergrößerungsverhältnis bzw. der Drehung im Nullpunkt besteht. Das Maß für das Vergrößerungsverhältnis auf dem Rand ist die Winkelderivierte D von $F(z)$, die gemäß [1] für den Randpunkt $z = 1$ definiert ist; das Maß für das Vergrößerungsverhältnis im Nullpunkt ist $|F'(0)| = R$ und das Maß für die Drehung im Nullpunkt $\arc F'(0) = \Phi$ $(-\pi < \Phi \leqq \pi)$. Dann gilt nach Satz 2 und 3 der Arbeit [4]

1. $$D \geqq \frac{2}{1+R},$$

2. $$\begin{cases} D \geqq 1 + \sin|\Phi| & \text{für} \quad 0 \leqq |\Phi| \leqq \frac{\pi}{2}, \\ D \geqq 2 & \text{für} \quad \frac{\pi}{2} \leqq |\Phi| \leqq \pi. \end{cases}$$

Beide Abschätzungen sind scharf, d. h. 1. bzw. 2. enthält bei gegebenem R bzw. Φ die genaue untere Grenze aller vorkommenden D. Dabei fällt 2. vor allem deshalb auf, weil für $\frac{\pi}{2} \leqq \Phi \leqq \pi$ die untere Grenze aller D von Φ ganz unabhängig ist. In der vorliegenden Arbeit wollen wir nun die Frage beantworten, wie sich die obigen Abschätzungen verschärfen lassen, wenn man sich auf die Betrachtung schlichter konformer Abbildungen beschränkt. Wir werden beweisen, daß für Funktionen $F(z)$, welche die Bedingungen des Schwarzschen Lemmas erfüllen und den Kreis $|z| < 1$ auf ein schlichtes Gebiet abbilden, folgendes gilt:

(I) $$D \geqq \frac{1}{\sqrt{R}},$$

(II) $$D \geqq e^{|\Phi|} \quad \text{für} \quad -\pi < \Phi \leqq \pi.$$

Beide Abschätzungen sind wieder scharf. Nach (II) gibt es diesmal kein Intervall, in dem die untere Grenze für D von Φ unabhängig ist. Beim Beweis von (I) und (II) werden wir allerdings eine *einschränkende Voraussetzung* über die Approximation der Funktion $w = F(z)$ auf dem Rand des Kreises

$|z| \leqq 1$ machen. Wir werden nämlich $F(z)$ durch Elementariterierte approximieren und dabei voraussetzen, daß sich die Winkelderivierte von $F(z)$ als Grenzwert der Winkelderivierten der Elementariterierten gewinnen läßt[1]).

Wir gehen aus von der Betrachtung einer elementaren beschränkten Schlitzabbildung $w = s(z)$. Man versteht darunter die durch die Forderung $s(0) = 0$ normierte konforme Abbildung des Kreises $|z| < 1$ auf ein elementares Schlitzgebiet[2]); es entsteht aus dem Kreis $|w| < 1$ dadurch, daß man ihn von einem Punkt $w = e^{\beta i}$ der Peripherie aus längs des Radiusvektors ein Stück weit nach innen aufschlitzt. Bezeichnen wir denjenigen Punkt der Kreisperipherie $|z| = 1$, der auf das (innere) Ende des Schlitzes abgebildet wird, mit $e^{\alpha i}$ und setzen wir $|s'(0)| = r$ (wobei wegen des Schwarzschen Lemmas $r \leqq 1$ ist), so erhalten wir die Abbildungsfunktion $w = s(z) = s_{r,\alpha,\beta}(z)$ aus der Gleichung

$$\frac{e^{-\beta i} \cdot w}{(1 + e^{-\beta i} \cdot w)^2} = r \cdot \frac{e^{-\alpha i} \cdot z}{(1 + e^{-\alpha i} z)^2}. \tag{1}$$

Nun bilden wir davon die Iterierten. Sind $s_1(z), \ldots, s_n(z)$ irgendwelche Funktionen $s(z)$, so bezeichnen wir die durch Iteration zusammengesetzte elementare beschränkte Schlitzabbildung $s_1\big(s_2\big(\ldots\big(s_n(z)\big)\ldots\big)\big) = S_n(z)$ als n-te Elementariterierte. Peschl hat nun gezeigt, daß diese Funktionen schon ausreichen, um jede beschränkte schlichte Abbildung zu approximieren. Er hat nämlich in [2] den folgenden Satz bewiesen:

Approximationssatz. Für jede Funktion $F(z)$, welche die Bedingungen des Schwarzschen Lemmas erfüllt und den Einheitskreis schlicht abbildet, gibt es eine Folge von Elementariterierten $S_n(z)$, welche in jedem Kreis $|z| \leqq \varrho$, $0 < \varrho < 1$ gleichmäßig gegen die vorgelegte Funktion $F(z)$ konvergiert.

Diesen Satz werden wir bei dem folgenden Beweis der Ungleichungen (I) und (II) benutzen unter Hinzuziehung der schon oben erwähnten einschränkenden Voraussetzung, daß sich die $S_n(z)$ speziell so wählen lassen, daß ihre Winkelderivierten D_n die Winkelderivierte D von $F(z)$ approximieren. Die Voraussetzung ist z. B. immer dann erfüllt, wenn die Funktion $F(z)$ und ihre Approximierenden den Kreis $|z| = 1$ in einer gewissen Umgebung von $z = 1$ auf einen Bogen des Kreises $|w| = 1$ abbilden[1]).

---

[1]) Im Rahmen einer späteren Arbeit über die Approximation schlichter Funktionen auf dem Rand gedenke ich auf die Frage zurückzukommen, wie man sich von der einschränkenden Voraussetzung freimachen kann. Dies gelingt im übrigen auch auf einem Umweg, ohne daß man von den Approximationsmöglichkeiten auf dem Rand etwas weiß; man muß dabei obere Schranken für $|F(z)|$ herleiten und dann durch Grenzübergang zur Winkelderivierten übergehen. Hierzu benötigt man jedoch im Falle (II) einen größeren rechnerischen Aufwand.

[2]) Auf die Voraussetzung $s'(0) > 0$ wird hier im Gegensatz zu [2] verzichtet.

Beim Beweis denken wir uns die Abbildung stets so normiert, daß

$$F(1) = 1 \tag{2}$$

ist. Dies bedeutet keine Beschränkung der Allgemeinheit, da $D = \infty$ wird, sobald $F(1) \neq 1$ oder $F(1)$ überhaupt nicht definiert ist; für $D = \infty$ sehen wir aber die Ungleichungen (I) und (II) als erfüllt an.

Besonders einfach ist der Beweis der Ungleichung (I). Zunächst zeigen wir, daß (I) für die Funktionen $s(z)$ richtig ist. Aus der Gleichung (1) für $w = s(z)$ errechnet man unter Berücksichtigung von (2) die folgende Winkelderivierte:

$$d = s'(1) = r \cdot \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos^3\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\cos^3\frac{\alpha}{2}}. \tag{3}$$

Ferner ergibt sich aus (1) und (2) die Beziehung

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = r \cdot \cos^2\frac{\beta}{2}. \tag{4}$$

Insbesondere ist also wegen $r \leqq 1$

$$|\beta| \leqq |\alpha|, \tag{5}$$

wobei wir α und β stets so bestimmen, daß $-\pi < \alpha \leqq \pi$ und $-\pi < \beta \leqq \pi$ ist. Aus (3) und (4) folgt nun

$$d = \frac{1}{\sqrt{r}} \cdot \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}, \tag{6}$$

und aus (5) und (6) ergibt sich (α und β haben stets gleiches Vorzeichen)

$$d \geqq \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

Setzen wir nun $|s_\nu'(0)| = r_\nu$ und $|S_n'(0)| = R_n$, so ist

$$D_n = \prod_{\nu=1}^{n} d_\nu \geqq \prod_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{r_\nu}} = \frac{1}{\sqrt{R_n}},$$

und aus $\lim\limits_{n\to\infty} D_n = D$ und $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = R$ folgt bereits die Ungleichung (I). Die Abschätzung ist scharf, weil $d = \frac{1}{\sqrt{r}}$ ist für $\alpha = \beta = \pi$.

Zum Beweis von (II) setzen wir $\arc s'(0) = \varphi$, $-\pi < \varphi \leqq \pi$ und berechnen zunächst das Minimum von d bei festem φ. Aus (1) und (5) ergibt sich

$$|\varphi| = |\alpha| - |\beta|$$

und aus (3) und (4) folgt

$$d = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}.$$

Setzen wir $\operatorname{tg}\frac{|\alpha|}{2} = x$ und $\operatorname{tg}\frac{|\varphi|}{2} = a$, so ist

$$d = \frac{a x^2 + x}{x - a}, \qquad x > a.$$

Diese Funktion von x hat ein absolutes Minimum für

$$x = a + \sqrt{a^2 + 1},$$

und zwar ist an dieser Stelle

$$d_{\min} = (a + \sqrt{a^2 + 1})^2 = \left(\frac{1 + \sin\frac{|\varphi|}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}}\right)^2.$$

Es gilt also durchweg

$$d \geqq \left(\frac{1 + \sin\frac{|\varphi|}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}}\right)^2. \tag{7}$$

Wir betrachten jetzt Funktionen $S_2(z) = s_1(s_2(z))$ und setzen

$$\arg S_2'(0) = \Phi_2 \quad \text{mit} \quad -\pi < \Phi_2 \leqq \pi.$$

Dann ist die Summe $\varphi_1 + \varphi_2$ entweder gleich Φ_2 oder sie unterscheidet sich von Φ_2 um 2π. Nun ist nach (7)

$$D_2 \geqq \left(\frac{1 + \sin\frac{|\varphi_1|}{2}}{\cos\frac{\varphi_1}{2}} \cdot \frac{1 + \sin\frac{|\varphi_2|}{2}}{\cos\frac{\varphi_2}{2}}\right)^2. \tag{8}$$

Wir behaupten nun, daß das Minimum von D_2 bei festem Φ_2 für $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\Phi_2}{2}$ erreicht wird, d. h.

$$D_2 \geqq \left(\frac{1 + \sin\frac{|\Phi_2|}{4}}{\cos\frac{|\Phi_2|}{4}}\right)^4. \tag{9}$$

Zum Beweis dieser Behauptung brauchen wir wegen

$$\frac{1 + \sin\frac{|\varphi_1| + |\varphi_2|}{4}}{\cos\frac{|\varphi_1| + |\varphi_2|}{4}} \geqq \frac{1 + \sin\frac{|\Phi_2|}{4}}{\cos\frac{\Phi_2}{4}}$$

und wegen (8) nur zu zeigen, daß

$$(10)\qquad \frac{1+\sin\frac{|\varphi_1|}{2}}{\cos\frac{\varphi_1}{2}}\cdot\frac{1+\sin\frac{|\varphi_2|}{2}}{\cos\frac{\varphi_2}{2}}\geqq\left(\frac{1+\sin\frac{|\varphi_1|+|\varphi_2|}{4}}{\cos\frac{|\varphi_1|+|\varphi_2|}{4}}\right)^2.$$

Die Ungleichung (10) läßt sich auch folgendermaßen schreiben:

$$\cos^2\frac{|\varphi_1|+|\varphi_2|}{4}\left(1+\sin\frac{|\varphi_1|}{2}\right)\cdot\left(1+\sin\frac{|\varphi_2|}{2}\right)$$
$$-\left(1+\sin\frac{|\varphi_1|+|\varphi_2|}{4}\right)^2\cos\frac{\varphi_1}{2}\cos\frac{\varphi_2}{2}\geqq 0.$$

Die linke Seite dieser Ungleichung läßt sich umformen in

$$2\sin^2\frac{|\varphi_1|+|\varphi_2|}{4}\sin^2\frac{|\varphi_1|-|\varphi_2|}{4}\left(1+\sin\frac{|\varphi_1|+|\varphi_2|}{4}\right)$$
$$+2\sin\frac{|\varphi_1|+|\varphi_2|}{4}\cos^2\cdot\frac{|\varphi_1|+|\varphi_2|}{4}\cos\frac{|\varphi_1|-|\varphi_2|}{4}\left(1-\cos\frac{|\varphi_1|-|\varphi_2|}{4}\right).$$

Dieser Ausdruck ist aber trivialerweise $\geqq 0$, womit die Behauptung (9) bewiesen ist.

Nun betrachten wir eine Funktion $S_n(z)$ mit $n\geqq 2$ und setzen wieder

$$\arg S_n'(0)=\Phi_n \text{ mit } -\pi<\Phi_n\leqq\pi.$$

Dann ist $\left|\sum_{\nu=1}^{n}\varphi_\nu\right|\geqq|\Phi_n|$. Wir setzen zunächst voraus, daß n eine Potenz von 2 ist ($n=2^m$). Dann gewinnen wir die folgende fortlaufende Ungleichung (wobei wiederholt (10) angewendet wird):

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} D_{2^m}=\prod_{\nu=1}^{2^m}d_\nu &\geqq \prod_{\nu=1}^{2^m}\left(\frac{1+\sin\frac{|\varphi_\nu|}{2}}{\cos\frac{|\varphi_\nu|}{2}}\right)^2\geqq\prod_{\nu=1}^{2^{m-1}}\left(\frac{1+\sin\frac{|\varphi_{2\nu-1}|+|\varphi_{2\nu}|}{4}}{\cos\frac{|\varphi_{2\nu-1}|+|\varphi_{2\nu}|}{4}}\right)^4\geqq\cdots\\ &\geqq\left(\frac{1+\sin\frac{1}{2^m}\cdot\sum_{\nu=1}^{2^{m-1}}|\varphi_\nu|}{\cos\frac{1}{2^m}\cdot\sum_{\nu=1}^{2^{m-1}}|\varphi_\nu|}\right)^{2^m}\cdot\left(\frac{1+\sin\frac{1}{2^m}\cdot\sum_{\nu=2^{m-1}+1}^{2^m}|\varphi_\nu|}{\cos\frac{1}{2^m}\cdot\sum_{\nu=2^{m-1}+1}^{2^m}|\varphi_\nu|}\right)^{2^m}\\ &\geqq\left(\frac{1+\sin\frac{1}{2^{m+1}}\cdot\sum_{\nu=1}^{2^m}|\varphi_\nu|}{\cos\frac{1}{2^{m+1}}\cdot\sum_{\nu=1}^{2^m}|\varphi_\nu|}\right)^{2^{m+1}}\geqq\left(\frac{1+\sin\frac{|\Phi_{2^m}|}{2^{m+1}}}{\cos\frac{|\Phi_{2^m}|}{2^{m+1}}}\right)^{2^{m+1}}. \end{aligned}\right.$$

Damit haben wir die Abschätzung (9) auf beliebiges D_{2^m} ausgedehnt. Nun ist bekannt, daß sich zu jedem $s(z)$ und beliebig großem n stets ein $S_n(z)$

angeben läßt, so daß $S_n(z) \equiv s(z)$ wird. Also läßt sich jedes $S_n(z)$ immer auch als $S_{2^m}(z)$ schreiben, wo 2^m eine beliebige Zweierpotenz $> n$ ist. Daher gilt

$$D_n \geqq \lim_{m \to \infty} \left(\frac{1 + \sin \frac{|\Phi_n|}{2^{m+1}}}{\cos \frac{\Phi_n}{2^{m+1}}} \right)^{2^{m+1}} = e^{|\Phi_n|} \tag{12}$$

und

$$D = \lim_{n \to \infty} D_n \geqq \lim_{n \to \infty} e^{|\Phi_n|} = e^{|\Phi|},$$

womit die Ungleichung (II) bewiesen ist. Wir beachten noch, daß es solche Funktionen $s(z)$ gibt, für welche in (7) das Gleichheitszeichen gilt. Setzen wir aus 2^m solchen Funktionen mit gleichem φ die Elementariterierte $S_{2^m}(z)$ zusammen, so gilt

$$D_{2^m} = \left(\frac{1 + \sin \frac{|\Phi_{2^m}|}{2^{m+1}}}{\cos \frac{\Phi_{2^m}}{2^{m+1}}} \right)^{2^{m+1}}$$

und aus (12) folgt jetzt, daß die Abschätzung (II) auch wirklich scharf ist.

Aus (II) folgt insbesondere

$$D \geqq e^{\pi} \approx 23{,}1407 \quad \text{für} \quad F'(0) < 0 \tag{IIa}$$

(vgl. damit die analoge Abschätzung $D \geqq 2$ für nicht schlichte Funktionen).

Es sei noch bemerkt, daß die Abschätzung (II) ihre Gültigkeit behält, wenn man die Drehung Φ durch die Gesamtdrehung Φ^* des Bildes von $0 \leqq z \leqq 1$ ersetzt, die wir folgendermaßen definieren: wir setzen

$$\Phi(z) = \arg F'(z)$$

(wobei $\Phi(0) = \Phi$ ist) und

$$\Phi^* = \int_0^1 \Phi'(t)\, dt \qquad (t \text{ reell}),$$

wenn das Integral existiert. (Bei endlichem D ist $\Phi + \Phi^*$ stets ein ganzzahliges Vielfaches von 2π). Es läßt sich nun beweisen, daß

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} D \geqq e^{|\Phi^*|}, & \text{falls } \Phi^* \text{ existiert,} \\ D = \infty, & \text{falls } \Phi^* \text{ nicht existiert.} \end{cases}$$

In (III) ist insbesondere folgendes enthalten: Wenn sich das Bild von $0 \leqq z \leqq 1$ um den Nullpunkt k-mal herumschlingt, so ist

$$D \geqq e^{2k\pi}. \tag{IIIa}$$

Die Abschätzung (III) ist wieder scharf. Der Beweis ergibt sich durch geringfügige Abwandlung aus dem Beweis von (II), wobei wieder eine einschränkende Voraussetzung über die Approximation auf dem Rand gemacht wird.

Der Approximationssatz von Peschl leistet auch sonst bei der Aufstellung von Verzerrungssätzen über schlichte Funktionen wertvolle Dienste. Zum Beispiel läßt sich mit seiner Hilfe leicht der folgende Satz beweisen, der einen Zusammenhang liefert zwischen der Randverzerrung und dem Verlauf des Randes des Bildgebietes von $|z| < 1$: Erfüllt die Funktion $w = F(z)$ die Bedingungen des Schwarzschen Lemmas und bildet sie den Kreis $|z| < 1$ auf ein schlichtes Gebiet ab, das einen Randpunkt im Kreis $|w| \leqq \varrho < 1$ besitzt, so genügt die Winkelderivierte D von $F(z)$ der Ungleichung

$$\text{(IV)} \qquad D \geqq \frac{1+\varrho}{2\sqrt{\varrho}}.$$

Die Abschätzung ist wieder scharf. (Für nicht schlichte Funktionen gilt $D \geqq \frac{(1+\varrho)\log\frac{1}{\varrho}}{2(1-\varrho)}$, vgl. hierzu meine Arbeit [3], Satz V. Es wäre von Interesse, für alle im 1. Abschnitt von [3] angegebenen Sätze die Analoga für schlichte Funktionen zu finden.)

Zum Schluß soll noch auf eine Reihe von Problemen hingewiesen werden, auf die man durch unsere Untersuchungen geführt wird. Es erhebt sich nämlich die Frage, wie sich die angegebenen Abschätzungen verschärfen lassen, wenn man sich auf die Betrachtung sterniger bzw. konvexer Abbildungen beschränkt. Was zunächst die *sternigen* Abbildungen anlangt, so lassen sich für sie die Ungleichungen (I) und (IV) sicher nicht verschärfen, da das Gleichheitszeichen dieser Ungleichungen für elementare beschränkte Schlitzabbildungen, also für sternige Funktionen gilt. Dagegen läßt sich die Ungleichung (II) für sternige Funktionen verschärfen, und zwar ist vermutlich $D \geqq \left(\frac{1+\sin\frac{|\Phi|}{2}}{\cos\frac{\Phi}{2}}\right)^2$ [3]. Für *konvexe* Abbildungen lassen sich die Ungleichungen (I), (II) und (IV) durchweg verschärfen, jedoch sind die Fälle (I) und (II) nicht so glatt zu behandeln. An Stelle von (IV) tritt bei konvex abbildenden Funktionen die folgende (scharfe) Abschätzung

$$D \geqq \frac{\delta}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\cdot\left|\operatorname{cotg}\frac{\pi^2}{2\delta}\right|$$

---

[3]) Zu einigen Sätzen von [3] lassen sich leicht die Verschärfungen für sternige Funktionen angeben. Zum Beispiel gilt folgendes: Erfüllt die Funktion $w = F(z)$ die Bedingungen des Schwarzschen Lemmas und bildet sie den Kreis $|z| < 1$ auf einen Stern mit dem Mittelpunkt $w = 0$ ab, der den Randpunkt $w = \varrho \cdot e^{\omega i}$ besitzt, so genügt die Winkelderivierte D von $F(z)$ der Ungleichung

$$D \geqq \frac{1}{2\sqrt{\varrho}}\sqrt{(1-\varrho)^2\operatorname{cotg}^2\frac{\omega}{2} + (1+\varrho)^2},$$

wo für gewisse Funktionen wieder das Gleichheitszeichen gilt. Für die Familie der schlichten Funktionen ist die Ungleichung nicht allgemein gültig.

mit

$$\delta = \pi - \arccos \varrho, \quad 0 < \arccos < \frac{\pi}{2}.$$

Der Beweis dieser Ungleichung gelingt mit ganz elementaren Hilfsmitteln, und zwar durch Vergleich einer beliebigen konvex abbildenden Funktion $F(z)$ mit einer Funktion, welche den Kreis $|z| < 1$ auf ein Kreissegment abbildet (vgl. den Beweis von Satz I meiner Arbeit [5]). Wir wollen hier nicht näher darauf eingehen.

Literaturverzeichnis.

C. Carathéodory.

[1] Über die Winkelderivierten von beschränkten analytischen Funktionen, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss., Phys.-Math. Klasse (1929).

E. Peschl.

[2] Zur Theorie der schlichten Funktionen, Journ. f. d. reine u. angewandte Mathematik **176** (1937).

H. Unkelbach.

[3] Über beschränkte Funktionen, deren Wertevorrat gewisse Lücken aufweist, Math. Annalen **115** (1938).

[4] Über die Randverzerrung bei konformer Abbildung, Math. Zeitschr. **43** (1938).

[5] Über den Vorrat analytischer Funktionen an großen Funktionswerten, Jahresber. d. Deutschen Mathematikervereinigung **49** (1939).

(Eingegangen am 1. Dezember 1939.)

Beitrag zur Theorie der mehrdimensionalen Padéschen Tafel.

Herrn Oskar Perron zum 60. Geburtstag am 7. Mai 1940 gewidmet.

Von

Josef Mall in Landsberg a. L.

§ 1.

Definition der mehrdimensionalen Padéschen Tafel[1]).

Es seien n Potenzreihen

$$\mathfrak{P}_\nu(z) = c_0^{(\nu)} + c_1^{(\nu)} z + c_2^{(\nu)} z^2 + \ldots \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

gegeben. Dann lassen sich $n+1$ Polynome

$$U^{(\nu)}_{r_0, r_1, \ldots, r_n}(z) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

die nicht alle identisch verschwinden, derart bestimmen, daß

1. $$U^{(\nu)}_{r_0, r_1, \ldots, r_n}(z) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

höchstens vom Grad $s - r_\nu$ ist, wo

$$s = r_0 + r_1 + \ldots + r_n, \tag{2}$$

2. aus den n formal gebildeten Potenzreihen

$$\mathfrak{P}_\nu(z)\, U^{(0)}_{r_0, r_1, \ldots, r_n}(z) - U^{(\nu)}_{r_0, r_1, \ldots, r_n}(z) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

alle Potenzen von z bis zur s-ten einschließlich herausfallen. Setzen wir

$$\begin{aligned} U^{(0)}_{r_0, r_1, \ldots, r_n}(z) &= q_0 + q_1 z + \ldots + q_{s-r_0} z^{s-r_0}, \\ U^{(\nu)}_{r_0, r_1, \ldots, r_n}(z) &= a_0^{(\nu)} + a_1^{(\nu)} z + \ldots + a^{(\nu)}_{s-r_\nu} z^{s-r_\nu}, \end{aligned} \tag{4}$$

so ergeben sich folgende Bedingungsgleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} c_0^{(\nu)} q_0 &= a_0^{(\nu)}, \\ c_1^{(\nu)} q_0 + c_0^{(\nu)} q_1 &= a_1^{(\nu)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c^{(\nu)}_{s-r_\nu} q_0 + c^{(\nu)}_{s-r_\nu-1} q_1 + \ldots + c^{(\nu)}_{r_0-r_\nu} q_{s-r_0} &= a^{(\nu)}_{s-r_\nu}. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

$$\left\{\begin{aligned} c^{(\nu)}_{s-r_\nu+1} q_0 + c^{(\nu)}_{s-r_\nu} q_1 + \ldots + c^{(\nu)}_{r_0-r_\nu+1} q_{s-r_0} &= 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c^{(\nu)}_{s} q_0 + c^{(\nu)}_{s-1} q_1 + \ldots + c^{(\nu)}_{r_0} q_{s-r_0} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

[1]) Siehe: Josef Mall, Grundlagen einer Theorie der mehrdimensionalen Padéschen Tafel, Dissertation München 1934.

Dabei sind in (5) und (6) alle c mit negativem unteren Index gleich Null zu setzen. Für $r_k = 0$ ist der Index $\nu = k$ in (6) wegzulassen. Dem Wertesystem $r_0, r_1, \ldots, r_n$, wo die r_ν ganze nicht negative Zahlen sind, wird der Punkt des $(n+1)$-dimensionalen Raumes mit den Koordinaten $r_0, r_1, \ldots, r_n$ zugeordnet. Dieser Punkt werde durch das Symbol $[r_0, r_1, \ldots, r_n]$ bezeichnet. Die Polynome $U^{(\nu)}_{r_0, r_1, \ldots, r_n}(z)$ sind ein zum Punkt $[r_0, r_1, \ldots, r_n]$ gehöriges Polynomsystem. Im allgemeinen gehört zu einem Punkt *nur ein* solches Polynomsystem. Ordnet man jedem Punkt die Gesamtheit seiner voneinander verschiedenen Polynomsysteme zu, so entsteht eine $(n+1)$-dimensionale Tafel von Polynomsystemen, die als $(n+1)$-dimensionale Padésche Tafel bezeichnet wird.

§ 2.

Satz über die Konvergenz der Tafel.

Wir beweisen in dieser Abhandlung den

Satz. *Die n Funktionen*

$$F_1(z),\ F_2(z),\ \ldots,\ F_n(z)$$

seien im Kreis $|z| \leqq R$ *regulär, abgesehen von gewissen Polen im Innern des Kreises, von denen aber keiner im Nullpunkt liegt. Und zwar habe* $F_\nu(z)$ *die* k_ν *Pole*

$$\alpha_1^{(\nu)},\ \alpha_2^{(\nu)},\ \ldots,\ \alpha_{k_\nu}^{(\nu)}, \quad \text{wobei} \quad |\alpha_1^{(\nu)}| \leqq |\alpha_2^{(\nu)}| \leqq \ldots |\alpha_{k_\nu}^{(\nu)}|.$$

Die $k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ *Zahlen*

$$\alpha_1^{(1)}, \ldots, \alpha_{k_1}^{(1)},\ \alpha_1^{(2)}, \ldots, \alpha_{k_2}^{(2)}, \ldots, \alpha_1^{(n)}, \ldots, \alpha_{k_n}^{(n)}$$

seien alle voneinander verschieden. $l_{i\nu}$ *sei die Ordnung des Poles* $\alpha_i^{(\nu)}$.

$$r_\nu = \sum_{i=1}^{k_\nu} l_{i\nu}$$

ist dann die Summe der Ordnungen für die Pole von $F_\nu(z)$. *Entwickelt man nun die Funktionen* $F_\nu(z)$ *in der Umgebung des Nullpunktes in Taylorsche Reihen und konstruiert die zugehörige* $(n+1)$*-dimensionale Tafel, so gilt gleichmäßig für alle z, die den Bedingungen*

$$|Z| \leqq R - \varepsilon \quad \text{und} \quad |z - \alpha_i^{(\nu)}| \geqq \varepsilon \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, k_\nu \\ \nu = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

genügen, wo ε *beliebig klein gewählt werden darf:*

$$\lim_{r_0 \to \infty} \frac{P^{(p)}_{r_0, r_1, \ldots, r_n}(z)}{P^{(0)}_{r_0, r_1, \ldots, r_n}(z)} = F_p(z) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)^2).$$

---

[2]) Die Tafelpolynome werden hier durch die Symbole $P^{(\nu)}_{r_0, r_1, \ldots, r_n}(z)$ bezeichnet.

Dieser Satz stellt eine Verallgemeinerung des Satzes VIII meiner Dissertation dar [3]).

Bevor wir mit dem eigentlichen Beweis des Satzes beginnen, müssen wir einige Hilfsbetrachtungen durchführen. Nach den Voraussetzungen des Satzes gilt:

$$F_\nu(z) = \sum_{i=1}^{k_\nu} \sum_{\lambda=1}^{l_{i,\nu}} \frac{A_{i,\lambda}^{(\nu)}}{(\alpha_i^{(\nu)} - z)^\lambda} + \sum_{\varrho=0}^{\infty} g_\varrho^{(\nu)} z^\varrho \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{7}$$

wobei der Bestandteil $\sum_{\varrho=0}^{\infty} g_\varrho^{(\nu)} z^\varrho$ auf der rechten Seite von (7) für $|z| \leqq R$ gleichmäßig konvergiert. Es gilt daher

$$|g_\varrho^{(\nu)}| < C_0 R^{-\varrho}. \tag{8}$$

Wir setzen außerdem

$$\frac{G_\nu(z)}{H_\nu(z)} = \sum_{i=1}^{k_\nu} \sum_{\lambda=1}^{l_{i\nu}} \frac{A_{i,\lambda}^{(\nu)}}{(\alpha_i^{(\nu)} - z)^\lambda}. \tag{9}$$

$H_\nu(z)$ ist dabei ein Polynom vom Grad r_ν in z. Das Polynom $G_\nu(z)$ ist höchstens vom Grad $r_\nu - 1$ in z. Wir setzen $H_\nu(0) = 1$. Durch diese Festsetzung sind die beiden Polynome $G_\nu(z)$ und $H_\nu(z)$ eindeutig bestimmt.

Die absolut kleinste der $k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ Zahlen

$$|\alpha_i^{(\nu)}| \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, k_\nu \\ \nu = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

wollen wir mit m bezeichnen. Für $|z| < m$ kann man $F_\nu(z)$ in eine Taylorsche Reihe entwickeln

$$F_\nu(z) = c_0^{(\nu)} + c_1^{(\nu)} z + c_2^{(\nu)} z^2 + \ldots \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Dabei ist unter Berücksichtigung von Formel (7)

$$c_\varrho^{(\nu)} = d_\varrho^{(\nu)} + g_\varrho^{(\nu)}, \tag{10}$$

$$d_\varrho^{(\nu)} = \sum_{i=1}^{k_\nu} \sum_{\lambda=1}^{l_{i\nu}} A_{i,\lambda}^{(\nu)} \binom{\lambda + \varrho - 1}{\varrho} (\alpha_i^{(\nu)})^{-\varrho-\lambda}. \tag{11}$$

Die $d_\varrho^{(\nu)}$ sind die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von $\frac{G_\nu(z)}{H_\nu(z)}$.

§ 3.

Hilfssätze.

Hilfssatz I. Es seien n Paare von Polynomen

$$G_\nu(z) \quad \text{und} \quad H_\nu(z) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

gegeben. $H_\nu(z)$ sei genau vom Grad r_ν, $(r_\nu \geqq 1)$ und es gelte $H_\nu(0) = 1$. Die $G_\nu(z)$ seien nicht identisch verschwindende Polynome höchstens vom

[3]) Dort wurden nur Pole erster Ordnung betrachtet.

Grad $r_\nu - 1$. Jedes Polynom $G_\nu(z)$ sei zu dem zugehörigen Polynom $H_\nu(z)$ relativ prim. Es möge gelten:

$$\frac{G_\nu(z)}{H_\nu(z)} = d_0^{(\nu)} + d_1^{(\nu)} z + d_2^{(\nu)} z^2 + \ldots \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{12}$$

Ferner sei r_0 irgend eine ganze Zahl, die der Ungleichung

$$r_0 \geqq \text{Max}\,(r_\nu - 1), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{13}$$

genügt und es werde gesetzt:

$$s = r_0 + r_1 + \ldots + r_n, \tag{14}$$

$$s_0 = r_1 + r_2 + \ldots + r_n. \tag{15}$$

Es wird nun behauptet:

Die Polynome $H_1(z)$, $H_2(z)$, $\ldots$ $H_n(z)$ sind dann und nur dann zu je zweien relativ prim, wenn die Determinante

$$D_{r_0} = \begin{vmatrix} d_{s-r_\nu}^{(\nu)}, & d_{s-r_\nu-1}^{(\nu)}, & \ldots, & d_{r_0-r_\nu+1}^{(\nu)} \\ d_{s-r_\nu+1}^{(\nu)}, & d_{s-r_\nu}^{(\nu)}, & \ldots, & d_{r_0-r_\nu+2}^{(\nu)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{s-1}^{(\nu)}, & d_{s-2}^{(\nu)}, & \ldots, & d_{r_0}^{(\nu)} \end{vmatrix} \begin{matrix} \nu \\ = \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{matrix} \quad [4]$$

für wenigstens einen Wert r_0 von Null verschieden ist. Sie ist dann für jedes r_0 von selbst verschieden von Null.

Beweis. Wir führen folgendes Polynom ein:

$$P(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) \ldots H_n(z) = 1 + q_1 z + \ldots + q_{s_0} z^{s_0} \tag{16}$$

oder

$$P(z) = \prod_{\nu=1}^{n} \prod_{i=1}^{r_\nu} \left(1 - \frac{z}{\alpha_i^{(\nu)}}\right). \tag{16a}$$

Dabei ist in der Formel (16a), die wir zum Beweis von Hilfssatz III benötigen, jede Nullstelle der Polynome $H_\nu(z)$ so oft angeschrieben, wie ihre Ordnung angibt. Außerdem setzen wir

$$H_\nu(z) = 1 + h_1^{(\nu)}(z) + h_2^{(\nu)} z^2 + \ldots + h_{r_\nu}^{(\nu)} z^{r_\nu}. \tag{17}$$

Aus (12) und (17) erhält man die Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} &d_{r_\nu}^{(\nu)} + d_{r_\nu-1}^{(\nu)} h_1^{(\nu)} + \ldots + d_0^{(\nu)} h_{r_\nu}^{(\nu)} = 0 \\ &d_{r_\nu+1}^{(\nu)} + d_{r_\nu}^{(\nu)} h_1^{(\nu)} + \ldots + d_1^{(\nu)} h_{r_\nu}^{(\nu)} = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned} \tag{18a}$$

[4]) Die abkürzende Determinantenschreibweise ist hier so zu verstehen, daß zuerst die für $\nu = 1$ entstehenden r_1 Zeilen zu schreiben sind, darunter die für $\nu = 2$ entstehenden r_2 Zeilen usw., schließlich die für $\nu = n$ entstehenden r_n Zeilen, die Gesamtzeilenzahl von D_{r_0} ist daher gleich $r_1 + r_2 + \cdots + r_n$, also gleich der Spaltenzahl. Ist ein r_ν gleich Null, so fallen die betreffenden Zeilen einfach weg. Siehe auch Mall, Dissertation § 3.

Ebenso liefern (12) und (16), wenn man sich $\frac{G_\nu(z)}{H_\nu(z)}$ auf den Nenner $P(z)$ gebracht denkt,

$$\begin{aligned} &d_{s_0}^{(\nu)} + d_{s_0-1}^{(\nu)} q_1 + \ldots + d_0^{(\nu)} q_{s_0} = 0 \\ &d_{s_0+1}^{(\nu)} + d_{s_0}^{(\nu)} q_1 + \ldots + d_1^{(\nu)} q_{s_0} = 0 \\ &\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{18b}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Aus (18b) folgt sogleich, indem man in der Determinante D_{r_0} die Spalten der Reihe nach mit $q_1, q_2, \ldots, q_{s_0}$ multipliziert und dann alle zur letzten addiert,

$$D_{r_0+1} = (-1)^{r_0} D_{r_0} q_{s_0}. \tag{19}$$

Wenn daher D_{r_0} für einen gewissen Wert r_0 verschwindet, so verschwindet es für jeden Wert.

Nun sind die Polynome $H_\nu(z)$ dann und nur dann zu je zweien relativ prim, wenn sich die rationalen Funktionen (12) *nicht* mit einem gemeinsamen Nenner

$$p_0 + p_1 z + \ldots + p_{s_0-1} z^{s_0-1},$$

dessen Grad $\leqq s_0 - 1$ ist, schreiben lassen, also dann und nur dann, wenn das unendliche System

$$\begin{aligned} &d_{s-r_\nu}^{(\nu)} p_0 + d_{s-r_\nu-1}^{(\nu)} p_1 + \ldots + d_{r_0-r_\nu+1}^{(\nu)} p_{s_0-1} = 0 \\ &\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &d_{s-1}^{(\nu)} p_0 + d_{s-2}^{(\nu)} p_1 + \ldots + d_{r_0}^{(\nu)} p_{s_0-1} = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n),\ r_0 \geqq \mathrm{Max}\,(r_\nu - 1) + k,\ (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

nur die triviale Lösung $p_0 = p_1 = \ldots = p_{s_0-1} = 0$ hat.

Im Fall $D_{r_0} \neq 0$ ist hier gewiß nur die triviale Lösung vorhanden, also sind die Polynome $H_\nu(z)$ zu je zweien relativ prim. Wenn aber D_{r_0} für einen Wert r_0 (und folglich für jedes r_0) verschwindet, so hat zunächst das zu diesem festen Wert r_0 gehörige endliche Teilsystem von (20) eine nichttriviale Lösung, die dann aber vermöge der Formeln (18a) auch das zu $r_0 + 1$ und $r_0 - 1$ gehörige Teilsystem und folglich das gesamte unendliche System (20) befriedigt. Die $H_\nu(z)$ sind daher jetzt nicht mehr zu je zweien relativ prim. Damit ist Hilfssatz I bewiesen.

Wir setzen ferner, unter $c_\lambda^{(\nu)}$ die in § 2 eingeführten Koeffizienten von $F_\nu(z)$ verstehend,

$$\Delta_{r_0} = \begin{vmatrix} c_{s-r_\nu}^{(\nu)}, & c_{s-r_\nu-1}^{(\nu)}, & \ldots, & c_{r_0-r_\nu+1}^{(\nu)} \\ c_{s-r_\nu+1}^{(\nu)}, & c_{s-r_\nu}^{(\nu)}, & \ldots, & c_{r_0-r_\nu+2}^{(\nu)} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ c_{s-1}^{(\nu)}, & c_{s-2}^{(\nu)}, & \ldots, & c_{r_0}^{(\nu)} \end{vmatrix} \begin{matrix} \nu \\ = \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{matrix}.$$

Ersetzt man die i-te Spalte dieser Determinante durch die Zahlen

$$x_1^{(1)}, \ \ldots \ x_{r_1}^{(1)}, \ \ldots, \ x_1^{(n)}, \ \ldots, \ x_{r_n}^{(n)},$$

so möge die so entstehende Determinante durch das Symbol

$$D_i(x) = D_i(x_1^{(1)} \ldots x_{r_1}^{(1)}, \ \ldots, \ x_1^{(n)}, \ \ldots, \ x_{r_n}^{(n)})$$

bezeichnet werden.

Wir denken uns nun oberhalb des Elementenschemas von Δ_{r_0} die Zeile

$$c_{r_0+m-1}^{(p)}, \ c_{r_0+m-2}^{(p)}, \ \ldots, \ c_{r_0+m-s_0}^{(p)}$$

angeschrieben und betrachten die von Δ_{r_0} verschiedenen s_0-reihigen Determinanten dieser Matrix. Mit $E_{\lambda,m}^{(\nu)}$ möge diejenige mit $(-1)^{r_1+\ldots+r_{\lambda-1}+\lambda+1}$ multiplizierte s_0-reihige Determinante der Matrix bezeichnet werden, die die Zeile

$$c_{s-r_\nu+\lambda-1}^{(\nu)}, \ c_{s-r_\nu+\lambda-2}^{(\nu)}, \ \ldots, \ c_{r_0-r_\nu+\lambda}^{(\nu)}$$

nicht enthält.

Ersetzt man endlich in der Determinante D_{r_0} die Elemente der i_1-ten, i_2-ten, $\ldots$, i_σ-ten Spalte durch die Zahlen

$$b_{i_1,1}, \ b_{i_1,2}, \ \ldots, b_{i_1,s_0}, \ b_{i_2,1} \ldots, b_{i_2,s_0}, \ \ldots, \ b_{i_\sigma,1} \ldots b_{i_\sigma,s_0},$$

so wollen wir die entstehende Determinante mit $D_{i_1,i_2,\ldots,i_\sigma}$ bezeichnen. Für das Folgende ist es praktisch, die Gesamtmenge der Pole aller Funktionen $F_\nu(z)$ innerhalb des Kreises $|z| \leqq R$ der absoluten Größe nach zu ordnen. Die Pole mögen dann mit den Buchstaben β_ν bezeichnet werden, wobei

$$0 < |\beta_1| \leqq |\beta_2| \leqq \ldots \leqq |\beta_{s_0}| < R, \ |\beta_1| = m$$

ist. Jeder Pol ist so oft angeschrieben wie seine Ordnung angibt.

Hilfssatz II. Für die Determinanten D_i, $E_{\lambda,m}^{(\nu)}$ und $D_{i_1,i_2,\ldots i_\sigma}$ gelten die Abschätzungsformeln:

$$(21) \qquad |D_i| < \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{r_\nu} (1+\gamma_i)^{r_0} |\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{s_0-1}|^{-r_0} |x_\lambda^{(\nu)}|,$$

$$(22) \qquad |E_{\lambda,m}^{(\nu)}| < (1+\gamma_{\lambda,m}^{(\nu)})^{r_0} |\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{s_0}|^{-r_0},$$

$$(23) \quad |D_{i_1,i_2\ldots i_\sigma}| < |\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{s_0-\sigma}|^{-r_0} (1+\gamma_{i_1\ldots i_\sigma})^{r_0} \sum_{\mu_1,\mu_2\ldots\mu_\sigma} |b_{i_1,\mu_1}| \ldots |b_{i_\sigma,\mu_\sigma}|.$$

γ_i, $\gamma_{\lambda,m}^{(\nu)}$ und $\gamma_{i_1,\ldots,i_\sigma}$ sind dabei positive Zahlen, die mit wachsendem r_0 beliebig klein gemacht werden können. In der Summe auf der rechten Seite von (23) sind dabei sämtliche Variationen von s_0 zur σ-ten Klasse zu nehmen.

Beweis. Wir können uns dabei auf den Beweis der Formel (21) beschränken, da die Beweise der beiden anderen Formeln ähnlich verlaufen. Nach den Voraussetzungen des Satzes in § 2 gilt:

$$|\alpha_1^{(\nu)}| \leqq |\alpha_2^{(\nu)}| \leqq \ldots \leqq |\alpha_{k_\nu}^{(\nu)}|$$

Im Folgenden betrachten wir zunächst den zum Index ν gehörigen Teil der Determinante D_i

$$\begin{Vmatrix} c^{(\nu)}_{s-r_\nu}, & c^{(\nu)}_{s-r_\nu-1}, & \dots, & x^{(\nu)}_1, & \dots, & c^{(\nu)}_{r_0-r_\nu+1} \\ c^{(\nu)}_{s-r_\nu+1}, & c^{(\nu)}_{s-r_\nu}, & \dots, & x^{(\nu)}_2, & \dots, & c^{(\nu)}_{r_0-r_\nu+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c^{(\nu)}_{s-1}, & c^{(\nu)}_{s-2}, & \dots, & x^{(\nu)}_{r_\nu}, & \dots, & c^{(\nu)}_{r_0} \end{Vmatrix}.$$

Wir addieren hier zur 1. Zeile die mit $-\alpha_1^{(\nu)}$ multiplizierte 2. Zeile, zur 2. Zeile die mit $-\alpha_1^{(\nu)}$ multiplizierte 3. Zeile usw., zur $(r_\nu - 1)$-ten Zeile die mit $-\alpha_1^{(\nu)}$ multiplizierte r_ν-te Zeile. Setzen wir

$$c^{(\nu)}_{\lambda-1,1} = c^{(\nu)}_{\lambda-1} - c^{(\nu)}_{\lambda}\alpha_1^{(\nu)},$$
$$x^{(\nu)}_{\lambda-1,1} = x^{(\nu)}_{\lambda-1} - x^{(\nu)}_{\lambda}\alpha_1^{(\nu)},$$

so erhält die Matrix folgende Gestalt:

$$\begin{Vmatrix} c^{(\nu)}_{s-r_\nu,1}, & c^{(\nu)}_{s-r_\nu-1,1}, & \dots, & x^{(\nu)}_{1,1}, & \dots, & c^{(\nu)}_{r_0-r_\nu+1,1} \\ c^{(\nu)}_{s-r_\nu+1,1}, & c^{(\nu)}_{s-r_\nu,1}, & \dots, & x^{(\nu)}_{2,1}, & \dots, & c^{(\nu)}_{r_0-r_\nu+2,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c^{(\nu)}_{s-2,1}, & c^{(\nu)}_{s-3,1}, & \dots, & x^{(\nu)}_{r_\nu-1,1}, & \dots, & c^{(\nu)}_{r_0-1,1} \\ c^{(\nu)}_{s-1}, & c^{(\nu)}_{s-2}, & \dots, & x^{(\nu)}_{r_\nu}, & \dots, & c^{(\nu)}_{r_0} \end{Vmatrix}.$$

Die Zahlen $c^{(\nu)}_{\lambda,1}$ sind die Koeffizienten der Reihenentwicklung der Funktion

$$F_\nu(z)\,(z - \alpha_1^{(\nu)}).$$

Wir wenden nun das obige Verfahren auf die $(r_\nu - 1)$ ersten Zeilen der neuen Matrix an und führen die Koeffizienten

$$c^{(\nu)}_{\lambda-1,2} = c^{(\nu)}_{\lambda-1,1} - c^{(\nu)}_{\lambda,1}\,\alpha_1^{(\nu)}$$

und

$$x^{(\nu)}_{\lambda-1,2} = x^{(\nu)}_{\lambda-1,1} - x^{(\nu)}_{\lambda,1}\,\alpha_1^{(\nu)}$$

ein. Die $c^{(\nu)}_{\lambda,2}$ sind die Koeffizienten der Reihenentwicklung von $F_\nu(z)\,(z - \alpha_1^{(\nu)})^2$. Indem wir die geschilderte Umformung insgesamt $l_{1,\nu}$-mal (siehe Satz, § 2) ausführen, gelangen wir zu der Matrix

$$\begin{Vmatrix} c^{(\nu)}_{s-r_\nu,\,l_{1\nu}}, & c^{(\nu)}_{s-r_\nu-1,\,l_{1\nu}}, & \dots, & x^{(\nu)}_{1,\,l_{1\nu}}, & \dots, & c^{(\nu)}_{r_0-r_\nu+1,\,l_{1\nu}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c^{(\nu)}_{s-l_{1\nu}-1,\,l_{1\nu}}, & c^{(\nu)}_{s-l_{1\nu}-2,\,l_{1\nu}}, & \dots, & x^{(\nu)}_{r_\nu-l_{1\nu},\,l_{1\nu}}, & \dots, & c^{(\nu)}_{r_0-l_{1\nu},\,l_{1\nu}} \\ c^{(\nu)}_{s-l_{1\nu},\,l_{1\nu}-1}, & c^{(\nu)}_{s-l_{1\nu}-1,\,l_{1\nu}-1}, & \dots, & x^{(\nu)}_{r_\nu-l_{1\nu}+1,\,l_{1\nu}-1}, & \dots, & c^{(\nu)}_{r_0-l_{1\nu}+1,\,l_{1\nu}-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c^{(\nu)}_{s-1}, & c^{(\nu)}_{s-2}, & \dots, & x^{(\nu)}_{r_\nu}, & \dots, & c^{(\nu)}_{r_0} \end{Vmatrix}.$$

Für die Koeffizienten $c_\lambda^{(\nu)}, c_{\lambda,1}^{(\nu)}, \ldots, c_{\lambda,l_{1\nu}-1}^{(\nu)}$ gilt bei hinreichend großen Werten von λ die Abschätzung

$$|c_{\lambda,i}^{(\nu)}| < \frac{(1+\gamma_1)^\lambda}{|\alpha_1^{(\nu)}|^\lambda} = (1+\gamma_1)^\lambda |\alpha_1^{(\nu)}|^{-\lambda}, \tag{24}$$

wo γ_1 eine positive Konstante ist, die beliebig klein gewählt werden kann, wenn λ hinreichend groß ist. Für die Koeffizienten $c_{\lambda,l_{1\nu}}^{(\nu)}$ gilt, da sie zur Reihenentwicklung von $F_\nu(z)$ $(z-\alpha_1^{(\nu)})^{l_{1\nu}}$ gehören, die Beziehung

$$|c_{\lambda,l_{1\nu}}^{(\nu)}| < (1+\gamma_2)^\lambda |\alpha_2^{(\nu)}|^{-\lambda}.$$

γ_2 hat dabei wie alle folgenden γ die gleiche Bedeutung wie γ_1.

Wir bilden nun aus den $(r_\nu - l_{1\nu})$ ersten Zeilen der obigen Matrix eine neue Matrix und führen bei dieser dieselben Betrachtungen wie vorher für den Pol $\alpha_2^{(\nu)}$ aus usw. Führen wir diese Überlegungen schließlich für die ganze Determinante D_i durch und bedenken, daß sich die $x_{\lambda,\mu}^{(\nu)}$ linear aus den $x_\lambda^{(\nu)}$ zusammensetzen, so erhalten wir für D_i schließlich die Abschätzung

$$|D_i| < \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{r_\nu} |x_\lambda^{(\nu)}| (1+\gamma_i)^{r_0} |\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{s_0-1}|^{-r_0}.$$

Ganz ähnlich verläuft der Beweis der Beziehung (22). Der Unterschied besteht darin, daß jetzt nicht wie vorher zeilenweise, sondern spaltenweise addiert wird. Ebenso steht es mit dem Beweis von (23). Wegen der Formeln (9) und (12) gelten nämlich für die d Abschätzungen, die den Abschätzungen für die c in Formel (24) ganz analog sind. Daher läßt sich die zum Beweis von Formel (21) verwendete Methode auch zum Beweis von Formel (23) verwenden. Wir verzichten hier auf eine ausführliche Darstellung der Beweise von (22) und (23).

Hilfssatz III. Für hinreichend große Werte von r_0 gilt die Abschätzung:

$$2|C_1||\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{s_0}|^{-r_0} > |\Delta_{r_0}| > \tfrac{1}{2}|C_1||\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{s_0}|^{-r_0}. \tag{25}$$

Dabei ist C_1 eine von Null verschiedene Konstante.

Beweis. Da die Polynome $H_1(z), H_2(z), \ldots H_n(z)$ nach den Voraussetzungen unseres Satzes alle zu je zweien relativ prim sind, sind nach Hilfssatz I die Determinanten

$$D_{r_0},\ r_0 \geqq \mathrm{Max}\,(r_\nu - 1)$$

alle von Null verschieden. Die wiederholte Anwendung der Formel (19) ergibt

$$D_{r_0} = q_{s_0}^{r_0} C_1 (-1)^{s_0 r_0},$$

wo C_1 eine von Null verschiedene Konstante ist. Aus (16) und (16a) ergibt sich für q_{s_0} die Formel

$$q_{s_0} = (-1)^{r_0} (\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{s_0})^{-1}.$$

Also folgt:

$$D_{r_0} = C_1 (\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{s_0})^{-r_0}. \tag{26}$$

Ersetzt man in der Determinante D_{r_0} die $d_\varrho^{(\nu)}$ von irgendwelchen σ Spalten durch die $g_\varrho^{(\nu)}$ unter Beibehaltung des Index, so wird die so entstehende Determinante nach den Formeln (8) und (23) absolut kleiner als

$$|\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{s_0-\sigma} R^\sigma|^{-r_0} (1 + \gamma_\sigma)^{r_0},$$

wo γ_σ wieder eine Konstante ist, die mit wachsendem r_0 beliebig klein gemacht werden kann. Dividiert man diese Determinante durch D_{r_0}, so wird der Quotient der beiden Determinanten absolut kleiner als

$$\frac{1}{|C_1|} \left| (1 + \gamma_\sigma) \frac{R}{\beta_{s_0-\sigma+1}} \cdot \frac{R}{\beta_{s_0-\sigma+2}} \cdots \frac{R}{\beta_{s_0}} \right|^{-r_0}$$

und dieser Ausdruck strebt für $r_0 \to \infty$ gegen Null. Es folgt dann auch

$$\lim_{r_0 \to \infty} \frac{\Delta_{r_0}}{(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{s_0})^{-r_0}} = \lim_{r_0 \to \infty} \frac{\begin{vmatrix} g_{s-r_\nu}^{(\nu)} + d_{s-r_\nu}^{(\nu)}, & \dots, & g_{r_0-r_\nu+1}^{(\nu)} + d_{r_0-r_\nu+1}^{(\nu)} \\ \dots\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \\ g_{s-1}^{(\nu)} + d_{s-1}^{(\nu)}, & \dots, & g_{r_0}^{(\nu)} + d_{r_0}^{(\nu)} \end{vmatrix}_{\nu = 1, 2, \dots, n}}{\frac{1}{C_1} \begin{vmatrix} d_{s-r_\nu}^{(\nu)}, & \dots, & d_{r_0-r_\nu+1}^{(\nu)} \\ \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \\ d_{s-1}^{(\nu)}, & \dots, & d_{r_0}^{(\nu)} \end{vmatrix}_{\nu = 1, 2, \dots, n}} = C_1.$$

Zum Beweis braucht man bloß die Zählerdeterminante in eine Summe von 2^{s_0} Determinanten zu zerlegen und die Formel (23) anzuwenden. Für hinreichend große Werte von r_0 gilt daher Formel (25), w. z. b. w.

§ 4.

Beweis des Satzes in § 2.

Wir führen zunächst noch eine andere Darstellung der Funktion $F_\nu(z)$ innerhalb des Kreises $|z| \leqq R$ ein. Wir setzen

$$F_\nu(z) = \frac{N_\nu(z)}{P(z)}. \tag{27}$$

Dabei ist $N_\nu(z)$ für $|z| \leqq R$ regulär und es ist

$$N_\nu(\alpha_i^{(p)}) \begin{cases} = 0 & \text{für } p \neq \nu \\ \neq 0 & \text{für } p = \nu. \end{cases}$$

$P(z)$ ist durch (16) und (16a) definiert. Wir setzen

$$N_\nu(z) = a_0^{(\nu)} + a_1^{(\nu)} z + a_2^{(\nu)} z^2 + \dots. \tag{28}$$

Ferner setzen wir

$$P^{(0)}_{r_0, r_1, \dots, r_n}(z) = q_0^{(r_0)} + q_1^{(r_0)} z + \dots + q_{s_0}^{(r_0)} z^{s_0}. \tag{29}$$

Für die $q_i^{(r_0)}$ und die Koeffizienten q_i von $P(z)$ erhalten wir die folgenden Gleichungssysteme

$$\begin{cases} c^{(\nu)}_{s-r_\nu+1} q_0^{(r_0)} + c^{(\nu)}_{s-r_\nu} q_1^{(r_0)} + \dots + c^{(\nu)}_{r_0-r_\nu+1} q_{s_0}^{(r_0)} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_s^{(\nu)} \qquad q_0^{(r_0)} + c^{(\nu)}_{s-1} q_1^{(r_0)} + \dots + c^{(\nu)}_{r_0} \qquad q_{s_0}^{(r_0)} = 0, \end{cases} \tag{30}$$

$$(\nu = 1, 2, \dots, n)$$

$$\begin{cases} c^{(\nu)}_{s-r_\nu+1} + c^{(\nu)}_{s-r_\nu} q_1 + \dots + c^{(\nu)}_{r_0-r_\nu+1} q_{s_0} = a^{(\nu)}_{s-r_\nu+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_s^{(\nu)} \qquad + c^{(\nu)}_{s-1} q_1 \; + \dots + c^{(\nu)}_{r_0} \qquad q_{s_0} = a_s^{(\nu)}. \end{cases} \tag{31}$$

$$(\nu = 1, 2, \dots, n)$$

Aus (30) folgt, da Δ_{r_0} nach Hilfssatz 3 von Null verschieden ist, $q_0^{(r_0)} \neq 0$. Wir setzen daher von jetzt an

$$q_0^{(r_0)} = 1.$$

Dann folgt aus (30) und (31)

$$\begin{cases} c^{(\nu)}_{s-r_\nu} (q_1 - q_1^{(r_0)}) + \dots + c^{(\nu)}_{r_0-r_\nu+1} (q_{s_0} - q_{s_0}^{(r_0)}) = a^{(\nu)}_{s-r_\nu+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c^{(\nu)}_{s-1} \; (q_1 - q_1^{(r_0)}) + \dots + c^{(\nu)}_{r_0} \qquad (q_{s_0} - q_{s_0}^{(r_0)}) = a_s^{(\nu)}. \end{cases} \tag{32}$$

$$(\nu = 1, 2 \dots, n).$$

Wegen (25) kann man die Gleichungen (32) für hinreichend große Werte von r_0 nach $q_i - q_i^{(r_0)}$ auflösen. Man erhält, wenn wir

$$D_i(a) = D_i(a^{(1)}_{s-r_1+1}, \dots, a_s^{(1)}, a^{(2)}_{s-r_2+1} \dots a_s^{(2)}, \dots, a^{(n)}_{s-r_n+1} \dots a_s^{(n)})$$

setzen,

$$q_i - q_i^{(r_0)} = \frac{D_i(a)}{\Delta_{r_0, r_1-1, \dots, r_n-1}}.$$

Unter Benutzung von (21) und (25) ergibt sich die Abschätzung

$$|q_i - q_i^{(r_0)}| < \frac{2(1+\gamma_i)^{r_0} |\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{s_0-1}|^{-r_0} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{r_\nu} |a^{(\nu)}_{s-r_\nu+\lambda}|}{|C_1| \, |\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{s_0}|^{-r_0}}.$$

Da $N_\nu(z)$ für $|z| \leqq R$ konvergiert, gibt es eine positive Konstante C_2, so daß

$$|a_\lambda^{(\nu)}| < C_2 R^{-\lambda}. \tag{33}$$

Wir erhalten also

$$\left|q_i - q_i^{(r_0)}\right| < C_3 \left|\frac{\beta_{s_0}}{R}(1+\gamma_i)\right|^{r_0},$$

woraus folgt

$$\lim_{r_0 \to \infty} q_i^{(r_0)} = q_i$$

und

$$\lim_{r_n \to \infty} P^{(0)}_{r_0, r_1, \ldots, r_n}(z) = P(z).$$

$P^{(0)}_{r_0, r_1, \ldots, r_n}(z)$ konvergiert also in jedem beschränkten Bereich gleichmäßig gegen $P(z)$. Wir setzen nun

$$P^{(p)}_{r_0, r_1, \ldots, r_n}(z) = a_0^{(p, r_0)} + a_1^{(p, r_0)} z + \ldots + a_{s-r_p}^{(p, r_0)} z^{-r_p}.$$

Dabei ist

$$a^{(p, r_0)}_{r_0+m} = c^{(p)}_{r_0+m} + c^{(p)}_{r_0+m-1} q_1^{(r_0)} + \ldots + c^{(p)}_{r_0+m-s_0} q_{s_0}^{(r_0)},$$

wie man aus der Potenzreihenentwicklung der Funktion $\dfrac{P^{(p)}_{r_0, r_1, \ldots, r_n}(z)}{P^{(0)}_{r_0, r_1, \ldots, r_n}(z)}$ erkennt. Wegen Formel (27) gilt

$$a^{(p)}_{r_0+m} = c^{(p)}_{r_0+m} + c^{(p)}_{r_0+m-1} q_1 + \ldots + c^{(p)}_{r_0+m-s_0} q^{s_0}.$$

Man erhält

(34) $$a^{(p)}_{r_0+m} - a^{(p, r_0)}_{r_0+m} = c^{(p)}_{r_0+m-1}(q_1 - q_1^{(r_0)}) + \ldots + c^{(p)}_{r_0+m-s_0}(q_{s_0} - q_{s_0}^{(r_0)}).$$

Eliminiert man aus den Gleichungen (32) und (34) die Größen

$$q_1 - q_1^{(r_0)}, \ldots, (q_{s_0} - q_{s_0}^{(r_0)})$$

und löst die sich ergebende Bedingungsgleichung nach $a^{(p)}_{r_0+m} - a^{(p, r_0)}_{r_0+m}$ auf, so folgt

$$a^{(p)}_{r_0+m} - a^{(p, r_0)}_{r_0+m} = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{r_\nu} a^{(\nu)}_{s-r_\nu+\lambda} E^{(\nu)}_{\lambda, m}}{\Delta_{r_0, r_1-1, \ldots, r_n-1}}.$$

Unter Benutzung von (22), (25) und (33) ergibt sich die Abschätzung

$$\left|a^{(p)}_{r_0+m} - a^{(p, r_0)}_{r_0+m}\right| < \frac{2 \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{r_\nu} (1+\gamma^{(\nu)}_{\lambda, m})^{r_0} C_4 |\beta_1 \ldots \beta_{s_0}|^{-r_0} R^{-r_0}}{|C_1|\ |\beta_1 \ldots \beta_{s_0}|^{-r_0}}$$

oder

$$\left|a^{(p)}_{r_0+m} - a^{(p, r_0)}_{r_0+m}\right| < \frac{(1+\gamma_3)^{r_0}}{R^{r_0}}.$$

γ_3 kann beliebig klein gewählt werden, wenn nur r_0 groß genug ist. Wegen (33) erhält man

(35) $$\left|a^{(p, r_0)}_{r_0+m}\right| < \frac{(1+\gamma_4)^{r_0}}{R^{r_0}} \qquad (m = 1, 2, \ldots, s_0 - r_p).$$

Wir zeigen jetzt, daß in dem Bereich

$$|z| \leqq R - \varepsilon \quad |z - \alpha_i^{(\nu)}| \geqq \varepsilon \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, \\ \nu = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{36}$$

gleichmäßig gilt

$$\lim_{r_0 \to \infty} \frac{P^{(p)}_{r_0, r_1, \ldots, r_n}(z)}{P^{(0)}_{r_0, r_1, \ldots, r_n}(z)} = F_p(z) = \frac{N_p(z)}{P(z)}. \tag{37}$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $P^{(0)}_{r_0, r_1, \ldots r_n}(z)$ gibt es ein μ, so daß für $r_0 \geqq \mu$ im Bereich (36)

$$\left|P^{(0)}_{r_0, r_1, \ldots, r_n}(z)\right| > M, \left|P(z)\right| > M$$

ist.

Für $r_0 \geqq \mu$ gilt nun

$$\left|\frac{P^{(p)}_{r_0, r_1, \ldots, r_n}(z)}{P^{(0)}_{r_0, r_1, \ldots, r_n}(z)} - \frac{N_p(z)}{P(z)}\right| < \frac{1}{M^2}\left|P^{(p)}_{r_0, r_1, \ldots, r_n}(z)\, P(z) - N_p(z)\, P^{(0)}_{r_0, r_1, \ldots, r_n}(z)\right|$$
$$\leqq \frac{1}{M^2}|z|^{s+1}\left(\left|b^{(p)}_{s+1}\right| + \left|b^{(p)}_{s+2}\right| z + \ldots\right).$$

Dabei ist

$$b^{(p)}_{s+\lambda} = a^{(p, r_0)}_{s-r_p} q_{r_p+\lambda} + a^{(p, r_0)}_{s-r_p-1} q_{r_p+\lambda+1} + \ldots + a^{(p, r_0)}_{r_0+\lambda} q_{s_0}$$
$$- a^{(p)}_{s+\lambda} - a^{(p)}_{s+\lambda-1} q^{(r_0)}_1 - \ldots - a^{(p)}_{s+\lambda-s_0} q^{(r_0)}_{s_0}.$$

Wegen (33) und (35) gilt

$$|b^{(p)}_{s+\lambda}| < \frac{(1+\gamma_5)^{s+\lambda}}{R^{s+\lambda}}.$$

Also folgt

$$\left|\frac{P^{(p)}_{r_0, r_1 \ldots r_n}(z)}{P^{(0)}_{r_0, r_1 \ldots r_n}(z)} - \frac{N_p(z)}{P(z)}\right| < \frac{1}{M^2} \frac{(1+\gamma_5)^{s+1}(R-\varepsilon)^{s+1}}{R^{s+1}} \frac{R}{R-(R-\varepsilon)(1+\gamma_5)} \tag{38}$$

Wir wählen nun μ so groß, daß für $r_0 \geqq \mu$ der Ausdruck $\frac{(1+\gamma_5)(R-\varepsilon)}{R}$ kleiner als 1 gemacht werden kann, was wegen der Eigenschaften von γ_5 möglich ist. Es sei $\frac{(1+\gamma_5)(R-\varepsilon)}{R} < 1 - \delta$, wo δ eine positive Zahl zwischen 0 und $\frac{\varepsilon}{R}$ ist. Die linke Seite von (38) wird dann absolut kleiner als $\frac{1}{M^2}(1-\delta)^{s+1}\frac{1}{\delta}$, woraus die Gültigkeit der Formel (37) folgt. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Der eben bewiesene Satz ließe sich noch etwas erweitern. Man kann nämlich zeigen, daß für alle z, die den Bedingungen

$$|z| \leqq R - \varepsilon, |z - \alpha_i^{(p)}| \geqq \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, k_p)$$

genügen, wo ε beliebig klein gewählt werden darf, gleichmäßig gilt

$$\lim_{r_0 \to \infty} \frac{P^{(p)}_{r_0, r_1, \ldots, r_n}(z)}{P^{(0)}_{r_0, r_1, \ldots, r_n}(z)} = F_p(z).$$

Es brauchen also die Pole der Funktionen $F_1(z), \ldots, F_{p-1}(z), F_{p+1}(z), \ldots F_n(z)$ nicht ausgeschlossen zu werden. Der Beweis der eben ausgesprochenen Behauptung läßt sich nach einer von Wilson[5]) angegebenen Methode führen. Da die zum Beweis erforderlichen Überlegungen und Formeln sehr umfangreich werden, gehen wir nicht weiter darauf ein.

---

[5]) Wilson, Proceedings of the London mathematical society ser. 2, vol. 27, S. 497 bis 512.

(Eingegangen am 7. Februar 1940.)

Bestimmung der Stufe für die aus binären Thetareihen erzeugten Modulformen*).

Von

Ernst-August Behrens in Hamburg.

Ein Hauptproblem in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen ist die Konstruktion eines vollen Systems linear unabhängiger ganzer Modulformen gegebener Dimension und Stufe. Einige Modulformen der Dimension $-k$ werden von Thetareihen mit definiter quadratischer Form in $2k$ Variabeln erzeugt. Aus ihnen lassen sich durch einen Differentiationsprozeß auch Formen von absolut größerer Dimension ableiten. Neben den definiten binären Thetareihen führen auch indefinite binäre Reihen auf Modulformen, und zwar solche der Dimension -1. Statt das Bildungsgesetz durch binäre quadratische Formen zu formulieren, kann man es besser auch von vornherein mit Hilfe des quadratischen Zahlkörpers der Diskriminante D aussprechen.

Diese Untersuchungen führt Herr Hecke in der Arbeit „Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen“[1]) durch und kommt zu dem Ergebnis, daß die Reihen $\vartheta(\tau; \varrho, \mathfrak{a}, Q\sqrt{D})$ Modulfunktionen sind, die bei allen Modulsubstitutionen der Hauptkongruenzuntergruppe der Stufe $Q|D|$ einzeln invariant bleiben. Die aus diesen Funktionen der Dimension -1 im definiten Fall durch einen Differentiationsprozeß entstehenden Reihen haben die gleiche Eigenschaft. Hier soll gezeigt werden, daß für $Q = 1$ die Diskriminante D die genaue Stufe für jede Funktion aus der linearen Schar ist. Dies ist insbesondere wegen der Folgerung wichtig, daß es weder unter den definiten noch unter den indefiniten binären Thetareihen Modulfunktionen einer Primzahlstufe $p \equiv 1 \pmod 4$ gibt. Wenn nämlich $p \equiv 1\ (4)$ ist, kann $-p \equiv 3\ (4)$ nicht Diskriminante eines imaginärquadratischen Zahlkörpers sein, und für positive Primzahl-Diskriminanten verschwinden überdies alle zugehörigen indefiniten binären Thetareihen identisch. Da man — wie bewiesen werden soll — auch nicht bei zusammengesetzter Diskriminante $D = \pm pR$ zu Funktionen der Stufe p gelangen kann, gibt es zu $p \equiv 1\ (4)$ und Dimension -1, -2 weder Thetareihen noch Linearkombinationen von Thetareihen dieser Stufe p.

---

*) Diese Arbeit wurde von der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Hansischen Universität Hamburg als Dissertation (D 18) angenommen. Herrn Prof. Dr. Hecke danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und seine weitgehende Förderung.

[1]) Math. Ann. 97, S. 210.

Zum Beweis des Satzes, daß die binären Thetareihen Modulfunktionen sind, benutzt Herr Hecke folgende Eigenschaft dieser Reihen: Sie erzeugen einen Linearformenmodul mit komplexen Koeffizienten, der gegenüber Anwendung der Substitutionen der ganzen Modulgruppe Γ invariant ist, da er insbesondere die erzeugenden Substitutionen $\tau \to \tau + 1$ und $\tau \to -\frac{1}{\tau}$ gestattet. — Man weiß, mit welchen Koeffizienten sich die Funktionen des Linearformenmoduls bei Anwendung der ganzen Gruppe ineinander umsetzen und daß sie bei dem Normalteiler $\Gamma(|D|)$ (der Hauptkongruenzuntergruppe der Stufe $|D|$) einzeln invariant bleiben. Die Umsetzungskoeffizienten eines linear unabhängigen Vertretersystems dieser Reihen bilden eine Darstellung der Faktorgruppe $\Gamma/\Gamma(D)$. Man kann dann den Satz über die genaue Stufe gruppentheoretisch formulieren und mit Hilfe der Darstellungstheorie endlicher Gruppen beweisen. — Die linearen Relationen zwischen den Reihen sind nun nicht bekannt, wenn $D > 0$. Deshalb soll hier für jedes D ein möglicherweise linear abhängiges Vertretersystem dieser Reihen so gewählt werden, daß seine Umsetzungskoeffizienten bei passender eindeutiger Festlegung eine Darstellung von $\Gamma/\Gamma(D)$ bilden. Auf diese Darstellung kann man dann die oben erwähnte Schlußweise anwenden.

§ 1.

Das Verhalten der Thetareihen bei der Hauptkongruenzuntergruppe der Stufe R. $|D| = p \cdot R$.

Herr Hecke definiert auf S. 222 seiner Arbeit „Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen“[2]) Thetareihen mit positiv definiter quadratischer Form durch

$$\vartheta_1(\tau; \varrho, \mathfrak{a}, \sqrt{D}) = \sum_{\mu \equiv \varrho \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{a}\sqrt{D})} e^{2\pi i \tau \frac{\mu\,\mu'}{A \cdot |D|}}.$$

$K(\sqrt{D})$ ist hierbei der quadratische Zahlkörper mit der negativen Diskriminante D, $\mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal mit der Norm A und ϱ eine ganze Zahl aus $\mathfrak{a}$, $\varrho \equiv 0\ (\mathfrak{a})$. Der Summationsbuchstabe μ soll alle ganzen Zahlen aus $K(\sqrt{D})$ durchlaufen, die kongruent ϱ sind modulo $\mathfrak{a}\sqrt{D}$; der Akzent $'$ bedeutet den Übergang zur Konjugierten in $K(\sqrt{D})$.

Eine zweite Gattung von Funktionen erhält man aus diesen Reihen durch einen Differentiationsprozeß:

$$\vartheta_2(\tau; \varrho, \mathfrak{a}, \sqrt{D}) = \sum_{\mu \equiv \varrho \,(\mathfrak{a}\sqrt{D})} \mu e^{2\pi i \tau \frac{\mu\,\mu'}{A|D|}}.$$

---

[2]) Math. Ann. 97, S. 222.

Auch für indefinite quadratische Formen definiert Herr Hecke[3]) Thetareihen, die eine ähnliche Bauart haben:

$$\vartheta_1(\tau; \varrho, \mathfrak{a}, \sqrt{D}) = \sum_{\substack{\mu = \varrho \ (\mathfrak{a}\sqrt{D}) \\ (\mu)_{\sqrt{D}},\ \mu\mu' > 0}} \operatorname{sgn}\mu \cdot e^{2\pi i \tau \frac{\mu\mu'}{AD}}.$$

Hierbei ist aber der Körper $K(\sqrt{D})$ reell, die Diskriminante D also positiv; $\operatorname{sgn}\mu$ ist das Vorzeichen der reellen Zahl μ. Der Zusatz $(\mu)_{\sqrt{D}}$ soll folgendes bedeuten: Eine Einheit mod $\sqrt{D}$ ist eine Einheit in $K(\sqrt{D})$, welche total positiv und kongruent 1 mod $\sqrt{D}$ ist. Zwei Zahlen aus $K(\sqrt{D})$ heißen assoziiert mod $\sqrt{D}$, wenn sie sich nur um eine Einheit mod $\sqrt{D}$ als Faktor unterscheiden. $(\mu)_{\sqrt{D}}$ soll bedeuten, daß der Summationsbuchstabe μ nur ein volles System modulo $\sqrt{D}$ nicht assoziierter Zahlen durchläuft.

Diese Reihen haben folgende Eigenschaften: Zwei Reihen, deren ϱ_i einander kongruent sind modulo $\mathfrak{a}\sqrt{D}$, sind identisch gleich:

$$\vartheta_t(\tau; \varrho_1, \mathfrak{a}, \sqrt{D}) = \vartheta_t(\tau; \varrho_2, \mathfrak{a}, \sqrt{D}).$$

$t = 1$ oder 2 ist der oben aufgetretene Index. Beim Übergang zu $-\varrho$ nehmen die Reihen höchstens den Faktor -1 auf:

$$(1) \qquad \vartheta_t(\tau; -\varrho, \mathfrak{a}, \sqrt{D}) = s(-1)^t \vartheta_t(\tau; \varrho, \mathfrak{a}, \sqrt{D}).$$

Hierbei ist s das Vorzeichen der Diskriminante D.

Ersetzt man τ durch $\tau + 1$, nehmen die Reihen eine Einheitswurzel als Faktor auf:

$$\vartheta_t(\tau + 1; \varrho, \mathfrak{a}, \sqrt{D}) = e^{s 2\pi i \frac{\varrho\varrho'}{AD}} \vartheta(\tau; \varrho, \mathfrak{a}, \sqrt{D})$$

und bei der Substitution τ in $-\frac{1}{\tau}$ geht jede Reihe über in eine Linearkombination von Reihen, die zu gleichen $\mathfrak{a}$ und D gehören:

$$\vartheta_t\left(-\frac{1}{\tau}; \varrho, \mathfrak{a}, \sqrt{D}\right) = \frac{-i^{\frac{1-s}{2}} \tau^t}{\sqrt{D}} \sum_{\substack{\alpha \bmod \mathfrak{a}\sqrt{D} \\ \alpha \equiv 0 \ (\mathfrak{a})}} e^{2\pi i S\left(\frac{\alpha'\varrho}{AD}\right)} \vartheta_t(\tau; \alpha, \mathfrak{a}, \sqrt{D}).$$

α durchläuft ein volles Repräsentantensystem modulo $\mathfrak{a}\sqrt{D}$ solcher ganzen Zahlen aus $K(\sqrt{D})$, die im Ideal $\mathfrak{a}$ liegen; S ist die Spur.

Herr Hecke berechnet das Verhalten der Reihen bei beliebigen Substitutionen auf S. 224ff. seiner Arbeit.

Für $c = 0$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[3]) Math. Ann. 97, S. 210.

ist das Verhalten der Reihen unmittelbar gegeben durch die Formel:

$$\vartheta_t(\tau + n; \varrho, \mathfrak{a}, \sqrt{D}) = e^{s\,2\pi i \frac{n\,N(\varrho)}{A\,D}}\,\vartheta_t(\tau; \varrho, \mathfrak{a}, \sqrt{D}).$$

Für $\tau \to \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ mit $c > 0$ ergibt sich:

$$(2)\qquad \frac{\vartheta_t\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}; \varrho, \mathfrak{a}, \sqrt{D}\right)}{(-s)^t (c\tau+d)^t}\, c\sqrt{D} = \sum_{\substack{\mu \bmod \mathfrak{a}\sqrt{D} \\ \mu \equiv 0\,(\mathfrak{a})}} \varphi(\varrho, \mu)\,\vartheta_t(\tau; \mu, \mathfrak{a}, \sqrt{D})$$

$$\varphi(\varrho, \mu) = \sum_{\substack{\varkappa \bmod c\,\mathfrak{a}\sqrt{D} \\ \varkappa \equiv \varrho\,(\mathfrak{a}\sqrt{D})}} e^{s\,2\pi i \frac{a\,\varkappa\,\varkappa' + s\,S(\varkappa'\mu) + d\,\mu\,\mu'}{c\,A\,D}}$$

$S(\varkappa'\mu)$ ist die Spur von $\varkappa'\mu$.

Für die Substitutionen aus der Kongruenzuntergruppe $\Gamma_0(D)$, d. h. für $c \equiv 0 \pmod{D}$, wird die Formel (2) außerordentlich einfach. Nämlich, wenn man unter $\left(\frac{D}{d}\right)$ das allgemeine quadratische Restsymbol von Jacobi versteht:

$$(3)\qquad \frac{\vartheta_t\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}; \varrho, \mathfrak{a}, \sqrt{D}\right)}{(c\tau+d)^t} = \left(\frac{D}{d}\right) e^{s\,2\pi i \frac{a\,b\,N(\varrho)}{A\,D}}\,\vartheta(\tau; a\,\varrho, \mathfrak{a}, \sqrt{D}).$$

Nimmt man nun in $\Gamma_0(D)$ diejenigen Substitutionen

$$\tau \to \frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \text{ für die } a \equiv d \equiv 1, \quad b \equiv c \equiv 0 \pmod{D}$$

ist, die also $\Gamma(D)$, der Hauptkongruenzuntergruppe der Stufe $|D|$, angehören, so wird

$$\left(\frac{D}{d}\right) e^{s\,2\pi i \frac{a\,b\,N(\varrho)}{A\,D}} = 1 \quad \text{und} \quad a\,\varrho \equiv \varrho \pmod{\mathfrak{a}\sqrt{D}},$$

da $\varrho \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}}$ ist. Die Thetareihen sind also Modulformen der Stufe $|D|$, (sie könnten allerdings schon zu einer kleineren Stufe gehören). Ferner ist $-t$ die Dimension dieser Modulformen.

$$(4)\qquad \frac{\vartheta_t\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}; \varrho, \mathfrak{a}, \sqrt{D}\right)}{(c\tau+d)^t} = \vartheta_t(\tau; \varrho, \mathfrak{a}, \sqrt{D}) \text{ für } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ aus } \Gamma(D).$$

Für das Folgende ist es bequemer, von den Funktionen $\vartheta_t(\tau; \varrho, \mathfrak{a}, \sqrt{D})$ durch Multiplikation mit ω_2^{-t} zu Modulformen in ω_1, ω_2 überzugehen:

$$\omega_2^{-t}\,\vartheta_t(\tau; \varrho, \mathfrak{a}, \sqrt{D}) = \omega_2^{-t}\,\vartheta_t\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}; \varrho, \mathfrak{a}, \sqrt{D}\right) = f(\omega_1, \omega_2; \varrho, \mathfrak{a}, \sqrt{D}).$$

Führt man dann noch die übliche Operatorenschreibweise ein:

$$f(\omega_1, \omega_2; \varrho, \mathfrak{a}, \sqrt{D}) \Big| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = f(a\,\omega_1 + b\,\omega_2,\ c\,\omega_1 + d\,\omega_2; \varrho, \mathfrak{a}, \sqrt{D}),$$

und setzt man, da zukünftig t, $\mathfrak{a}$ und D festgehalten werden,

$$f(\omega_1, \omega_2; \varrho, \mathfrak{a}, \sqrt{D}) = f_\varrho,$$

so ergeben die obigen Formeln:

Bei $c \equiv 0 \pmod{D}$:

$$f_\varrho \Big| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \left(\frac{D}{d}\right) e^{s 2\pi i \frac{a b N(\varrho)}{A D}} f_{a\varrho}; \tag{3a}$$

bei beliebiger Substitution aus $\Gamma(1)$:

$$f_\varrho \Big| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{(-s)^t}{c\sqrt{D}} \sum_{\substack{\mu \bmod \mathfrak{a}\sqrt{D} \\ \mu \equiv 0 (\mathfrak{a})}} \varphi(\varrho, \mu) f_\mu, \tag{2a}$$

mit

$$\varphi(\varrho, \mu) = \sum_{\substack{\varkappa \bmod c\,\mathfrak{a}\sqrt{D} \\ \varkappa \equiv \varrho (\mathfrak{a}\sqrt{D})}} e^{s 2\pi i \frac{a \varkappa \varkappa' + s S(\varkappa' \mu) + d \mu \mu'}{A D}};$$

und bei $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ aus $\Gamma(D)$:

$$f_\varrho \Big| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = f_\varrho. \tag{4a}$$

Die Untersuchung des genauen Verhaltens der Reihen bei Anwendung der Modulgruppe wird dadurch erschwert, daß in der in den Koeffizienten $\varphi(\varrho, \mu)$ auftretenden Summe zu summieren ist über $\varkappa \bmod c\,\mathfrak{a}\sqrt{D}$ und c mit D Teiler gemeinsam haben kann.

Da die Reihen gegenüber $\Gamma(D)$ invariant sind, ist die Frage nach der genauen Stufe der Modulformen äquivalent mit der Frage, ob es beim Fortlassen einer beliebigen Primzahl p aus $|D| = pR$ Modulformen unter den Thetareihen gibt, die zur Stufe R gehören, die also gegenüber Anwendung der Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(R)$ invariant sind.

Nun ist $\Gamma(D) = \Gamma(pR)$ Normalteiler in der Gruppe $\Gamma(R)$, und überdies die Faktorgruppe $\Gamma(R)/\Gamma(pR)$ bei ungerader Primzahl p isomorph $\Gamma/\Gamma(p)$, der Hauptkongruenzuntergruppe von Primzahlstufe p. p und R sind nämlich teilerfremd, da die ungerade Primzahl p nur in erster Potenz in der Diskriminante D aufgehen kann. Die Hoffnung, daß es wegen der übersichtlichen Bauart von $\Gamma/\Gamma(p)$ möglich ist, die Koeffizienten $\varphi(\varrho, \mu)$ für die Substitutionen aus $\Gamma(R)$ zu vereinfachen, wird sich als richtig erweisen. Auch für $p = 2$ kann man die entsprechenden Überlegungen durchführen, obgleich $\Gamma(R)/\Gamma(2R)$ nicht mehr isomorph ist $\Gamma/\Gamma(2)$.

Im folgenden sollen also

$$s = \operatorname{sgn} D \quad \text{und} \quad D = spR$$

gesetzt und die Substitutionen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ aus } \Gamma(R)$$

genommen werden.

Da für $c \equiv 0 \pmod{D}$ das Verhalten der Reihen bereits durch Formel (2a) auf S. 354 genau bekannt ist, soll $c \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\ \frac{D}{p}\right)$, aber $c \not\equiv 0 \pmod{D}$ vorausgesetzt werden, p ein beliebiger Teiler von $|D|$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\alpha R & \beta R \\ \gamma R & 1+\delta R \end{pmatrix} \text{ mit } \gamma \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

In der Identität

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+an & -a \\ d+cn & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

kann man dann die ganzrationale Zahl n so auswählen, daß

$$d + cn \equiv 1 \pmod{D}, \quad d + cn > 0, \quad (d + cn,\ A) = 1$$

ist. Denn die Kongruenz $d + cn \equiv 1 \pmod{D}$ ist äquivalent mit $\delta + n\gamma \equiv 0\ (p)$ und dies wegen $\gamma \not\equiv 0\ (p)$ lösbar.

Man wende auf das Produkt der Operatoren Formel (2a), S. 354 an:

$$f_\lambda \Big| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \left[f_\lambda \Big| \begin{pmatrix} b+an & -a \\ d+cn & -c \end{pmatrix} \right] \Big| \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$f_\lambda \Big| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{a}\sqrt{D} \\ \varrho \equiv 0\,(\mathfrak{a})}} \frac{(-s)^t}{(d+cn)\sqrt{D}} \varphi\left(\lambda, \varrho; \begin{pmatrix} b+an & -a \\ d+cn & -c \end{pmatrix}\right) f_\varrho \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{a}\sqrt{D} \\ \varrho \equiv 0\,(\mathfrak{a})}} \frac{(-s)^t}{(d+cn)\sqrt{D}} \varphi\left(\lambda, \varrho; \begin{pmatrix} b+an & -a \\ d+cn & -c \end{pmatrix}\right) \sum_{\substack{\mu \bmod \mathfrak{a}\sqrt{D} \\ \mu \equiv 0\,(\mathfrak{a})}} \frac{(-s)^t}{\sqrt{D}} \varphi\left(\varrho, \mu; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -n \end{pmatrix}\right) (-1)^t f_\mu$$

$$= \sum_{\substack{\mu,\ \varrho \bmod \mathfrak{a}\sqrt{D} \\ \mu \equiv \varrho \equiv 0\,(\mathfrak{a})}} \frac{(-1)^t}{(d+cn)\,D} \varphi\left(\lambda, \varrho; \begin{pmatrix} b+an & -a \\ d+cn & -c \end{pmatrix}\right) \varphi\left(\varrho, \mu; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -n \end{pmatrix}\right) f_\mu.$$

Für die φ setze man die Summenausdrücke ein, wobei man von der von Herrn Hecke auf S. 225 seiner Arbeit angegebenen Umformung

$$\varphi(\varrho, \mu) = e^{-s2\pi i \frac{b\,d\,N(u) + s\,b\,S(\varrho'\mu)}{A\,D}} \varphi(\varrho + s\,d\,\mu, 0)$$

Gebrauch macht:

$$\varphi\left(\varrho, \mu; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -n \end{pmatrix}\right) = e^{2\pi i \frac{S(\varrho' \mu) - s n N(u)}{A D}};$$

$$\varphi\left(\lambda, \varrho; \begin{pmatrix} b+an & -a \\ d+cn & -c \end{pmatrix}\right) = e^{-2\pi i \frac{s a c N(\varrho) - a S(\lambda' \varrho)}{A D}} \cdot \varphi\left(\lambda - sc\varrho, 0; \begin{pmatrix} b+an & -a \\ d+cn & -c \end{pmatrix}\right).$$

$$\varphi\left(\lambda - sc\varrho, 0; \begin{pmatrix} b+an & -a \\ d+cn & -c \end{pmatrix}\right) = \sum_{\substack{\varkappa \bmod (d+cn)\,\mathfrak{a}\sqrt{D} \\ \varkappa \equiv \lambda - sc\varrho\,(\mathfrak{a}\sqrt{D})}} e^{s 2\pi i \frac{(b+an) N(\varkappa)}{(d+cn) A D}}.$$

Wegen $d + cn \equiv 1 \pmod{D}$ und $(d + cn,\ A) = 1$ kann man diese Summe berechnen. Der Ansatz

$$\varkappa \equiv (\lambda - sc\varrho)\ (d + cn) + \xi A \sqrt{D} \pmod{(d + cn)\,\mathfrak{a}\sqrt{D}}, \quad \xi \text{ modulo } d + cn,$$

liefert nämlich ein volles System

$$\varkappa \bmod (d + cn)\,\mathfrak{a}\sqrt{D},\ \varkappa \equiv \lambda - sc\varrho \pmod{\mathfrak{a}\sqrt{D}}.$$

$$N(\varkappa) \equiv (d + cn)^2 N(\lambda - sc\varrho) - A^2 D N(\xi) \bmod (d + cn) A D.$$

Daß die Summe

$$\sum_{\xi \bmod d + cn} e^{-s 2\pi i \frac{(b+an) A N(\xi)}{d+cn}} = \left(\frac{D}{d+cn}\right)(d + cn) = d + cn$$

ist, zeigt Herr Hecke auf den S. 227—229 seiner Arbeit. Wegen $\lambda \equiv \varrho \equiv 0\,(\mathfrak{a})$ ist noch

$$(b + an)\,(d + cn)\,N(\lambda - sc\varrho) \equiv (b + an)\,N(\lambda - sc\varrho) \pmod{AD}.$$

Schließlich wird also

$$f_\lambda \Big| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \sum_{\substack{\mu \bmod \mathfrak{a}\sqrt{D} \\ \mu \equiv 0\,(\mathfrak{a})}} \frac{s(-1)^t}{pR} \left(\sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{a}\sqrt{D} \\ \varrho \equiv 0\,(\mathfrak{a})}} e^{2\pi i \frac{-scN(\varrho) + s(b+an)N(\lambda) - snN(u) + S(\varrho(\lambda' + u'))}{AD}} \right) f_u.$$

Von dem Vorzeichen $s \cdot (-1)^t$ kann man sich befreien, wenn man in der Summe statt über μ über $-\mu$ summiert und von der Identität der Formel (1)

(1a) $$f_{-\mu} = s\,(-1)^t f_\mu$$

Gebrauch macht:

(5)

$$f_\lambda \Big| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \sum_{\substack{\mu \bmod \mathfrak{a}\sqrt{D} \\ \mu \equiv 0\,(\mathfrak{a})}} \frac{1}{pR} \left(\sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{a}\sqrt{D} \\ \varrho \equiv 0\,(\mathfrak{a})}} e^{s 2\pi i \frac{(b+an)N(\lambda) - nN(u)}{AD} + 2\pi i \frac{-scN(\varrho) + S(\varrho(\lambda' - \mu'))}{AD}} \right) f_\mu.$$

Zur Berechnung der in den Koeffizienten auftretenden Summe über $\varrho \bmod \mathfrak{a}\sqrt{D},\ \varrho \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}}$ nehme man als Repräsentantensystem für die ϱ bei ungerader Diskriminante $D \equiv 1 \pmod 4$ die rationalen Zahlen

$$\varrho = rA, \quad 0 \leqq r \leqq |D| - 1$$

und bei gerader Diskriminante $D = 4\,\Delta \equiv 0 \pmod 4$ die Zahlen

$$\varrho = rA,\ (r + \sqrt{\Delta})\,A, \quad 0 \leqq r \leqq 2\,|\,\Delta| - 1.$$

Bei ungerader Diskriminante wird

$$\sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{a}\sqrt{D} \\ \varrho \equiv 0 \bmod (\mathfrak{a})}} e^{2\pi i \frac{-scN(\varrho) + S(\varrho(\lambda' - \mu'))}{AD}} = \sum_{0 \leqq r \leqq |D| - 1} e^{2\pi i \frac{-scr^2 A + rS(\lambda - \mu)}{D}}$$

und bei gerader Diskriminante läßt sich die Summe über ϱ auf die gleiche Summe über die rationalen Zahlen r zurückführen:

$$\sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{a}\sqrt{D} \\ \varrho \equiv 0 \bmod (\mathfrak{a})}} e^{2\pi i \frac{-scN(\varrho) + S(\varrho(\lambda' - \mu'))}{AD}}$$

$$= \sum_{0 \leqq r \leqq 2|\Delta| - 1} \left(e^{2\pi i \frac{-scr^2 A + rS(\lambda' - \mu')}{D}} + e^{2\pi i \frac{-sc\cdot(r^2 - \Delta)A + S((r + \sqrt{\Delta})(\lambda' - \mu'))}{D}} \right)$$

$$= \left(1 + e^{2\pi i \frac{scA\Delta + S((\lambda' - \mu')\sqrt{\Delta})}{D}}\right) \sum_{0 \leqq r \leqq 2|\Delta| - 1} e^{2\pi i \frac{-scr^2 A + rS(\lambda - \mu)}{D}}.$$

$$2 \cdot \sum_{0 < r \leqq 2|\Delta| - 1} e^{2\pi i \frac{-scr^2 A + rS(\lambda - \mu)}{D}}$$

$$= \sum_{0 \leqq r \leqq 2|\Delta| - 1} e^{2\pi i \frac{-scr^2 A + rS(\lambda - \mu)}{D}} + \sum_{0 \leqq r \leqq 2|\Delta| - 1} e^{2\pi i \frac{-sc(2|\Delta| + r)^2 A + (2|\Delta| + r)S(\lambda - \mu)}{D}}$$

$$= \sum_{0 \leqq r \leqq |D| - 1} e^{2\pi i \frac{-scr^2 A + rS(\lambda - \mu)}{D}}$$

$$\sum_{\varrho} = \frac{1}{2}\left(1 + e^{2\pi i \frac{sAc\Delta + S((\lambda' - \mu')\sqrt{\Delta})}{4\Delta}}\right) \sum_{0 \leqq r \leqq |D| - 1} e^{2\pi i \frac{-scr^2 A + rS(\lambda - \mu)}{D}}.$$

Ist $p \neq 2$, so mache man zur Berechnung der Summe über r modulo D den Ansatz

$$r \equiv px + Ry \pmod D \begin{cases} x \text{ modulo } R \\ y \text{ modulo } p. \end{cases}$$

$$\sum_{0 < r \leqq |D| - 1} e^{2\pi i \frac{-scr^2 A + rS(\lambda - \mu)}{D}}$$

$$= \sum_{x,\,y} e^{2\pi i \frac{-cAR^2 y^2 + sRyS(\lambda - \mu)}{pR} + 2\pi i \frac{spxS(\lambda - \mu)}{pR}}$$

$$= \left(\sum_{y \bmod p} e^{2\pi i \frac{-cARy^2 + syS(\lambda - \mu)}{p}} \right) \left(\sum_{x \bmod R} e^{2\pi i \frac{sxS(\lambda - \mu)}{R}} \right),$$

wobei $c \equiv 0 \pmod R$ benutzt worden ist. Ergänzt man in der Summe über y die im Exponenten stehende quadratische Form zu einem vollen Quadrat, was wegen der Teilerfremdheit von p zu c und R möglich ist,

$$\sum_y = \sum_y e^{2\pi i \frac{-cAR\left(y^2 - sA^{-1}R^{-1}c^{-1}yS(\lambda-\mu) + \frac{1}{4}A^{-2}R^{-2}c^{-2}(S(\lambda-\mu))^2\right) + \frac{1}{4}A^{-2}R^{-2}c^{-2}S(\lambda-\mu)^2}{p}},$$

so tritt eine Gaußsche Summe auf, deren Wert bekanntlich $\left(\frac{-ARc}{p}\right)\sqrt{\left(\frac{-1}{p}\right)p}$ ist. Da die Summe über x

$$\sum_x = \left\{\begin{matrix} R \text{ bei } S(\lambda-\mu) \equiv 0 \\ 0 \text{ bei } S(\lambda-\mu) \not\equiv 0 \end{matrix}\right\} \bmod R$$

ist, wird die Summe über r modulo D zu 0 bei $S(\lambda-\mu) \not\equiv 0\,(R)$, und bei $S(\lambda-\mu) \equiv 0\,(R)$ wird sie gleich

$$\sum_{0 \leqq r \leqq |D|-1} e^{2\pi i \frac{-scr^2 A + rS(\lambda-\mu)}{D}} = \left(\frac{-ARc}{p}\right)\sqrt{\left(\frac{-1}{p}\right)p}\, R\, e^{2\pi i A^{-1}R^{-1}c^{-1}\frac{\frac{1}{4}(S(\lambda-\mu))^2}{p}}.$$

Definiert man noch

$$K\left\{\begin{matrix} = 1 & \text{bei } D \equiv 1 \\ = \frac{1}{2}\left(1 + e^{2\pi i \frac{sAc\Delta + S((\lambda'-\mu')\sqrt{\Delta})}{4\Delta}}\right) & \text{bei } D \equiv 0 \end{matrix}\right\} \pmod 4,$$

ergibt sich als Summe über ϱ

$$\sum_{\substack{\varrho \bmod a\sqrt{D} \\ \varrho \equiv 0\,(a)}} e^{2\pi i \frac{-scN(\varrho) + S(\varrho(\lambda'-\mu'))}{AD}} = \begin{cases} K\left(\frac{-ARc}{p}\right)\sqrt{\left(\frac{-1}{p}\right)p}\, e^{2\pi i A^{-1}R^{-1}c^{-1}\frac{\frac{1}{4}(S(\lambda-\mu))^2}{p}}, & \\ \qquad \text{wenn } S(\lambda-\mu) \equiv 0\,(R), & \\ 0 \qquad \text{wenn } S(\lambda-\mu) \not\equiv 0\,(R). & \end{cases}$$

und damit schließlich nach Formel (5)

$$(6) \qquad f_\lambda \Big| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = K\left(\frac{AR}{p}\right)\left(\frac{c}{p}\right)\frac{\left(\frac{-1}{p}\right)}{p}\sqrt{\left(\frac{-1}{p}\right)p} \sum_{\substack{\mu \bmod a\sqrt{D} \\ S(\lambda-\mu) \equiv 0\,(R)}} e^{s2\pi i \frac{(b+an)N(\lambda) - nN(u)}{AD} + 2\pi i \frac{1}{4}A^{-1}R^{-1}c^{-1}\frac{S(\lambda-\mu)^2}{p}} \cdot f_\mu.$$

Für λ und μ führt man die ausgezeichneten Vertretersysteme von S. 356 ein:

Nämlich, wenn $D \equiv 1 \pmod 4$ ist,

$$\left.\begin{matrix} \lambda = lA \\ \mu = mA \end{matrix}\right| \; 0 \leqq l,\ m \leqq |D| - 1,$$

und wenn $D \equiv 0 \pmod 4$ ist, $D = 4\Delta$:

$$\left.\begin{matrix} \lambda = lA,\ lA + A\sqrt{\Delta} \\ \mu = mA,\ mA + A\sqrt{\Delta} \end{matrix}\right| \; 0 \leqq l,\ m \leqq 2|\Delta| - 1.$$

Dann wird für $c \equiv 0 \pmod{R}$, $R \equiv 0 \pmod 4$: $K = 1$ oder $K = 0$, je nachdem ob $\lambda - \mu$ rational oder irrational ist. Überdies kann man noch die in der Summe auftretenden Exponenten vereinfachen:

$$b + (a-1)\,n \equiv 0 \pmod{R}, \quad l^2 - m^2 \equiv 0 \pmod{R},$$
$$N(\lambda) - N(\mu) \equiv (l^2 - m^2)\,A^2 \pmod{pR},$$

da $\lambda - \mu$ rational und $S(\lambda - \mu) = 2(l - m) \equiv 0 \pmod{R}$ ist für diejenigen Summanden, für die K nicht verschwindet. Wegen $\Delta \equiv 0 \pmod p$ ist:

$$N(\lambda) \equiv l^2 A^2 \pmod{A\,p}$$

$$f_\lambda \left|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right. = \left(\frac{AR}{p}\right)\left(\frac{c}{p}\right)\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{-1}{p}\right)p}}$$
$$\cdot \sum_{\substack{\mu \\ \lambda-\mu \text{ rat},\, 2(\lambda-\mu)\equiv 0\,(R)}} f_\mu \cdot e^{s\,2\pi i \frac{(b+(a-1)n)N(\lambda)}{sApR} + \frac{n\frac{l^2-m^2}{R}A + Ac^{-1}\frac{l^2-m^2}{R}}{p}}$$
$$= \left(\frac{AR}{p}\right)\left(\frac{c}{p}\right)\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{-1}{p}\right)p}} \sum_\mu f_\mu e^{2\pi i \frac{AR^{-1}c^{-1}(bcl^2 + acnl^2 - cnl^2 + cnl^2 - cnm^2 + l^2 + m^2 - 2lm)}{p}}$$

Unter Benutzung der Voraussetzung $d + cn \equiv 1 \pmod D$ von S. 355 erhält man schließlich

$$(7)\quad f_\lambda \left|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right. = \left(\frac{AR}{p}\right)\left(\frac{c}{p}\right)\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{-1}{p}\right)p}} \sum_{\substack{\mu \bmod a\sqrt{D},\ \mu \equiv 0\,(a) \\ \lambda-\mu \text{ rat},\, 2(\lambda-\mu)\equiv 0\,(R)}} f_\mu\, e^{2\pi i A R^{-1} c^{-1} \frac{al^2 + dm^2 - 2lm}{p}}.$$

Will man für $p = 2$ bei gerader Diskriminante D ein ähnliches Resultat erhalten, so kann man zur Berechnung der auf S. 357 auftretenden Summe

$$\sum_{0 \leqq r \leqq |D|-1} e^{2\pi i \frac{-scR^2 A + rS(\lambda-\mu)}{D}}$$

den obigen Ansatz für r nicht mehr benutzen, weil 2 ein Teiler von R ist. In einer geraden Diskriminante $D = 4\Delta$ geht nämlich 2 mindestens in zweiter Potenz auf. — Nach Voraussetzung ist $(A, D) = 1$ und $c \equiv 0 \pmod{2\Delta}$, aber $c \not\equiv 0 \pmod{4\Delta}$, also $c \equiv 2\Delta \pmod{4\Delta}$:

$$\sum_{r \bmod 4|\Delta|} e^{2\pi i \frac{-2s\Delta A r^2 + rS(\lambda-\mu)}{4s\Delta}} = \sum_{r \bmod 4\Delta} e^{-2\pi i \frac{Ar^2}{2}} e^{2\pi i \frac{srS(\lambda-\mu)}{4\Delta}}$$
$$= \left(1 + e^{-2\pi i \frac{A}{2} + 2\pi i \frac{s(l-m)A}{2\Delta}}\right) \sum_{\substack{r \bmod 4\Delta \\ r \equiv 0\,(2)}} e^{2\pi i \frac{sA(l-m)r}{2\Delta}}$$
$$= \begin{cases} \left(1 - e^{2\pi i \frac{s(l-m)A}{2\Delta}}\right) \cdot 2|\Delta| & \text{bei } l - m \equiv 0 \pmod{\Delta}, \\ 0 & \text{bei } l - m \not\equiv 0 \pmod{\Delta}. \end{cases}$$

Es ist bei $l - m \equiv 0 \pmod{\Delta}$:

$$1 - e^{2\pi i \frac{s(l-m)A}{2\Delta}} = \begin{cases} 0 \text{ bei } l - m \equiv 0 \pmod{2\Delta}, \\ 2 \text{ bei } l - m \not\equiv 0 \pmod{2\Delta}. \end{cases}$$

Demnach ist die Summe über $r \bmod D$ gleich $4\,|\,\Delta|$ oder 0, je nachdem ob der größte gemeinschaftliche Teiler von $l - m$ und $2\,\Delta$ gleich Δ oder ungleich Δ ist. Also nach S. 357 bei $(l - m,\ 2\,\Delta) = \Delta$:

$$\sum_{\substack{\varrho \bmod a\sqrt{D} \\ \varrho \equiv 0\,(a)}} e^{s2\pi i \frac{-scN(\varrho) + S(\varrho(\lambda' - \mu'))}{AD}} = \tfrac{1}{2}\left(1 + e^{2\pi i \frac{sAc\Delta + S((\lambda' - \mu')\sqrt{\Delta})}{4\Delta}}\right) 4\,|\,\Delta|,$$

und $= 0$ bei $(l - m,\ 2\,\Delta) \neq \Delta$.

$$f_\lambda \left|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right. = \tfrac{1}{2}\left(1 + e^{2\pi i \frac{sAc\Delta + S((\lambda' - \mu')\sqrt{\Delta})}{4\Delta}}\right) \sum_{(l-m,\,2\Delta)=\Delta} f_\mu e^{\frac{2\pi i (b + (a-1)n) N(\lambda) + n(N(\lambda) - N(\mu))}{4A\,|\Delta|}}.$$

Unter Benutzung der ausgezeichneten Vertretersysteme von S. 357 kann man für diese Gleichung schreiben:

$$f_{lA}\left|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right. = \tfrac{1}{2}\left(1 + e^{2\pi i \frac{\Delta}{2}}\right) e^{2\pi i A \frac{(b + (a-1)n) l^2 + n(l^2 - (l+\Delta)^2)}{4\,|\Delta|}} \cdot f_{(l+\Delta)A}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left(1 + e^{2\pi i \frac{\Delta + 1}{2}}\right) e^{2\pi i A \frac{(b + (a-1)n) l^2 + n(l^2 - N(l + \Delta + \sqrt{\Delta}))}{4\,|\Delta|}} \cdot f_{(l + \Delta + \sqrt{\Delta})A}$$

und

$$f_{(l+\sqrt{\Delta})A}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(1 + e^{2\pi i \frac{\Delta}{2}}\right) e^{2\pi i A \frac{(b + (a-1)n) N(l + \sqrt{\Delta}) + n(N(l + \sqrt{\Delta}) - N(l + \Delta + \sqrt{\Delta}))}{4\,|\Delta|}} \cdot f_{(l + \Delta + \sqrt{\Delta})A}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left(1 + e^{2\pi i \frac{\Delta + 1}{2}}\right) e^{2\pi i A \frac{(b + (a-1)n) N(l + \sqrt{\Delta}) + n(N(l + \sqrt{\Delta}) - (l + \Delta)^2)}{4\,|\Delta|}} \cdot f_{(l+\Delta)A}.$$

Dabei ist die Klammer $\left(1 + e^{2\pi i \frac{\Delta}{2}}\right) = 2$ und die Klammer $\left(1 + e^{2\pi i \frac{\Delta + 1}{2}}\right) = 0$ bzw. diese Klammer 2 und jene 0, je nachdem, ob $\Delta \equiv 2 \pmod 4$ oder $\Delta \equiv 3 \pmod 4$ ist.

Für die aus $\Gamma(2\,|\Delta|)$ genommene Modulsubstitution $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ setze man

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2\alpha\Delta & \beta\Delta \\ \gamma\Delta & 1 + 2\delta\Delta \end{pmatrix};$$

wählt man noch $n \equiv \alpha \pmod 2$, so kommt man durch ähnliche Umformungen wie auf S. 359 zu den Gleichungen

$$(8)\qquad \left.\begin{aligned} f_{lA}\Big|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} &= e^{2\pi i \frac{\beta l-\alpha}{2}} f_{(l+\Delta)A} \\ f_{(l+\sqrt{\Delta})A}\Big|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} &= e^{2\pi i \frac{\beta l-\alpha}{2}} f_{(l+\Delta+\sqrt{\Delta})A}\end{aligned}\right\} \text{ bei } \Delta \equiv 2 \pmod 4,$$

$$(9)\qquad \left.\begin{aligned} f_{lA}\Big|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} &= e^{2\pi i \frac{\beta l-\alpha}{2}} f_{(l+\Delta+\sqrt{\Delta})A} \\ f_{(l+\Delta+\sqrt{\Delta})A}\Big|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} &= e^{2\pi i \frac{\beta l-\alpha}{2}} f_{lA}\end{aligned}\right\} \text{ bei } \Delta \equiv 3 \pmod 4,$$

die der Formel (7) im Falle $p \neq 2$ entsprechen.

§ 2.

Eine Darstellung von $\Gamma(R)/\Gamma(D)$.

Entnimmt man die Substitution $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ dem Durchschnitt der Hauptkongruenzuntergruppe der Stufe R mit der Kongruenzuntergruppe $\Gamma_0(D)$, die gebildet wird aus allen Modulsubstitutionen mit $c \equiv 0 \pmod D$, so kennt man das Verhalten der Thetareihen bei Anwendung dieser Substitutionen durch Formel (3a) auf S. 354:

$$f_\lambda\Big|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} = \left(\frac{D}{d}\right) e^{s 2\pi i \frac{ab\,N(\lambda)}{AD}} f_{a\lambda} \quad \text{bei } c \equiv 0 \pmod D.$$

Setzt man wieder $D = sp\,R$, so ist also $b \equiv 0$ und $a \equiv 1 \pmod R$. Bezeichnet man $a\lambda$ mit μ und führt man für λ und μ mod $\mathfrak{a}\sqrt{D}$ wieder die ausgezeichneten Repräsentantensysteme ein, so erhält man

$$\lambda - \mu = \lambda - a\lambda \equiv (1-a)\,Al \bmod \mathfrak{a}\sqrt{D},\ 2(\lambda-\mu) \equiv 0 \pmod R.$$

$\lambda - \mu$ ist also mod $\mathfrak{a}\sqrt{D}$ kongruent einer rationalen Zahl und $2(\lambda-\mu)$ ist kongruent 0 modulo R.

$$f_\lambda\Big|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} = \left(\frac{D}{d}\right) e^{s 2\pi i \frac{ab\,N(\lambda)}{AD}} f_\mu \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \lambda-\mu \text{ rat} \\ 2(\lambda-\mu) \equiv 0\,(R) \\ a\lambda \equiv \mu \bmod \mathfrak{a}\sqrt{D}. \end{cases}$$

Ist $p \neq 2$, kann man unter Benutzung des Inversen R^{-1} von R mod p schreiben:

$$(10)\qquad f_\lambda\Big|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} = \left(\frac{D}{d}\right) e^{2\pi i A R^{-1} \frac{ab\,l^2}{p}} f_\mu \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \lambda-\mu \text{ rat} \\ 2(\lambda-\mu) \equiv 0\,(R) \\ a\lambda \equiv \mu \bmod \mathfrak{a}\sqrt{D}. \end{cases}$$

Ist aber $p = 2$ und setzt man wieder

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2\alpha|\Delta| & \beta|\Delta| \\ \gamma|\Delta| & 1 + 2\delta|\Delta| \end{pmatrix},$$

muß $a = 1 + 2\alpha\Delta \equiv 1 \pmod 2$ sein. Überdies ist bei $\Delta \equiv 2 \pmod 4$ $N(\lambda) \equiv l^2 A^2 \pmod{2A}$.

$$(11) \qquad f_\lambda \Big| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \left(\frac{D}{1 + 2\delta\Delta}\right) e^{2\pi i \frac{\beta l}{2}} f_\lambda.$$

Durch eine ähnliche Überlegung kommt man bei $\Delta \equiv 3 \pmod 4$ zu dem gleichen Ergebnis:

$$(12) \qquad f_\lambda \Big| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \left(\frac{D}{1 + 2\delta\Delta}\right) e^{2\pi i \frac{\beta l}{2}} f_\lambda.$$

Vereinigt man die jetzt gefundenen Resultate bei $p \neq 2$ für $c \equiv 0 \pmod D$ mit den auf S. 359, Formel (7) für $c \not\equiv 0 \pmod D$ bei ungerader Primzahl p gefundenen, so kennt man das Verhalten der Thetareihen bei einer beliebigen Modulsubstitution aus der Hauptkongruenzuntergruppe der Stufe R: Nämlich bei

(10) $c \equiv 0 \pmod D$:

$$f_\lambda \Big| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \left(\frac{D}{d}\right) e^{\mp 2\pi i \frac{abl^2}{p} A R^{-1}} f_\mu \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \lambda - \mu \text{ rat} \\ 2(\lambda - \mu) \equiv 0 \,(R) \\ a \equiv \mu \,(a\sqrt{D}), \end{cases}$$

(7) $c \not\equiv 0 \pmod D$:

$$f_\lambda \Big| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \left(\frac{AR}{p}\right)\left(\frac{c}{p}\right) \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{-1}{p}\right) p}} \sum_{\substack{\mu \bmod a\sqrt{D},\ \mu \equiv 0\,(a) \\ \lambda - \mu \text{ rat},\ 2(\lambda - \mu) \equiv 0\,(R)}} e^{2\pi i A R^{-1} c^{-1} \frac{a l^2 + d m^2 - 2lm}{p}} f_\mu,$$

Wendet man also auf eine Reihe f_λ eine beliebige Modulsubstitution aus der Hauptkongruenzuntergruppe der Stufe R an, so entsteht ein Ausdruck, der gleich ist einer Linearkombination (mit komplexen Koeffizienten) solcher Reihen, deren μ und λ in folgenden Relationen steht:

$$\lambda - \mu \text{ rational}, \quad 2(\lambda - \mu) = 2(l - m) \equiv 0 \pmod R.$$

Hierbei wird vorausgesetzt, daß für die λ und μ ein ausgezeichnetes Vertretersystem genommen worden ist. Dies legt es nahe, die Reihen f_λ in einer Spalte u so anzuordnen, daß alle Reihen mit rationalem λ den Reihen mit irrationalem λ vorangehen und die Reihen mit $2l \equiv 0 \pmod R$ vor den Reihen mit $2l \equiv 2 \pmod R$ und diese wiederum vor den Reihen mit $2l \equiv 4 \pmod R$ usw. kommen. Das heißt: die Reihen, bei denen $2l$ zur gleichen Restklasse mod R gehört, sollen vereinigt werden. Die Reihenfolge

in den Restklassen mod R soll später festgelegt werden. Vereinigt man die in den Linearkombinationen auftretenden Koeffizienten zu einer Matrix $\mathfrak{M}$, so ist jede Matrix einer Modulsubstitution zugeordnet und die Matrizen $\mathfrak{M}$ haben alle folgende Gestalt bei der geschilderten Reihenfolge der f_λ:

Jede Matrix $\mathfrak{M}$ hat $|D|$ Zeilen und Spalten. In der Hauptdiagonale stehen hintereinander quadratische, p-reihige Kästchen, in denen nicht alle auftretenden Koeffizienten verschwinden, außerhalb dieser R Kästchen stehen nur Nullen.

Die in $\mathfrak{M}$ auftretenden Koeffizienten hängen von $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nur modulo p ab. Die l derjenigen Reihen f, die zu einem festen Kästchen gehören, durchlaufen überdies ein volles Restsystem modulo p. Deshalb soll jetzt die Reihenfolge der f_λ, die zu gleichem Kästchen, also zur gleichen Restklasse mod R gehören, folgendermaßen festgesetzt werden: Zuerst die Reihe mit $l \equiv 0 \pmod p$, dann die Reihe mit $l \equiv 1 \pmod p$ usw. bis $l \equiv p-1 \pmod p$. Bei dieser Anordnung der Reihen in einer Spalte u sind die in der Diagonale der Matrix stehenden p-reihigen Kästchen $\mathfrak{K}$ sämtlich einander gleich. In Operatorenschreibweise:

$$\mathfrak{u}\Big/\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \mathfrak{M} \cdot u.$$

Die Koeffizienten der als Kästchen $\mathfrak{K}$ auftretenden p-reihigen quadratischen Matrizen sollen mit c_{lm} bezeichnet werden, wobei c_{lm} nur von $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ abhängt: Wenn $c \equiv 0 \pmod D$ ist, haben die c_{lm} eine andere Struktur als bei $c \not\equiv 0 \pmod D$..

$\underline{c \equiv 0 \pmod D}$:

$$c_{lm} \begin{cases} = \left(\frac{D}{d}\right) e^{2\pi i A R^{-1} \frac{a b l^2}{p}} & \text{bei } \begin{matrix} a l \equiv m \\ \not\equiv m \end{matrix} \Big\} \bmod p, \\ = 0 \end{cases} \tag{13}$$

$\underline{c \not\equiv 0 \pmod D}$:

$$c_{lm} = \left(\frac{A R}{p}\right)\left(\frac{c}{p}\right) \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{-1}{p}\right) p}} e^{2\pi i A R^{-1} c^{-1} \frac{a l^2 + d m^2 - 2 l m}{p}}. \tag{14}$$

Diese für $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ aus $\Gamma(R)$ definierten c_{lm} hängen von $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nur mod p ab, dies legt die Frage nahe, ob die Matrizen $\mathfrak{M}$ eine Darstellung der mit $\Gamma/\Gamma(p)$, der Hauptkongruenzuntergruppe der Stufe p, isomorphen Faktorgruppe $\Gamma(R)/\Gamma(D)$ bilden.

Daß die $\mathfrak{M}$ nur von den Nebenklassen der Faktorgruppe $\Gamma(R)/\Gamma(D)$ abhängen, ist ohne weiteres klar, da die c_{lm} ja sogar von a, b, c, d nur mod p ab-

hängen und p ein Teiler von D ist. Um zu beweisen, daß die $\mathfrak{M}$ eine Darstellung von $\Gamma(R)/\Gamma(D)$ bilden, braucht man nur noch zu zeigen, daß dem Produkt zweier Modulsubstitutionen

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

entspricht das Produkt der zugehörigen Matrizen:

$$(15) \quad \mathfrak{M}(T) \cdot \mathfrak{M}(T') = \mathfrak{M}(T \cdot T') = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}.$$

Wegen der besonderen Bauart der $\mathfrak{M}$ braucht man die obige Gleichung (15) nur für ein Kästchen $\mathfrak{K}$ zu beweisen:

$$\mathfrak{K}(T)\,\mathfrak{K}(T') = \mathfrak{K}(T \cdot T')$$

(16) oder

$$\sum_{k \bmod p} c_{lk}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot c_{km}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = c_{lm}\begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}.$$

Hierbei sind mehrere Fälle zu unterscheiden, weil die c_{lm} verschiedene Struktur haben, je nachdem, ob $c \equiv 0 \pmod D$ oder $c \not\equiv 0 \pmod D$ ist.

I. $c \equiv 0 \equiv c' \pmod D$,

II. $c \not\equiv 0 \equiv c' \pmod D$, IIa) $c \equiv 0 \not\equiv c' \pmod D$,

III. $c \not\equiv 0 \not\equiv c' \pmod D$.

I. Die Voraussetzung bedeutet, daß T und T' zur Kongruenzgruppe $\Gamma_0(D)$ gehören. Das Produkt $T \cdot T'$ liegt also wieder in $\Gamma_0(D) : ca' + dc' \equiv 0\,(p)$. Da $ad - bc = 1$ ist, folgt aus der Voraussetzung weiter, daß a und a' inkongruent 0 sind mod p. Setzt man für die c_{lm} die Ausdrücke von S. 363 ein, sieht man, daß $c_{lk} \cdot c_{km}$ ungleich 0 ist nur bei $al \equiv \varkappa$, $a'\varkappa \equiv m \pmod p$. Die Summe über k ist demnach: ungleich 0 nur dann, wenn $al \equiv a'^{-1} m \pmod p$ ist:

$$\sum_{k \bmod p} c_{lk}(T)\, c_{km}(T') = \begin{cases} \left(\frac{D}{d}\right)\left(\frac{D}{d'}\right) e^{2\pi i A R^{-1} \frac{ab\,l^2 + a'b'\,a^2 l^2}{p}} & \text{bei } aa'l \equiv m \\ 0 & \not\equiv m \end{cases} (p).$$

Auf der anderen Seite entspricht dem Produkt $T \cdot T'$ der Koeffizient

$$c_{lm}(T \cdot T') = \begin{cases} \left(\frac{D}{dd' + cb'}\right) e^{2\pi i A R^{-1} \frac{(aa' + bc')(ab' + bd')\,l^2}{p}} & \text{bei } (aa' + bc')l \equiv m\,(p), \\ 0 & \text{bei } (aa' + bc')l \not\equiv m\,(p). \end{cases}$$

Wegen c und $c' \equiv 0 \pmod p$ ist

$$\left(\frac{D}{cb' + dd'}\right) = \left(\frac{D}{dd'}\right)$$

und

$$(aa' + bc')(ab' + bd') \equiv aba'd' + a'b'a^2 \pmod p, (aa' + bc')\, l \equiv aa'l \pmod p$$

und dadurch kann man den Koeffizienten vereinfachen: nämlich bei $aa'l \equiv m \pmod p$ ist

$$c_{lm}(T \cdot T') = \left(\frac{D}{d\,d'}\right) e^{2\pi i A R^{-1} \frac{(ab\,a'd' + a'b'a^2)\,l^2}{p}}$$

und gleich 0, wenn $aa'l \not\equiv m \pmod p$ ist. Zum Beweis der Behauptung (16) bleibt also zu zeigen, daß folgende beiden Gleichungen richtig sind:

$$e^{2\pi i A R^{-1} \frac{(ab\,a'd' + a'b'a^2)\,l^2}{p}} = e^{2\pi i \frac{ab + a'b'a^2}{p}},$$

$$\left(\frac{D}{d\,d'}\right) = \left(\frac{D}{d}\right)\left(\frac{D}{d'}\right).$$

Dies folgt aber leicht aus der Determinantenbedingung $a'd' - b'c' = 1$ und der Multiplikationsregel für Jacobi-Symbole.

II. Aus der Voraussetzung $c \not\equiv 0 \equiv c' \pmod D$ folgt, daß das Produkt $T \cdot T'$ nicht in $\Gamma_0(D)$ liegt.

$$c_{lk}(T)\, c_{km}(T') = \begin{cases} \left(\frac{AR}{p}\right)\left(\frac{c}{p}\right)\left(\frac{D}{d'}\right) \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{-1}{p}\right)p}} e^{2\pi i A R^{-1} c^{-1} \frac{al^2 + dk^2 - 2lk}{p}} e^{2\pi i A R^{-1} \frac{a'b'k^2}{p}}, \\ 0 \end{cases}$$

je nachdem, ob $a'k \equiv m \pmod p$ ist oder nicht. Zu vorgegebenem m hat diese Kongruenz genau eine Lösung $k \equiv ma'^{-1} \pmod p$. Setzt man dies für k ein, so wird

$$\sum_{k \bmod p} c_{lk}(T)\, c_{km}(T')$$

$$= \left(\frac{AR}{p}\right)\left(\frac{c}{p}\right)\left(\frac{D}{d'}\right) \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{-1}{p}\right)p}} e^{2\pi i A R^{-1} \frac{ac^{-1}l^2 + (c^{-1}da'^{-2} + a'^{-1}b')\,m^2 - 2a'^{-1}c^{-1}lm}{p}}.$$

Die Inversen von c und a' kann man nämlich bilden, weil nach Voraussetzung $c \not\equiv 0\,(p)$ ist und weil aus $c' \equiv 0\,(p)$ folgt $a' \not\equiv 0 \pmod p$.

Andererseits ist

$$c_{lm}(T \cdot T') = \left(\frac{AR}{p}\right)\left(\frac{ca' + dc'}{p}\right) \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{-1}{p}\right)p}} e^{2\pi i A R^{-1} (ca' + dc')^{-1} \frac{(aa' + bc')\,l^2 + (cb' + dd')\,m^2 - 2lm}{p}}$$

$$= \left(\frac{AR}{p}\right)\left(\frac{ca'}{p}\right) \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{-1}{p}\right)p}} e^{2\pi i A R^{-1} \frac{c^{-1}a'^{-1}aa'l^2 + c^{-1}a'^{-1}(cb' + dd')\,m^2 - 2a'^{-1}c^{-1}lm}{p}}.$$

Nur noch eine Gleichung zwischen Jacobi-Symbolen

$$\left(\frac{a'}{p}\right) = \left(\frac{D}{d'}\right) \quad \left[\text{mit } \left(\frac{a'}{p}\right) = \left(\frac{d'^{-1}}{p}\right) = \left(\frac{d'}{p}\right)\right]$$

bleibt also zu beweisen. Man kann d' positiv voraussetzen. Zerlegt man die Diskriminante D in ein Produkt:

$$D = \left[\left(\frac{-1}{p}\right)p\right] \cdot \left[\left(\frac{-1}{p}\right)sR\right],$$

in dem beide Faktoren Diskriminanten von quadratischen Zahlkörpern sind, so erhält man unter Benutzung des quadratischen Reziprozitätsgesetzes die Behauptung:

$$(17) \quad \left(\frac{D}{d'}\right) = \left(\frac{\left(\frac{-1}{p}\right)p}{d'}\right)\left(\frac{s\left(\frac{-1}{p}\right)R}{d'}\right) = \left(\frac{\left(\frac{-1}{p}\right)p}{d'}\right) = \left(\frac{\left(\frac{-1}{p}\right)}{d'}\right)\left(\frac{p}{d'}\right)$$

$$= (-1)^{\frac{d'-1}{2}\cdot\frac{p-1}{2}} \cdot \left(\frac{d'}{p}\right)(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{d'-1}{2}} = \left(\frac{d'}{p}\right).$$

IIa. Der Beweis der Behauptung auf S. 364 wird ebenso geführt wie im Fall II.

III. Eine Schwierigkeit tritt hier dadurch auf, daß $T \cdot T'$ manchmal in $\Gamma_0(D)$ liegt und manchmal außerhalb. Bei $c \not\equiv 0 \not\equiv c' \pmod p$ kann man nämlich über die Restklasse mod p von $ca' + dc'$ nichts Allgemeines aussagen.

$$c_{lk}(T)\, c_{km}(T')$$

$$= \left(\frac{AR}{p}\right)^2 \left(\frac{c}{p}\right)\left(\frac{c'}{p}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\ }}\right)^2 e^{2\pi i A R^{-1} \frac{c^{-1}(al^2+dk^2-2lk)+c'^{-1}(a'k^2+d'm^2-2km)}{p}}$$

$$(18) \quad \sum_{k \bmod p} c_{lk}(T)\, c_{km}(T')$$

$$= \left(\frac{cc'}{p}\right)\frac{1}{\left(\frac{-1}{p}\right)p} e^{2\pi i A R^{-1}\frac{ac^{-1}l^2+c'^{-1}d'm^2}{p}} \sum_{k \bmod p} e^{2\pi i A R^{-1}\frac{(a'c'^{-1}+c^{-1}d)k^2-2k(c^{-1}l+c'^{-1}m)}{p}}.$$

Andererseits ist bei $ca' + dc' \not\equiv 0\,(D)$:

$$(19)\; c_{lm}(T\cdot T') = \left(\frac{AR}{p}\right)\left(\frac{ca'+dc'}{p}\right)\frac{1}{\sqrt{\ }} e^{2\pi i A R^{-1}(ca'+dc')^{-1}\frac{(aa'+bc')l^2+(cb'+dd')m^2-2lm}{p}};$$

und bei $ca' + dc' \equiv 0 \pmod D$:

$$c_{lm}(T\cdot T') = \begin{cases} \left(\frac{D}{cb'+dd'}\right) e^{2\pi i A R^{-1}\frac{(aa'+bc')(ab'+bd')l^2}{p}} \\ 0 \end{cases},$$

je nachdem, ob $(aa' + bc')\, l \equiv m \pmod p$ ist oder nicht.

Es sei nun zunächst $ca' + dc' \not\equiv 0 \pmod p$. Die Summe über k läßt sich dann ganz ähnlich wie die Summe auf S. 358 auf eine Gaußsche Summe zurückführen.

$$\sum_{k \bmod p} e^{2\pi i A R^{-1} \frac{(a'c'^{-1} + c^{-1}d)k^2 - 2k(c^{-1}l + c'^{-1}m)}{p}}$$

$$= \sum_{k} e^{2\pi i A R^{-1} c^{-1} c'^{-1} (ca' + dc') \frac{k^2 - 2(ca' + dc')^{-1}(c'l + cm)k + (ca' + dc')^{-2}(c'l + cm)^2}{p}}$$

$$e^{-2\pi i A R^{-1} c^{-1} c'^{-1} \frac{(ca' + dc')^{-1}(c'l + cm)^2}{p}}$$

$$= \left(\frac{A R^{-1} c^{-1} c'^{-1} (ca' + dc')}{p}\right) \sqrt{\left(\frac{-1}{p}\right) p}\, e^{-2\pi i A R^{-1} c^{-1} c'^{-1} \frac{(ca' + dc')^{-1}(c'l + cm)^2}{p}}.$$

$$\sum_{k} c_{lk}(T)\, c_{km}(T')$$

$$= \left(\frac{cc'}{p}\right)^2 \left(\frac{AR}{p}\right) \left(\frac{ca' + dc'}{p}\right) \frac{\sqrt{\left(\frac{-1}{p}\right) p}}{\left(\frac{-1}{p}\right) p} e^{2\pi i A R^{-1} \frac{ac^{-1}l^2 + c'^{-1}d'm^2 - c^{-1}c'^{-1}(ca' + dc')^{-1}(c'l + cm)^2}{p}}.$$

Dann nehme man noch einige einfache Umformungen vor:

$$\sum_{k} c_{lk}(T)\, c_{km}(T')$$

$$= \left(\frac{AR}{p}\right) \left(\frac{ca' + dc'}{p}\right) \frac{1}{\sqrt{p}} e^{2\pi i A R^{-1} c^{-1} c'^{-1} \frac{ac'l^2 + cd'm^2 - (ca' + dc')^{-1}(c'^2 l^2 + c^2 m^2 + 2cc'lm)}{p}}$$

$$= \left(\frac{AR}{p}\right) \left(\frac{ca' + dc'}{p}\right) \frac{1}{\sqrt{p}} e^{2\pi i A R^{-1} (ca' + dc')^{-1} \frac{(aa' - 1 dc^{-1}c' - c^{-1}c')l^2 + (cc'^{-1}a'd' + dd' - cc'^{-1})m^2 - 2lm}{p}}.$$

Wegen $ad = 1 + bc$, $a'd' = 1 + b'c'$ ist dies

$$= \left(\frac{AR}{p}\right) \left(\frac{ca' + dc'}{p}\right) \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{-1}{p}\right) p}} e^{2\pi i A R^{-1} (ca' + dc')^{-1} \frac{(aa' + bc')l^2 + (cb' + dd')m^2 - 2lm}{p}},$$

und man erhält schließlich für $ca' + dc' \not\equiv 0 \pmod D$ die gewünschte Gleichung:

$$\text{(16)} \qquad \sum_{k \bmod p} c_{lk}(T) \cdot c_{km}(T') = c_{lm}(T \cdot T').$$

Ist jedoch $ca' + dc' \equiv 0 \pmod p$, also auch kongruent $0 \bmod D$, wird die Summe über k gleich einer Summe über p Einsen oder über alle p-ten Einheitswurzeln:

$$\sum_{k \bmod p} c_{lk}(T)\, c_{km}(T')$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{cc'}{p}\right) \left(\frac{-1}{p}\right) e^{2\pi i A R^{-1} c^{-1} c'^{-1} \frac{ac'l^2 + cd'm^2}{p}} & \text{bei } c'l + cm \equiv 0 (p), \\ 0 & \text{„ } c'l + cm \not\equiv 0 (p). \end{cases}$$

Zum Beweis der Gleichung (16) muß man dann noch zeigen, daß

1. $\left(\frac{-cc'}{p}\right) = \left(\frac{D}{cb'+dd'}\right)$,

2. $e^{2\pi i A R^{-1} c^{-1} c'^{-1} \frac{ac' l^2 + cd' m^2}{p}} = e^{2\pi i A R^{-1} \frac{(aa'+bc')(ab'+bd') l^2}{p}}$

und daß

3. $c'l + cm \equiv 0\,(p)$ äquivalent ist mit $(aa' + bc')\,l \equiv m\,(p)$.

1. Da nach S. 366, Gleichung (17), $\left(\frac{D}{cb'+dd'}\right) = \left(\frac{cb'+dd'}{p}\right)$ ist, muß man nur noch die Kongruenz

$$cb' + dd' \equiv -cc'^{-1} \pmod{p}$$

verifizieren:

$$cb' + dd' \equiv cb' + dc' \cdot d'c'^{-1} \equiv cb' - ca' \cdot d'c'^{-1} \text{ (wegen } ca' + dc' \equiv 0\,(p)\text{)},$$

$$\equiv c\,(b' - a'd'c'^{-1}) \equiv cc'^{-1}\,(b'c' - a'd') \equiv cc'^{-1} \pmod{p}.$$

2. Von der Richtigkeit der Kongruenz

$$(aa' + bc')\,(ab' + bd') \equiv ac^{-1} + c^{-2}c'd' \pmod{p}$$

oder der mit ihr äquivalenten Kongruenz

$$a^2c^2a'b' + abc^2c'd' + abc^2a'd' + b'c^2c'^2d' \equiv ac + c'd' \pmod{p}$$

überzeugt man sich leicht mit Hilfe von:

$$ad - bc = a'd' - b'c' = 1,$$

$$ca' + dc' \equiv 0 \pmod{p}.$$

3. $c'l + cm \equiv (ad - bc)\,c'l + cm \equiv (adc' - bcc')\,l + cm$

$$\equiv (-aca' - bcc')\,l + cm \text{ wegen } ca' + dc' \equiv 0\,(p)$$

$$\equiv -c\,(aa' + bc')\,l + cm \equiv 0 \pmod{p}$$

dann und nur dann, wenn $(aa' + bc')\,l \equiv m \pmod{p}$.

Somit ist auch im Falle III. die auf S. 364 behauptete Formel (16) bewiesen und damit gezeigt, daß die Matrizen eine Darstellung der Faktorgruppe $\Gamma(R)/\Gamma(D)$ bilden. Diese Darstellung vom Grade D zerfällt nach den Überlegungen von S. 363 sofort in R gleiche Darstellungen vom Grade p.

Geht man bei $p = 2$ von den Gleichungen auf S. 362 aus, die das Verhalten der f_λ bei einer beliebigen Modulsubstitution aus $\Gamma(R)$ zeigen:

$$\underline{c \equiv 0\,(D)}: \qquad f_\lambda \Big| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \left(\frac{D}{1+2\,\delta\Delta}\right) e^{2\pi i \frac{\beta l}{2}} f_\lambda,$$

$$\frac{c \not\equiv 0\,(D)}{\Delta \equiv 2\,(4)}: \qquad f_{lA} \Big| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = e^{2\pi i \frac{\beta l - \alpha}{2}} f_{(l+\Delta)A},$$

$$f_{(l+\sqrt{\Delta})A} \Big| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = e^{2\pi i \frac{\beta l - \alpha}{2}} f_{(l+\Delta+\sqrt{\Delta})A},$$

$$\frac{c \not\equiv 0\,(D)}{\Delta \equiv 3\,(4)}: \qquad f_{lA} \Big| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = e^{2\pi i \frac{\beta l - \alpha}{2}} f_{(l+\Delta+\sqrt{\Delta})A},$$

$$f_{(l+\Delta+\sqrt{\Delta})A} \Big| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = e^{2\pi i \frac{\beta l - \alpha}{2}} f_{lA},$$

und ordnet man die f_λ ähnlich wie bei ungerader Primzahl p so in einer Spalte u an, daß diejenigen beiden Reihen, die bei Anwendung von $\Gamma(R)$ voneinander abhängen, unmittelbar aufeinanderfolgen, dann erhält man bei der Operatorenschreibweise

$$\mathfrak{u} \Big| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{u}$$

eine Matrix $\mathfrak{M}$, die $|D|$ Zeilen und Spalten hat und in deren Hauptdiagonale zweireihige quadratische Kästchen $\mathfrak{K}$ stehen, die alle einander gleich sind. Außerhalb der Kästchen stehen in der Matrix $\mathfrak{M}$ nur Nullen. Bezeichnet man die in jedem Kästchen auftretenden Koeffizienten wieder mit c_{lm}, also entsprechend den obigen Gleichungen

(20) $\underline{c \equiv 0\,(D)}$: $c_{00} = c_{11} = \left(\frac{D}{1+2\,\delta\Delta}\right) e^{2\pi i \frac{\beta l}{2}}$; $c_{01} = c_{10} = 0$,

(21) $\underline{c \not\equiv 0\,(D)}$: $c_{00} = c_{11} = 0$; $c_{01} = c_{10} = e^{2\pi i \frac{\beta l - \alpha}{2}}$,

so bilden die Matrizen $\mathfrak{M}$ wieder eine Darstellung der Faktorgruppe $\Gamma(R)/\Gamma(D)$, wovon man sich ebenso wie bei ungerader Primzahl p durch Beweis der Gleichung

$$\mathfrak{K}(T) \cdot \mathfrak{K}(T') = \mathfrak{K}(T \cdot T')$$

oder

$$\sum_{k \bmod 2} c_{lk} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} c_{km} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = c_{lm} \begin{pmatrix} a\,a' + b\,c' & a\,b' + b\,d' \\ c\,a' + d\,c' & c\,b' + d\,d' \end{pmatrix}$$

überzeugt (s. S. 364).

§ 3.

Ausreduktion der Darstellung und die genaue Stufe der Modulformen.

Auf S. 354 wurde festgestellt, daß die Frage nach der genauen Stufe der Modulformen äquivalent ist mit der Frage, ob es beim Fortlassen einer beliebigen Primzahl p aus der Diskriminante $D = spR$ möglich ist, unter den Thetareihen Modulformen der Stufe R zu finden. Es soll jetzt mit Hilfe der im vorigen Paragraphen konstruierten Darstellung bewiesen werden, daß es keine Linearkombinationen der Reihen gibt, die zur Stufe R gehören.

Gäbe es nämlich eine derartige Linearkombination, so wäre sie bei Anwendung von $\Gamma(R)$ invariant. Man könnte also, wenn $\operatorname{Det} Q \neq 0$ ist, die Spalte u der Thetareihen f_λ so mit einer Matrix Q transformieren:

$$\mathfrak{v} = Q\,\mathfrak{u};\ \mathfrak{v}\Big|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = Q\,\mathfrak{u}\Big|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = Q\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{u} = Q\,\mathfrak{M}\,Q^{-1}\,\mathfrak{v},$$

daß in der Darstellung $Q\mathfrak{M}Q^{-1}$ von $\Gamma(R)/\Gamma(D)$, die zu der durch die $\mathfrak{M}$ gegebenen äquivalent ist, die Hauptdarstellung auftritt. [Die Hauptdarstellung ist diejenige Darstellung, die jedem $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ aus $\Gamma(R)/\Gamma(D)$ die Zahl 1 zuordnet.] — Man muß also die Darstellung in irreduzible Darstellungen zerfällen und von den irreduziblen Komponenten zeigen, daß unter ihnen die Hauptdarstellung nicht auftritt.

Wegen der besonderen Struktur der Matrizen $\mathfrak{M}$ ist mit der Reduktion eines Kästchens $\mathfrak{K}$ die Reduktion von ganz $\mathfrak{M}$ bereits geleistet.

Ist $p = 2$, treten in dem zweireihigen Kästchen $\mathfrak{K}$ nur zwei verschiedene Koeffizienten auf:

$$\mathfrak{K} = \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} \\ c_{01} & c_{00} \end{pmatrix}.$$

Diese Darstellung zweiten Grades kann man deshalb durch Transformation mit $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ in zwei Darstellungen ersten Grades zerfällen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} \\ c_{01} & c_{00} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} c_{00}+c_{01} & 0 \\ 0 & c_{00}-c_{01} \end{pmatrix}, \qquad \text{Det. } Q = -2,$$

$$\text{bei } c \equiv 0 \pmod{D}: \qquad = \begin{pmatrix} \left(\frac{D}{1+2\delta\Delta}\right) e^{2\pi i \frac{\beta l}{2}} & 0 \\ 0 & \left(\frac{D}{1+2\delta\Delta}\right) e^{2\pi i \frac{\beta l}{2}} \end{pmatrix}$$

$$\text{und bei } c \not\equiv 0 \pmod{D}: \qquad = \begin{pmatrix} e^{2\pi i \frac{\beta l - \alpha}{2}} & 0 \\ 0 & -e^{2\pi i \frac{\beta l - \alpha}{2}} \end{pmatrix}.$$

Man sieht sofort, daß keine dieser beiden Darstellungen die Hauptdarstellung ist. Nach einem bekannten Satz aus der Darstellungstheorie endlicher Gruppen ist es dann auch unmöglich, durch Transformation mit anderen Q die gegebene Darstellung so zu zerfällen, daß die Hauptdarstellung auftritt. Damit ist für $p = 2$ bewiesen, daß es unter den Reihen keine Modulformen der Stufe $\frac{1}{2} D$ gibt.

Bei ungerader Primzahl p kann man ähnliche Betrachtungen durchführen. Die auf S. 363 definierten $c_{l,m}$ haben eine Symmetrieeigenschaft:

$$c_{l,m} = c_{p-l,\,p-m}.$$

Durch Vertauschung der Reihenfolge der letzten $\frac{p-1}{2}$ Zeilen und Spalten, d. h. durch Transformation mit einer dieser Vertauschung entsprechenden Matrix Q_1 bringt man $\mathfrak{R}$ auf die Gestalt

$$\mathfrak{R}_1 = Q_1 \mathfrak{R} Q_1^{-1} = \begin{pmatrix}
c_{0,1} & c_{0,1} & \cdots & c_{0,\frac{p-1}{2}} & c_{0,1} & \cdots & c_{0,\frac{p-1}{2}} \\
c_{1,0} & c_{1,1} & \cdots & c_{1,\frac{p-1}{2}} & c_{1,p-1} & \cdots & c_{1,\frac{p+1}{2}} \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
c_{\frac{p-1}{2},0} & c_{\frac{p-1}{2},1} & \cdots & c_{\frac{p-1}{2},\frac{p-1}{2}} & c_{\frac{p-1}{2},p-1} & \cdots & c_{\frac{p-1}{2},\frac{p+1}{2}} \\
c_{1,0} & c_{1,p-1} & \cdots & c_{1,\frac{p+1}{2}} & c_{1,1} & \cdots & c_{1,\frac{p-1}{2}} \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
c_{\frac{p-1}{2},0} & c_{\frac{p-1}{2},p-1} & \cdots & c_{\frac{p-1}{2},\frac{p+1}{2}} & c_{\frac{p-1}{2},1} & \cdots & c_{\frac{p-1}{2},\frac{p-1}{2}}
\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}
c_{0,0} & c_{0,1} & \cdots & c_{0,\frac{p-1}{2}} & c_{0,1} & \cdots & c_{0,\frac{p-1}{2}} \\
c_{1,0} & & & & & & \\
\vdots & & \mathfrak{A} & & & \mathfrak{B} & \\
c_{\frac{p-1}{2},0} & & & & & & \\
c_{1,0} & & & & & & \\
\vdots & & \mathfrak{B} & & & \mathfrak{A} & \\
c_{\frac{p-1}{2},0} & & & & & &
\end{pmatrix},$$

wobei $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Matrizen vom Grade $\frac{p-1}{2}$ sind. Die $\mathfrak{R}_1$ haben also eine ähnliche Form wie die zu $p = 2$ gehörenden Matrizen von S. 370. Daher kann

man durch eine ähnliche Matrix wie bei $p = 2$ diese Darstellung vom Grade p, wobei p eine beliebige ungerade Primzahl ist, zerfällen. Nimmt man nämlich

$$Q_p = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 1 & & & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \\ & & & 1 & & & 1 \\ \hline \vdots & 1 & & & -1 & & \\ & & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & & 1 & & & -1 \end{array}\right),$$

so wird

$$Q_p \mathfrak{R}_1 Q_p^{-1} = \mathfrak{R}_2 = \left(\begin{array}{cccccc} c_{00} & c_{01} & \cdots & c_{0,\frac{p-1}{2}} & 0 & \cdots & 0 \\ 2c_{10} & & & & & & \\ \vdots & & & \mathfrak{A}+\mathfrak{B} & & 0 & \\ 2c_{\frac{p-1}{2},0} & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ \vdots & & & 0 & & \mathfrak{A}-\mathfrak{B} & \\ 0 & & & & & & \end{array}\right).$$

Die Darstellung ist also in eine Darstellung vom Grade $\frac{p+1}{2}$ und in eine Darstellung vom Grade $\frac{p-1}{2}$ zerfallen. Die Behauptung, daß die Hauptdarstellung nicht auftritt, beweist man durch die Irreduzibilität dieser beiden Darstellungen. Diesen Nachweis kann man führen unter Benutzung des bekannten Irreduzibilitätskriteriums einer Darstellung einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ der Ordnung h:

Die Darstellung möge dem Element a aus $\mathfrak{G}$ eine Matrix mit der Spur $S(a)$ zuordnen. Dann ist die Darstellung genau dann irreduzibel, wenn

$$\sum_{a \in \mathfrak{G}} S(a)\, S(a^{-1}) = h$$

ist.

Es ist nun umständlich, sich alle Gruppenelemente und die ihnen zugeordneten Spuren zu überlegen, deshalb soll die Irreduzibilität der beiden Darstellungen gezeigt werden durch die bereits bekannten Charaktere der Faktorgruppe der ganzen Gruppe nach der Hauptkongruenzuntergruppe der Stufe p, d. h. der Spuren der absolut irreduziblen Darstellungen von $\Gamma/\Gamma(p)$. Die Faktorgruppe $\Gamma(R)/\Gamma(D)$ ist nämlich isomorph dieser Gruppe. Also

stimmen die Charaktere dieser beiden Gruppen überein. Die Charaktere der homogenen Gruppe sind von I. Schur[4]) berechnet worden.

Die Charaktere haben die Grade:

$$1,\ p,\ p+1,\ p-1,\ \tfrac{1}{2}(p+1),\ \tfrac{1}{2}(p-1).$$

Auf S. 372 treten eine Darstellung vom Grade $\frac{p+1}{2}$ und eine vom Grade $\frac{p-1}{2}$ auf. Da die von Schur berechnete Darstellung vom ersten Grade — es gibt davon nur eine — die Hauptdarstellung ist, muß die hier auftretende Darstellung vom Grade $\frac{p-1}{2}$ entweder irreduzibel sein oder in $\frac{p-1}{2}$ Hauptdarstellungen zerfallen. Bei der zweiten Möglichkeit würde die Spur $S_{\frac{p-1}{2}}$ jeder Matrix $\mathfrak{R}_2$ dieser $\frac{p-1}{2}$-reihigen Darstellung gleich $\frac{1}{2}(p-1)$ sein, unabhängig von der Modulsubstitution

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ aus } \Gamma(R)/\Gamma(D).$$

Daß dies nicht der Fall ist, zeigt man durch Berechnung der zur $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ R & 1 \end{pmatrix}$ gehörenden Spur:

$$S_{\frac{p-1}{2}} = c_{11} - c_{1,p-1} + c_{22} - c_{2,p-2} + \dots + c_{\frac{p-1}{2}\,\frac{p-1}{2}} - c_{\frac{p-1}{2}\,\frac{p+1}{2}}$$

$$= \left(\frac{AR}{p}\right)\left(\frac{R}{p}\right)\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{-1}{p}\right)p}} \sum_{1 \leqq l \leqq \frac{p-1}{2}} \left(e^{2\pi i A R^{-1} \frac{l^2+l^2-l^2}{p}} - e^{2\pi i A R^{-1} \frac{l^2+(p-l)^2-2l(p-l)}{p}} \right)$$

$$\neq \frac{p-1}{2}.$$

Die Darstellung vom Grade $\frac{p-1}{2}$ ist also irreduzibel, und nach dem bereits erwähnten Satz der Darstellungstheorie endlicher Gruppen muß bei jeder Zerfällung von $\mathfrak{R}$ durch irgendeine Matrix diese Darstellung vom Grade $\frac{p-1}{2}$ oder eine mit ihr äquivalente auftreten.

Die Darstellung vom Grade $\frac{p+1}{2}$ ist entweder irreduzibel oder zerfällt in $\frac{p+1}{2}$ Hauptdarstellungen oder in eine irreduzible Darstellung vom Grade $\frac{p-1}{2}$ und die einmal auftretende Hauptdarstellung. Nach Schur ist im ersten Falle die Spur $S_{\frac{p+1}{2}}$ der der Substitution $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ aus $\Gamma/\Gamma(p)$ zugeordneten

[4]) Untersuchung über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen. Crelle Journal **132**, S. 128.

$\frac{p+1}{2}$-reihigen Matrix gleich $\left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{p+1}{2}}$, im zweiten Fall gleich $\frac{p+1}{2}$; und im dritten Fall gleich $-\left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{p-1}{2}}+1$. Da offenbar nicht alle Elemente den Charakter $\frac{p+1}{2}$ haben, sind die Charaktere von $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ aus $\Gamma/\Gamma(p)$ geeignet zur Entscheidung der Reduzibilität der Darstellung vom Grade $\frac{p-1}{2}$. Hierbei ist zu beachten, daß die bei Berechnung der Spur auftretenden Koeffizienten $c_{lm}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ abhängig sind von der Faktorgruppe $\Gamma(R)/\Gamma(D)$ und diese mit $\Gamma/\Gamma(p)$ nicht identisch, sondern nur isomorph ist. Man muß also die Spur berechnen, die zu dem Bild von $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ beim Isomorphismus $\Gamma/\Gamma(p)$ auf $\Gamma(R)/\Gamma(D)$ gehört. Das Bild von

$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ aus $\Gamma/\Gamma(p)$ ist $\begin{pmatrix}-1-\alpha p & \beta p\\ \gamma p & -1-\delta p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ aus $\Gamma(R)/\Gamma(D)$,

wobei α und δ Lösungen ξ der Kongruenz $-1-\xi p\equiv 1 \pmod R$ und $\beta\equiv\gamma\equiv 0\,(R)$ sind. Hierzu gehören die c_{lm} mit

$$c_{lm}=\begin{cases}\left(\frac{D}{d}\right) \text{ bei } -l\equiv m \\ 0 \quad ,, \quad -l\not\equiv m\end{cases}\pmod p:\qquad \begin{aligned} &c_{11}=c_{22}=\ldots=c_{\frac{p-1}{2}\frac{p-1}{2}}=0,\\ &c_{00}=c_{\frac{p-1}{2}\frac{p+1}{2}}=\ldots=c_{1,p-1}=\left(\frac{D}{d}\right).\end{aligned}$$

Also ist schließlich

$$\begin{aligned}S_{\frac{p+1}{2}}&=c_{00}+c_{11}+c_{1,p-1}+\ldots+c_{\frac{p-1}{2}\frac{p-1}{2}}+c_{\frac{p-1}{2}\frac{p+1}{2}}\\&=\left(\frac{D}{d}\right)^{\frac{p+1}{2}}=\left(\frac{d}{p}\right)^{\frac{p+1}{2}}=\left(\frac{-1-\delta p}{p}\right)^{\frac{p+1}{2}}=\left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{p+1}{2}}.\end{aligned}$$

Das zieht die Irreduzibilität der Darstellung vom Grade $\frac{p+1}{2}$ nach sich.

Die Darstellung durch die Matrizen $\mathfrak{M}$ zerfällt also zunächst in R einander gleiche Darstellungen $\mathfrak{R}$ vom Grade p und jede dieser Darstellungen zerfällt in zwei irreduzible Darstellungen von den Graden $\frac{p+1}{2}$ und $\frac{p-1}{2}$.

Da die irreduziblen Komponenten einer Darstellung bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt sind, bedeutet dies, daß es unter den Linearkombinationen von Thetareihen keine Modulformen der Stufe R gibt, $D=s\cdot p\cdot R$. Das gilt für jede ungerade oder gerade Primzahl p. Damit ist bewiesen, daß die aus binären Thetareihen erzeugten Modulformen und ihre Linearkombinationen genau zur Stufe D gehören.

(Eingegangen am 27. Juli 1939.)

Limitierungsumkehrsätze mit Lückenbedingungen für das C-Verfahren.

Von

H. D. Kloosterman in Leiden.

Im 45. Band dieser Zeitschrift[1]) hat Meyer-König Limitierungsumkehrsätze mit Lückenbedingungen bewiesen. Es soll hier gezeigt werden, daß die von Meyer-König gegebenen Beweise, soweit es sich um das C_k-Verfahren handelt, sehr erheblich vereinfacht werden können. Die Beweise ergeben sich nämlich unmittelbar aus der einfachen Formel, die in § 1 als Hilfssatz formuliert worden ist. Weil es sehr wenig Mühe macht, beweise ich gleich einige allgemeinere Sätze (§ 2).

Bezeichnungen. Es seien ϑ, ϑ_1 und ϑ_2 positive Zahlen, m eine natürliche Zahl und

$$0 < \vartheta_1 < \vartheta_2 < \vartheta; \quad -m < \lambda \leqq 1. \tag{1}$$

Es seien n_ν und n'_ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) wachsende Folgen von natürlichen Zahlen, welche den Bedingungen

$$n_\nu < n'_\nu < n_{\nu+1} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

und

$$n'_\nu - n_\nu \geqq \vartheta\, n_\nu^{\frac{m+\lambda}{m+1}} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

genügen.

Die nach wachsender Größe geordnete Folge der ganzen Zahlen n, für die

$$n_\nu \leqq n \leqq n'_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

ist, werde mit k_ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) bezeichnet. Weiter sei u_ν bzw. v_ν bzw. w_ν die nach wachsender Größe geordnete Folge der ganzen Zahlen n, für die

$$n_\nu \leqq n \leqq n_\nu + \vartheta_2 n_\nu^{\frac{m+\lambda}{m+1}} \quad \text{bzw.} \quad n_\nu + \vartheta_1 n_\nu^{\frac{m+\lambda}{m+1}} \leqq n \leqq n_\nu + \vartheta_2 n_\nu^{\frac{m+\lambda}{m+1}}$$

$$\text{bzw. } n_\nu + \vartheta_1 n_\nu^{\frac{m+\lambda}{m+1}} \leqq n \leqq n'_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

ist.

Es sei weiter

$$a_1 + a_2 + \ldots \tag{4}$$

[1]) Limitierungsumkehrsätze mit Lückenbedingungen. I. Math. Zeitschr. 45 (1939), S. 447–478.

eine unendliche Reihe und

$$S_n = S_n^{(0)} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$
$$S_n^{(m)} = S_1^{(m-1)} + S_2^{(m-1)} + \ldots + S_n^{(m-1)} \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Die Reihe (4) ist C_m-summierbar mit C_m-Summe 0, falls

$$\lim_{n \to \infty} n^{-m} S_n^{(m)} = 0.$$

Die r-te Differenz ($r = 1, 2, \ldots$) einer Zahlenfolge t_k ($k = 1, 2, \ldots$) sei durch

$$\Delta_h^r t_k = \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu \binom{r}{\nu} t_{k+(r-\nu)h}$$

definiert, falls h eine positive ganze Zahl ist und durch

$$\Delta_{-h}^r t_k = \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu \binom{r}{\nu} t_{k-\nu h},$$

falls $-h$ eine negative ganze Zahl ist.

§ 1.

Ein Hilfssatz.

Hilfssatz. *Falls h und n positive ganze Zahlen sind, so ist*

(5) $$h^m S_n^{(0)} = \Delta_h^m S_n^{(m)} - \sum_{\nu=n+1}^{n+h} (n+h+1-\nu) \sum_{\mu=0}^{m-1} h^{m-\mu-1} \Delta_h^\mu S_\nu^{(\mu-1)},$$

und falls $n > mh$ ist:

(6) $$h^m S_n^{(0)} = \Delta_{-h}^m S_n^{(m)} + \sum_{\nu=n-h+1}^{n} (\nu-n+h-1) \sum_{\mu=0}^{m-1} h^{m-\mu-1} \Delta_{-h}^\mu S_\nu^{(\mu-1)},$$

wo die Differenzen sich auf den unteren Index von S beziehen, und $\Delta_h^0 S_\nu^{(-1)}$ und $\Delta_{-h}^0 S_\nu^{(-1)}$ als a_ν zu definieren sind.

Beweis. Es werde vollständige Induktion nach m angewandt. Falls $m = 1$ ist, lautet die Formel (5):

(7) $$h S_n^{(0)} = S_{n+h}^{(1)} - S_n^{(1)} - \sum_{\nu=n+1}^{n+h} (n+h+1-\nu) a_\nu.$$

Dies kann sofort durch Ausschreiben verifiziert werden. Man nehme weiter an, daß die Formel (5) für ein bestimmtes $m \geqq 1$ bereits bewiesen sei. Falls man dann in der Formel (5) n durch x ersetzt, und über x summiert von $n+1$ bis $n+h$, so kommt:

$$h^m \Delta_h^1 S_n^{(1)} = \Delta_h^m (S_{n+1}^{(m)} + S_{n+2}^{(m)} + \ldots + S_{n+h}^{(m)}) +$$
$$- \sum_{\nu=n+1}^{n+h} (n+h+1-\nu) \sum_{\mu=1}^{m} h^{m-\mu} \Delta_h^{(\mu-1)} (S_{\nu+1}^{(\mu-2)} + S_{\nu+2}^{(\mu-2)} + \ldots + S_{\nu+h}^{(\mu-2)})$$

oder

$$(8)\quad h^m \Delta_h^1 S_n^{(1)} = \Delta_h^{m+1} S_n^{(m+1)} - \sum_{\nu=n+1}^{n+h} (n+h+1-\nu) \sum_{\mu=1}^{m} h^{m-\mu} \Delta_h^{\mu} S_\nu^{(\mu-1)}.$$

Nach (7) ist aber

$$\Delta_h S_n^{(1)} = h S_n^{(0)} + \sum_{\nu=n+1}^{n+h} (n+h+1-\nu) \Delta_h^0 S_\nu^{(-1)}.$$

Falls man dies in (8) einsetzt, so kommt:

$$h^{m+1} S_n^{(0)} = \Delta_h^{m+1} S_n^{(m+1)} - \sum_{\nu=n+1}^{n+h} (n+h+1-\nu) \sum_{\mu=0}^{m} h^{m-\mu} \Delta^{\mu} S_\nu^{(\mu-1)}.$$

Damit ist die vollständige Induktion ausgeführt.

Die Formel (6) kann in derselben Weise bewiesen werden.

§ 2.

Die Hauptsätze.

Satz 1. *Die Glieder der Reihe* (4) *seien reell und es sei*

$$a_n > -M n^{-\lambda} \quad \text{für} \quad n_\nu + 1 \leqq n \leqq n'_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

wo M eine von n unabhängige positive Konstante ist. Falls n die Folge der Zahlen k_ν durchläuft, sei weiter

$$(9)\qquad \lim n^{-m} S_n^{(m)} = 0.$$

Falls dann n die Folge u_ν durchläuft, so ist

$$(10)\qquad \limsup n^{-m\frac{1-\lambda}{m+1}} S_n^{(0)} \leqq 0,$$

und falls n die Folge w_ν durchläuft, so ist

$$(11)\qquad \liminf n^{-m\frac{1-\lambda}{m+1}} S_n^{(0)} \geqq 0.$$

Vorbemerkung. Falls n die Folge v_ν durchläuft, so ist also

$$\lim n^{-m\frac{1-\lambda}{m+1}} S_n^{(0)} = 0.$$

Beweis. Es seien n und h natürliche Zahlen, welche für irgendein ν den Ungleichungen

$$(12)\qquad n_\nu \leqq n < n + mh \leqq n'_\nu$$

und

$$(13)\qquad n + mh \leqq 2n$$

genügen. Man wende die Formel (5) an. Für

$$n + 1 \leqq \nu \leqq n + mh \leqq 2n$$

ist wegen (1):

$$\Delta_h^0 S_\nu^{(-1)} = a_\nu > -M \nu^{-\lambda} \geqq -M \beta n^{-\lambda},$$

wo

$$\beta = Max\ (1, 2^{-\lambda}).$$

Falls $m \geqq 2$ ist, und $n+1 \leqq \nu \leqq n+(m-1)h$, so ist demnach:

$$\Delta_h^1 S_\nu^{(0)} = S_{n+h}^{(0)} - S_n^{(0)} = a_{\nu+1} + a_{\nu+2} + \ldots + a_{\nu+h} > -M\beta h n^{-\lambda}.$$

Ist noch $m \geqq 3$ und $n+1 \leqq \nu \leqq n+(m-2)h$, so folgt weiter

$$\Delta_h^2 S_\nu^{(1)} = \Delta_h (S_{\nu+1}^{(0)} + S_{\nu+2}^{(0)} + \ldots + S_{\nu+h}^{(0)}) > -M\beta h^2 n^{-\lambda}.$$

Im allgemeinen ist für $n+1 \leqq \nu \leqq n+h$:

$$\Delta_h^\mu S_\nu^{(\mu-1)} > -M\beta h^\mu n^{-\lambda} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, m-1). \tag{14}$$

Es sei nun ε eine genügend kleine positive Zahl. Nach (9) ist dann für genügend großes n aus der Folge k_ν:

$$|S_n^{(m)}| < \varepsilon n^m. \tag{15}$$

Die Formel (5) liefert nun wegen (14) und (15):

$$h^m S_n^{(0)} < 2^m \varepsilon (n+mh)^m + \sum_{\nu=n+1}^{n+h} (n+h+1-\nu) \sum_{\mu=0}^{m-1} h^{m-\mu-1} M\beta h^\mu n^{-\lambda}$$

oder auch:

$$S_n^{(0)} < 4^m \varepsilon n^m h^{-m} + M m \beta h n^{-\lambda}. \tag{16}$$

Man wähle nun:

$$h = 1 + \left[\varepsilon^{\frac{1}{m+1}} n^{\frac{m+\lambda}{m+1}}\right].$$

Diese Wahl von h ist erlaubt. Denn für genügend großes n und genügend kleines ε ist (13) sicher erfüllt. Aber auch (12) gilt, wenn n der Folge u_ν angehört. Denn dann ist

$$\begin{aligned}
n + mh &\leqq n + m\left(1 + \varepsilon^{\frac{1}{m+1}} n^{\frac{m+\lambda}{m+1}}\right) \\
&\leqq n_\nu + \vartheta_2 n_\nu^{\frac{m+\lambda}{m+1}} + m + m\varepsilon^{\frac{1}{m+1}} \left(n_\nu + \vartheta_2 n_\nu^{\frac{m+\lambda}{m+1}}\right)^{\frac{m+\lambda}{m+1}} \\
&\leqq n_\nu + n_\nu^{\frac{m+\lambda}{m+1}} \left(\vartheta_2 + m n_\nu^{-\frac{m+\lambda}{m+1}} + m\varepsilon^{\frac{1}{m+1}} \left(1 + \vartheta_2 n_\nu^{-\frac{1-\lambda}{m+1}}\right)^{\frac{m+\lambda}{m+1}}\right) \\
&\leqq n_\nu + n_\nu^{\frac{m+\lambda}{m+1}} \left(\vartheta_2 + m n_\nu^{-\frac{m+\lambda}{m+1}} + m\varepsilon^{\frac{1}{m+1}} (1+\vartheta_2)\right) \\
&\leqq n_\nu + \vartheta n_\nu^{\frac{m+\lambda}{m+1}} \leqq n'_\nu
\end{aligned}$$

[wegen (3)].

Falls $h \geqq 2$ ist, folgt nun weiter aus (16):

$$S_n^{(0)} < (4^m + 2Mm\beta)\, \varepsilon^{\frac{1}{m+1}} n^{m\frac{1-\lambda}{m+1}}$$

und damit die Behauptung (10).

Die Behauptung (11) folgt in derselben Weise, wenn man die Formel (6) statt (5) benutzt.

In derselben Weise kann gezeigt werden:

Satz 2. *Die Glieder der Reihe* (4) *seien reell und es sei*

$$a_n < M n^{-\lambda} \quad \text{für} \quad n_\nu + 1 \leqq n \leqq n'_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

wo M eine von n unabhängige positive Konstante ist. Falls n die Folge der Zahlen k_ν durchläuft, sei weiter

$$\lim n^{-m} S_n^{(m)} = 0.$$

Falls dann n die Folge w_ν durchläuft, so ist

$$\limsup n^{-m\frac{1-\lambda}{m+1}} S_n^{(0)} \leqq 0,$$

und falls n die Folge u_ν durchläuft, so ist

$$\liminf n^{-m\frac{1-\lambda}{m+1}} S_n^{(0)} \geqq 0.$$

Die Sätze 1 und 2 ergeben zusammen:

Satz 3. *Die Glieder der Reihe* (4) *seien reell und es sei*

$$|a_n| < M n^{-\lambda} \quad \text{für} \quad n_\nu + 1 \leqq n \leqq n'_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

wo M eine von n unabhängige positive Konstante ist. Falls dann n die Folge k_ν durchläuft und

$$\lim n^{-m} S_n^{(m)} = 0$$

ist, so ist auch

$$\lim n^{-m\frac{1-\lambda}{m+1}} S_n^{(0)} = 0.$$

Dieser Satz gilt offenbar auch noch, wenn die Glieder der Reihe (4) nicht reell sind. Man braucht dann nur die Reihe der Realteile und der Imaginärteile getrennt zu betrachten.

Für $\lambda = 1$ erhält man die obenerwähnten, von Meyer-König bewiesenen Sätze.

(Eingegangen am 29. Oktober 1939.)

Regular and semi-regular polytopes. I.

By

H. S. M. Coxeter in Toronto.

Contents.

§ 1. 1. The idea of a uniform polyhedron 380
§ 1. 2. Groups generated by reflections 382
§ 1. 3. The representation by graphs 383
§ 1. 4. Abstract definitions for these groups and certain subgroups . . 387
§ 1. 5. Wythoff's construction for uniform polyhedra 390
§ 1. 6. The pyritohedral group 395
§ 1. 7. The period of $R_1 R_2 R_3$ in $[m, n]$ 397
§ 1. 8. An explanation for Pappus' observation on reciprocal regular polyhedra 399
§ 1. 9. Uniform space-fillings 400
Appendix: On Cayley group-pictures 404

Preface.

A "preliminary note" on this subject has appeared under the title *Wythoff's construction for uniform polytopes* [1]). I have divided the present work into three parts (of which the first appears now), the emphasis being on space of three dimensions, four dimensions, and six to eight dimensions, respectively. (Nothing special happens in five dimensions!) The treatment is elementary and *ab initio*; this inevitably involves giving an improved version of some earlier work. § 1. 8 is entirely new.

§ 1. 1.

The idea of a uniform polyhedron.

A study of the regular and Archimedean solids makes it seem desirable to invent a name for the class of polyhedra which have the following two properties:

(i) the faces are regular polygons,

(ii) there is a group of motions (with or without reflections) which is transitive on the vertices.

---

[1]) Proc. London Math. Soc. (2), **38** (1935), pp. 327—339.

Let us call these *uniform* polyhedra. In the present work we restrict consideration to polyhedra which are strictly convex. Kepler [2]) showed that the uniform polyhedra consist of:

(a) the five regular solids,

(b) the thirteen Archimedean solids (or semi-regular solids of the first kind),

(c) the prism, whose faces are two n-gons and n squares ($n = 3, 5, 6, \ldots$; we exclude $n = 4$ because the cube has already been counted),

(d) the antiprism, whose faces are two n-gons and $2n$ equilateral triangles ($n = 4, 5, 6, \ldots$; we exclude $n = 3$ because the octahedron has already been counted).

In all but two cases (the dodecahedron and the icosidodecahedron), the order of the group (ii) may be taken to be equal to the number of vertices. The edges of the polyhedron, suitably coloured, then constitute a "colour group" [3]). (See the Appendix.)

It is convenient to say that a polyhedron is *edge-reflexible* if all its edges are perpendicularly bisected by planes of symmetry. In such cases the group (ii) may be taken to be generated by reflections in these planes. For instance, the edges of the cube are bisected (in sets of four) by three planes, reflections in which generate a group of order 8. Again, the edges of the tetrahedron, and likewise of the octahedron, are bisected by six planes, reflections in which generate a group of order 24. (This time we are using a group whose order is greater than the number of vertices.)

It follows from the above definition that the vertices of any edge-reflexible polyhedron can be constructed as the set of transforms, under a group generated by reflections, of a single point. The actual cases may be very attractively exhibited by means of the polyhedral kaleidoscope invented by E. Hess [4]). This consists of a set of three plane mirrors, suitably inclined to one another. In a darkened room, the "single point" can be suggested by a candle flame; the vertices of the polyhedron are than seen as a multitude of such flames.

It happens that the only uniform polyhedra which are not edge-reflexible are the snub cube (Kepler's *cubus simus*), the snub dodecahedron, and the antiprisms. These can be treated somewhat similarly, using rotations instead of reflections. The two snub figures have no planes of symmetry at all, and consequently occur in *dextro* and *laevo* varieties.

---

[2]) Opera omnia, 5 (Frankfurt, 1864), pp. 116—126. For a more rigorous treatment, see Catalan, Journal de l'École Polytech. **41** (1865), pp. 25—32.

[3]) Cayley, Proc. London Math. Soc. 9 (1878), pp. 126—133; Amer. Journal of Math. **11** (1889), pp. 139—157.

[4]) N. Jahrbuch für Mineralogie **1** (1889), pp. 54—65.

§ 1. 2.

Groups generated by reflections.

A single reflection generates a group of order two, denoted by [1]. Two reflections generate a group which is infinite unless the angle between their planes is commensurable with π. If the angle is $\frac{d\pi}{n}$ where d and n are coprime, the group is of order $2n$, denoted by $[n]$. In fact, the same group is generated by reflections in two planes making an angle $\frac{\pi}{n}$, and then the angular region between the planes serves as a fundamental region. The symbol $[\infty]$ naturally represents the infinite group which is generated by reflections in two parallel planes.

The group generated by reflections in any number of planes is equally well generated by reflections in these planes and all their transforms. If (as we shall always suppose) the group is discrete, the whole set of planes effects a partition of space into a finite or infinite number of congruent (or symmetric) regions, and the group is generated by reflections in the bounding planes of any one of the regions. Let these bounding planes be denoted by $p_1, p_2, \ldots$ (By an argument due to Pólya [5]) there cannot be more than six of them, in ordinary space.) Let $\frac{\pi}{n_{\mu\nu}}$ denote the (internal) angle between p_μ and p_ν. Then $n_{\mu\nu}$ is an integer, since otherwise the region would be subdivided by transforms of these planes. The case when p_μ and p_ν are parallel may be included by allowing $n_{\mu\nu}$ to be infinite.

Let R_μ denote the reflection in p_μ. Clearly

$$R_\mu^2 = 1, \quad (R_\mu R_\nu)^{n_{\mu\nu}} = 1. \tag{1.21}$$

By the following argument, due to Witt [6]), *the region enclosed by the planes* p_μ *is a fundamental region, and the above relations constitute an abstract definition*, the period of $R_\mu R_\nu$ being specified for every pair of the planes except such as are parallel. For instance, the dihedral group $[n]$ is defined by

$$R_1^2 = R_2^2 = (R_1 R_2)^n = 1,$$

while the analogous infinite group is the free product of two groups of order two:

$$R_1^2 = R_2^2 = 1.$$

---

[5]) Annals of Math. 35 (1934), p. 594.

[6]) Compare Burnside, Theory of Groups (second edition, Cambridge, 1911), p. 399 (§ 291); Cartan, Annali di Mat. (4) 4 (1927), pp. 215, 216.

Let W denote the region enclosed by the planes, so that WR_r is the neighbouring region derived by reflecting in p_r. A typical bounding plane of WR_r is $p_\mu R_r$. The region derived from WR_r by reflection in $p_\mu R_r$ is $WR_\mu R_r$, since this region and WR_r, with their interface $p_\mu R_r$, are derived from WR_μ and W, with their interface p_μ, by applying the reflection R_r. Similarly, the bounding plane $p_\lambda R_\mu R_r$ of this region leads to $WR_\lambda R_\mu R_r$. Thus the region WS, derived from W by applying any operation $S = R_\alpha R_\beta \ldots R_\mu R_r$, can be reached from W along a *path* which passes through the consecutively neighbouring regions

$$W R_r, W R_\mu R_r, \ldots, W R_\beta \cdots R_\mu R_r.$$

It remains to be proved that, if WS is W itself, then $S = 1$. In this case the path from W to WS is closed, and we consider what happens to the expression $R_\alpha R_\beta \ldots R_\mu R_r$ when this path is continuously shrunk to a point. If at any stage the path goes from one region into another and then immediately returns to the region it has just left, this detour may be eliminated by cancelling a repeated R_λ in the expression, in accordance with the relation $R_\lambda^2 = 1$. The only other kind of change that can occur during the shrinking process, is when the path momentarily crosses an *edge* (common to $2n_{\kappa\lambda}$ regions). The expression will then be simplified by applying the relation $(R_\kappa R_\lambda)^{n_{\kappa\lambda}} = 1$.

The shrinkage of the path thus corresponds to an algebraic reduction of the expression $R_\alpha R_\beta \ldots R_\mu R_r$ by means of the above relations. Since the path can be shrunk right down to a point, the expression is equal to 1; and since this result is an algebraic consequence of (1. 21), those relations suffice for an abstract definition of the group.

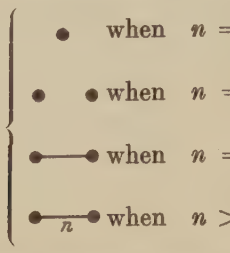
An analogous argument proves the same result for any simply-connected space of l dimensions, the planes being replaced by hyperplanes, and the edges by $(l-2)$-spaces.

§ 1. 3.

The representation by graphs.

It is convenient to represent each generating reflection (or each mirror of the kaleidoscope) by a dot, and to draw a line (or "link") between two dots whenever the corresponding mirrors are not perpendicular, marking such a link with the number $n_{\mu r}$ to indicate the angle $\frac{\pi}{n_{\mu r}}$ $(n_{\mu r} \geqq 3)$. In this manner the group (1. 21) is represented by a *graph* of dots and (marked)

links. Owing to its frequent occurrence, the mark 3 will usually be omitted (and left to be understood). Thus the group $[n]$ is denoted by

(1.31) 

The disconnected symbol when $n = 2$ exhibits the fact that the group [2], generated by reflections in two perpendicular mirrors, is the direct product $[1] \times [1]$ (that is, the four-group).

When, as in these cases, all the mirrors are perpendicular to one plane, the group may be considered as operating in that plane, with one-dimensional mirrors. (The groups [1] and $[\infty]$ may even be regarded as operating in a line, with one or two *points* for mirrors). The remaining two-dimensional groups (which can be visualized by using three or four vertical mirrors) are infinite, and may be enumerated by considering, as possible fundamental regions, the various plane polygons whose angles are submultiples of π. There are four such groups with finite fundamental regions:

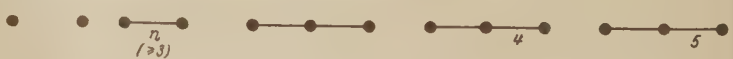
(1.32)

or, in a convenient alternative notation,

$$\Delta, \quad [3, 6], \quad [4, 4], \quad [\infty] \times [\infty].$$

(In the last case the fundamental region is a rectangle.) The group or $[1] \times [\infty]$ is not interesting, since it is infinite without having a finite fundamental region; in other words, it is an infinite group of a kind that has no finite analogue.

In all other cases with three mirrors, the planes are concurrent, and the group may be regarded as operating on a sphere centred at the point of concurrence; that is, we reflect in great circles of the sphere, and the fundamental region is a spherical triangle of angles $\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}$, where $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} > 1$. We thus obtain the *extended polyhedral* groups:

(1.33) 

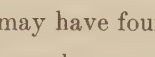
or, in the other notation,

$$[1] \times [1] \times [1], \quad [1] \times [n], \quad [3, 3], \quad [3, 4], \quad [3, 5].$$

Of course $[m, n]$ is the same as $[n, m]$. Since the fundamental region is a spherical triangle of area $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{m} + \frac{\pi}{n} - \pi$, the order is

$$\frac{4}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}}.$$

The network of such triangles covering the sphere is known as the *Dyck group-picture* [7]) for $[m, n]$.

We cannot use four or more concurrent mirrors, since the average angle of a spherical m-gon is greater than $\frac{m-2}{m}\pi$, whereas no angle of a fundamental region can be greater than $\frac{\pi}{2}$. But we may have four mirrors forming a wedge-shaped region, corresponding to the graph  . We may also take one (horizontal) mirror with three or four (vertical) mirrors all perpendicular to it; the graphs are then given by adding an isolated dot to each of (1. 32). These groups are, of course, infinite; but the really interesting infinite groups are those whose fundamental regions are finite polyhedra. Clearly, each dihedral angle of such a polyhedron must be a submultiple of π (namely $\frac{\pi}{2}$ or $\frac{\pi}{3}$ or $\frac{\pi}{4}$, etc.). The important thing to notice is that each angle is $\leqq \frac{\pi}{2}$.

Any polyhedron whose dihedral angles are all $\leqq \frac{\pi}{2}$ *is either a tetrahedron or a triangular prism or a rectangular parallelepiped.* To prove this, draw a sphere around any vertex of such a polyhedron, obtaining a spherical polygon whose angles are all $\leqq \frac{\pi}{2}$. We have seen that such a polygon can only be a triangle; hence the polyhedron has only trihedral vertices. Moreover, the sides of this triangle (regarded as lying on a sphere of unit radius) are face-angles of the polyhedron. But *if the angles of a spherical triangle are* $\leqq \frac{\pi}{2}$, *then also the sides are* $\leqq \frac{\pi}{2}$, since they are given by such formulae as

$$\cos c = \frac{\cos A \cos B + \cos C}{\sin A \sin B}.$$

Hence the face-angles are $\leqq \frac{\pi}{2}$, and the faces must be either triangles or rectangles. Now, if a polyhedron has only trihedral vertices, and its faces

[7]) W. Threlfall, Gruppenbilder. Abh. sächs. Akad. 41 Nr. 6 (1932), pp. 16, 26. For orthogonal projections of the actual cases, see Rouse Ball, Mathematical Recreations and Essays (eleventh edition, London 1939), p. 157. For stereographic projections, see Burnside, Theory of Groups (second edition, Cambridge 1911), pp. 405—407; Coxeter, Amer. Math. Monthly 45 (1938), pp. 522—525. When $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{1}{2}$, a group $[m, n]$ may be defined as operating in the hyperbolic plane, instead of on the sphere. The above formula for the order is no longer applicable; in fact it gives a negative value. The order is actually infinite, since the hyperbolic plane has an infinite area.

consist of F_3 triangles and F_4 rectangles ($F_3 \geqq 0$, $F_4 \geqq 0$), it must have $\frac{1}{2}(3F_3 + 4F_4)$ edges and $\frac{1}{3}(3F_3 + 4F_4)$ vertices, whence $\frac{1}{2}F_3$ and $\frac{1}{3}F_4$ are integers. By Euler's Theorem,

$$F_3 + F_4 - \tfrac{1}{6}(3F_3 + 4F_4) = 2,$$

that is,

$$\tfrac{1}{2}F_3 + \tfrac{1}{3}F_4 = 2.$$

The solution $F_3 = 4$, $F_4 = 0$ gives a tetrahedron; $F_3 = 2$, $F_4 = 3$ gives a triangular prism; and $F_3 = 0$, $F_4 = 6$ gives a rectangular parallelepiped.

We obtain the groups with prismatic fundamental regions (including the rectangular parallelepiped) by adding the symbol to each of (1. 32). On the other hand, if the fundamental region is a tetrahedron, each corner must form a trihedral angle of one of the types enumerated in (1. 33). In order to show that the only actual cases are

(1. 34)

or, in the other notation,

$$\square, \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad [4,\ 3,\ 4],$$

we may use Schläfli's formula

$$(1.35) \qquad \begin{vmatrix} 1 & -c_{12} & -c_{13} & -c_{14} \\ -c_{21} & 1 & -c_{23} & -c_{24} \\ -c_{31} & -c_{32} & 1 & -c_{34} \\ -c_{41} & -c_{42} & -c_{43} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

which relates the cosines ($c_{\mu\nu} = c_{\nu\mu}$) of the six dihedral angles of any tetrahedron.

Thorold Gosset has sent me the following elegant proof of this relation. Let A_1, A_2, A_3, A_4 denote the areas of the four faces (so that $c_{\mu\nu}$ is the cosine of the angle between the faces A_μ, A_ν). By projecting A_2, A_3, A_4 onto A_1, we obtain

$$A_1 = c_{12}A_2 + c_{13}A_3 + c_{14}A_4.$$

Thus

$$\begin{aligned} A_1 - c_{12}A_2 - c_{13}A_3 - c_{14}A_4 &= 0, \\ -c_{21}A_1 + A_2 - c_{23}A_3 - c_{24}A_4 &= 0, \\ -c_{31}A_1 - c_{32}A_2 + A_3 - c_{34}A_4 &= 0, \\ -c_{41}A_1 - c_{42}A_2 - c_{43}A_3 + A_4 &= 0. \end{aligned}$$

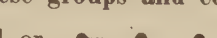
The desired result follows by eliminating the A_ν.

Precisely the same method of proof applies to the analogous formula for a simplex in Euclidean space of any number of dimensions. In two dimensions, as applied to a triangle A B C, it is equivalent to the formula

$$A + B + C = \pi.$$

§ 1. 4.

Abstract definitions for these groups and certain subgroups.

By (1. 21), the group $[m, n]$ or  has the abstract definition

(1. 41) $$R_1^2 = R_2^2 = R_3^2 = (R_1 R_2)^m = (R_1 R_3)^2 = (R_2 R_3)^n = 1.$$

Since each of these relations involves an even number of the R_ν, there is a subgroup of index two consisting of all products of even numbers of the R_ν. We denote this subgroup by $[m, n]'$; geometrically, it consists of all the *rotations* in $[m, n]$. It is generated by the two elements

$$S_1 = R_1 R_2, \quad S_2 = R_2 R_3,$$

which satisfy

(1. 411) $$S_1^m = S_2^n = (S_1 S_2)^2 = 1.$$

These relations constitute a complete definition for $[m, n]'$, since (1. 41) can be derived from them by adjoining an involutory element R_2 which transforms S_1 and S_2 into their inverses, and then defining $R_1 = S_1 R_2$, $R_3 = R_2 S_3$. Similarly, the infinite group Δ or

(1. 42) $$R_1^2 = R_2^2 = R_3^2 = (R_1 R_2)^3 = (R_1 R_3)^3 = (R_2 R_3)^3 = 1$$

has the rotational subgroup Δ', defined by

(1. 421) $$S_1^3 = S_2^3 = (S_1 S_2)^3 = 1.$$

We observe that $[2, n]' \sim [n]$. This is the *dihedral* group; $[3, 3]'$, $[3, 4]'$, $[3, 5]'$ are the *tetrahedral*, *octahedral*, and *icosahedral* groups, respectively [8]).

When n is even, $[m, n]$ has another subgroup of index two, say $[m', n]$, generated by S_1 and R_3. This is defined by

(1. 43) $$S_1^m = R_3^2 = (S_1^{-1} R_3 S_1 R_3)^{\frac{n}{2}} = 1;$$

for, $[m, n]$ can be derived from it by adjoining an involutory element R_1 (permutable with R_3) which transforms S_1 into its inverse, and then defining $R_2 = R_1 S_1$. We recognize $[3', 4]$ as the *pyritohedral* group; $[3', 6]$ and $[4', 4]$ are analogous infinite groups [9]).

[8]) W. Dyck, Math. Annalen **20** (1882), p. 34.

[9]) G. A. Miller, Amer. Journal of Math. **33** (1911), p. 368; Coxeter, Duke Math. Journal **2** (1936), pp. 66, 67.

When $m = 3$, the two elements $P = R_1 R_2 R_3$, $Q = R_3 R_2$ $(= S_2^{-1})$ generate $[3, n]$ itself in the form [10])

$$(1.44) \qquad Q^n = (PQ)^2 = (P^2 Q^2)^3 = (P^3 Q^2)^2 = 1.$$

Since each of these relations involves P an even number of times, the implied period of P must be even. Let us denote it by h. We shall see (in § 1. 7) that $h = 4, 6, 10, \infty$ according as $n = 3, 4, 5, 6$. Since $P^2 = S_1 S_2^{-1} S_1^{-1} S_2$, $\frac{h}{2}$ is the period of the commutator of the generators of $[3, n]'$ [11]). When $n = 3$, (1.44) is equivalent to

$$P^4 = Q^3 = (PQ)^2 = 1,$$

which shows that

$$[3, 3] \sim [3, 4]'.$$

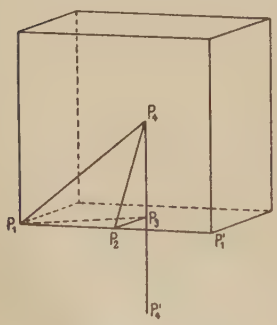
The fact that [3, 3] is a subgroup of index two in [3, 4] may also be seen by adjoining to [3, 3] an involutory element R_4 (permutable with R_2) which transforms R_3 into R_1. On substituting $R_4 R_3 R_4$ for R_1, we obtain the augmented group in the form

$$R_2^2 = R_3^2 = R_4^2 = (R_2 R_3)^3 = (R_2 R_4)^2 = (R_3 R_4)^4 = 1.$$

It may be shown similarly that, in the infinite group [4, 3, 4], defined by

$$(1.45) \qquad \begin{aligned} R_1^2 = R_2^2 = R_3^2 = R_4^2 &= (R_1 R_3)^2 = (R_1 R_4)^2 = (R_2 R_4)^2 \\ &= (R_1 R_2)^4 = (R_2 R_3)^3 = (R_3 R_4)^4 = 1, \end{aligned}$$

the reflections R_1 R_2 R_1, R_2, R_3, R_4 generate a subgroup $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$; in this, again,



the reflections $R_1 R_2 R_1$, R_2, R_3, $R_4 R_3 R_4$ generate a subgroup □. Thus the three groups (1. 34) are closely related.

Geometrically, [4, 3, 4] is the complete symmetry-group of the ordinary cubic lattice; in fact, the fundamental region is a tetrahedron $P_1 P_2 P_3 P_4$ where P_1 is a vertex of one of the cubes, P_2 is the mid-point of an edge, P_3 is the centre of a square face, and P_4 is the centre of the whole cube. Let P_1' be another vertex of the cube, chosen so that P_2 is the mid-point of $P_1 P_1'$; and let P_4' be the centre of another cube, chosen so that P_3 is the midpoint of $P_4 P_4'$. Then $P_1 P_1' P_3 P_4$ is the fundamental region of the subgroup $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, and $P_1 P_1' P_4' P_4$ is that of the subgroup □.

[10]) Coxeter, Proc. Camb. Phil. Soc. **32** (1936), p. 195.

[11]) Coxeter, Trans. Amer. Math. Soc. **45** (1939), p. 88.

Each of these groups has its rotational subgroup of index two. Thus

$R_1 R_2$, $R_2 R_3$, $R_3 R_4$ generate [12] $[4, 3, 4]'$,

$(R_1 R_2)^2$, $R_2 R_3$, $R_3 R_4$ generate $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}'$,

$(R_1 R_2)^2$, $R_2 R_3$, $(R_3 R_4)^2$ generate $\square'$.

The pyritohedral group may be said to have three infinite analogues, each a subgroup of index two in $[4, 3, 4]$:

$R_1 R_2$, $R_2 R_3$, R_4 generate $[(4, 3)', 4]$,

R_1, $R_2 R_3$, R_4 generate $[4, 3', 4]$,

$R_1 R_4$, R_2, R_3 generate $[4', 3, 4']$.

In the last of these, the rotary reflections $R_2 R_1 R_4$, $R_1 R_4 R_3$ generate a subgroup which is denoted by [13] $(4, 4 \mid 3, 3)$ because of its remarkably concise definition:

$$R^4 = S^4 = (RS)^3 = (R^{-1} S)^3 = 1. \tag{1. 46}$$

Further groups, in which $[4, 3, 4]$, $[4, 3, 4]'$, $[4, 3', 4]$, $[4', 3, 4']$, $\square$, $\square'$ occur as subgroups of index two, can be derived by adjoining an involutory element T (geometrically, the rotation through π about the join of the midpoints of the edges $P_1 P_4$, $P_2 P_3$ of the tetrahedron $P_1 P_2 P_3 P_4$), which transforms R_1, R_2, R_3, R_4 into R_4, R_3, R_2, R_1. Thus

R_1, T, R_3 generate $[[4, 3, 4]]$,

$R_1 R_2$, T, $R_2 R_3$ generate $[[4, 3, 4]]'$,

R_1, T, $R_2 R_3$ generate $[[4, 3', 4]]$,

$R_1 R_4$, T, R_2 generate $[[4', 3, 4']]$ or [14] $G^{4,6,6}$,

$R_1 R_2 R_1$, T, R_2 generate $[\square]$,

$(R_1 R_2)^2$, T, $R_2 R_3$ generate $[\square]'$.

In $[[4, 3, 4]]$, the rotary reflections $R_1 T$, $T R_3$ generate a subgroup $(4, 6 \mid 2, 4)$, with a definition analogous to (1. 46) [15]. Similarly, the elements $R_1 R_2 R_1 T$, $T R_2$ of $[\square]$ generate $(6, 6 \mid 2, 3)$. Finally, there are two interesting subgroups of index two in $[[4', 3, 4']]$:

$R_1 R_4$, $T R_2$ generate $(2, 6, 6; 2)$, which is defined by

$$U^2 = V^6 = (UV)^6 = (UV^{-1} UV)^2 = 1;$$

and $R_1 R_4 T$, $T R_2$ generate the analogous group $(2, 6, 4; 3)$.

---

[12]) See J. A. Todd, Proc. Camb. Phil. Soc. **27** (1931), p. 217, where these generators are called T_1, T_2, T_3.

[13]) Coxeter, Trans. Amer. Math. Soc. **45** (1939), p. 81.

[14]) Ibid., pp. 119, 125.

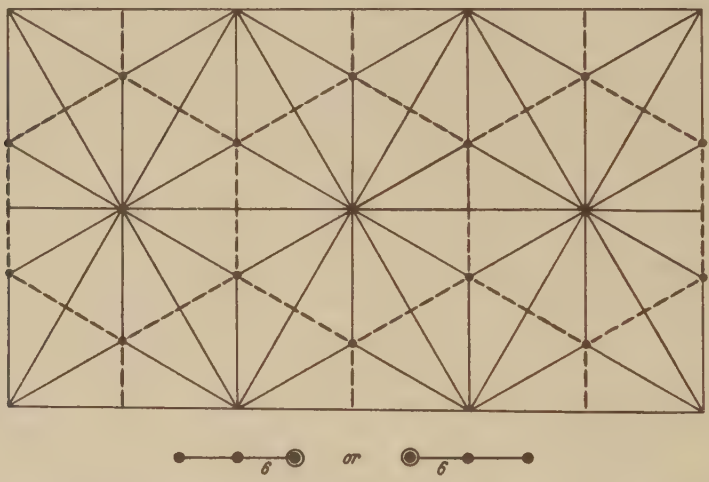
[15]) Coxeter, Duke Math. Journal **2** (1936), p. 73.

We have now found generators for 20 of the 230 space-groups of crystallography. Continuing thus, we should be able to derive the rest of the 36 space-groups in the cubic system; but we have already gone far enough for our main purpose, which is to point the analogy to the finite groups in four dimensions.

§ 1. 5.

Wythoff's construction for uniform polyhedra.

Möbius [16]) drew several diagrams to show the set of all transform of a point under an extended polyhedral group $[m, n]$. The points so obtained are the vertices of an edge-reflexible polyhedron, which is uniform if the initial point is suitably located. This construction was generalized in a very fruitful manner by W. A. Wythoff [17]); therefore I have named it after him.



The unextended group $[m, n]'$ leads similarly [18]) to a polyhedron which, though not in general edge-reflexible, is again uniform for a suitable position of the initial point. The infinite groups (1. 32) lead analogously to polygonal plane-fillings or *tessellations*, which may be regarded as infinite polyhedra [19]).

---

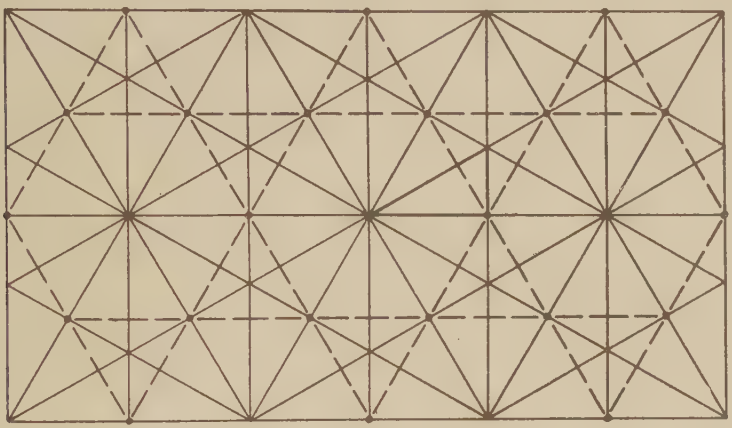
[16]) Gesammelte Werke **2** (1886), pp. 661, 677, 691.

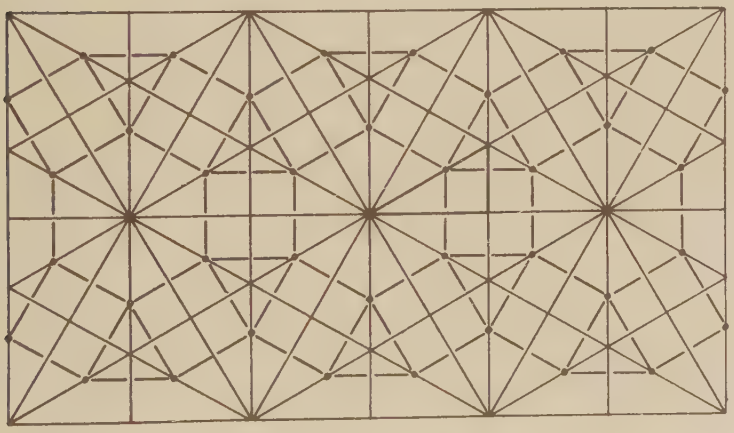
[17]) Proc. Royal Acad. of Sci., Amsterdam **20** (1918), pp. 966—970.

[18]) Möbius, loc. cit., pp. 656, 669, 688.

[19]) Kepler, Opera omnia, 5, pp. 117—119 (Figs. D, E, F, L, N, P, S, V, Mm, Ii); Badoureau, Journal de l'École Polytech. **49** (1881), p. 93 (Figs. 61—66); Andreini, Mem. della Soc. ital. delle Sci. (3) **14** (1905), pp. 3—8 (Figs. 1—8, 9′, 10). Badoureau (through an error on p. 88) omitted Kepler's tessellation L or $3^4.6$ or $s\begin{Bmatrix}3\\6\end{Bmatrix}$, and was copied by several later authors.

The representation of the groups by graphs provides useful symbols for the polyhedra. The position of the initial point is indicated by drawing a ring around one or more of the dots in the graph. When the fundamental region is a (plane or spherical) triangle, the three dots originally symbolize its sides,



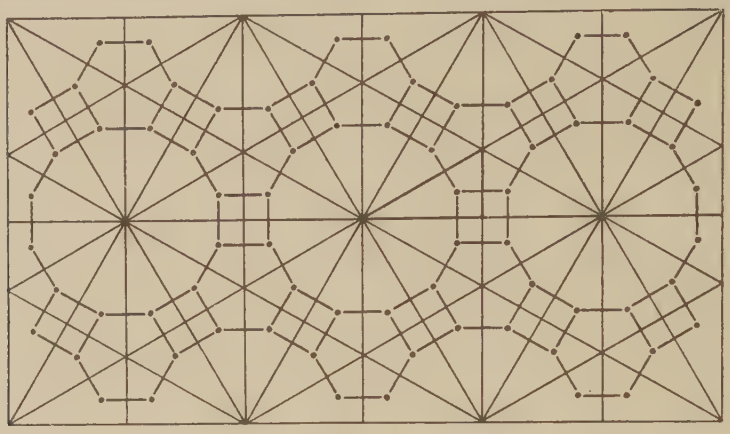


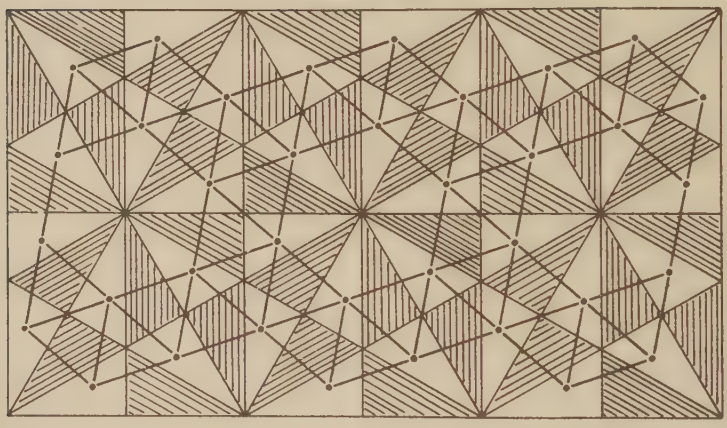
but can just as well be regarded as symbolizing the respectively opposite vertices.

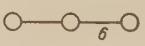
In the following four illustrations, the fundamental region is a triangle of angles $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$, and the derived (infinite) polyhedra are drawn in broken lines.

The polyhedron whose vertices are the transforms of a *vertex* of the triangle, is indicated by ringing the corresponding dot in the graph.

The polyhedron whose vertices are the transforms of a point lying on a *side* of the triangle, is indicated by ringing two dots. In order that the







edges of the polyhedron may be all equal, the chosen point must be equidistant from the two mirrors on which it does not lie; that is, its position, on the indicated side of the triangle, is determined as lying on the bisector of the opposite angle.

In both these cases, it is immaterial whether we use the group generated by reflections, or its rotational subgroup of index two.

The polyhedron whose vertices are the transforms, under the group generated by reflections, of a point lying *within* the triangle, is indicated by ringing all three dots. The chosen point now has to be equidistant from all three mirrors, i. e. at the in-centre of the triangle.

Finally, the polyhedron whose vertices are the transforms, under the rotational subgroup, of a point lying within the triangle, is indicated by removing the dots [20]) from this last symbol, leaving just the rings and the links. In this case the chosen point, say Q, is generally not at the in-centre, but is determined by the relations

$$\mathrm{AQ} \sin A = \mathrm{BQ} \sin B = \mathrm{CQ} \sin C$$

if the fundamental region ABC is a *plane* triangle, or

$$\sin \mathrm{AQ} \sin A = \sin \mathrm{BQ} \sin B = \sin \mathrm{CQ} \sin C$$

if it is a *spherical* triangle. We may recall, for the sake of comparison, that the corresponding relations for the in-centre, P, are

$$\mathrm{AP} \sin \frac{A}{2} = \mathrm{BP} \sin \frac{B}{2} = \mathrm{CP} \sin \frac{C}{2}$$

or

$$\sin \mathrm{AP} \sin \frac{A}{2} = \sin \mathrm{BP} \sin \frac{B}{2} = \sin \mathrm{CP} \sin \frac{C}{2}.$$

Thus Q cannot coincide with P unless

$$A = B = C \quad \left(= \frac{\pi}{3} \quad \text{or} \quad \frac{\pi}{2}\right).$$

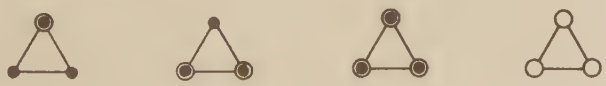
It is sometimes convenient to denote each uniform polyhedron by a symbol consisting of the numbers of sides of the various faces that surround a vertex, in their proper cyclic order. In this notation, the tessellations drawn above (in broken lines) are:

$$6.\,6.\,6, \quad 3.\,6.\,3.\,6, \quad 3.\,4.\,6.\,4, \quad 4.\,6.\,12, \quad 3.\,3.\,3.\,3.\,6.$$

The first two and the last of these are naturally abbreviated to

$$6^3, \quad (3.\,6)^2, \quad 3^4.\,6.$$

Similarly, the tessellations



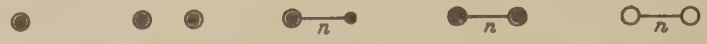
are

$$3^6, \quad (3.\,6)^2, \quad 6^3, \quad \text{and again} \quad 3^6.$$

---

[20]) This process can be thought of as "removing the reflections."

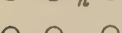
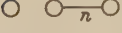
The analogous construction with only one or two mirrors (instead of three) leads to the symbols



for a line-segment, a square, an n-gon, a 2 n-gon, and again an n-gon ($n \geqq 3$).

The special virtue of this symbolism is that the symbol for a polyhedron contains the symbols for the various kinds of face.

The reader will have no difficulty in verifying that the groups $[m, n]$ and $[m, n]'$ lead to the following polyhedra:

	4^3	or $\{4, 3\}$,	the cube;
	3^3	„ $\{3, 3\}$,	the regular tetrahedron;
	$4^2 \cdot n$	„ $\{\} \times \{n\}$	the n-gonal prism;
	$4^2 \cdot 2n$	„ $\{\} \times \{2n\}$;	
	$3^3 \cdot n$	„ $s\left\{\begin{smallmatrix}2\\n\end{smallmatrix}\right\}$,	the n-gonal antiprism;
	m^n	„ $\{m, n\}$,	the general regular polyhedron;
	$(m \cdot n)^2$	„ $\left\{\begin{smallmatrix}m\\n\end{smallmatrix}\right\}$	(described later);
	$(2m)^2 \cdot n$	„ $t\{m, n\}$	the "truncated $\{m, n\}$";
	$m \cdot 4 \cdot n \cdot 4$	„ $r\left\{\begin{smallmatrix}m\\n\end{smallmatrix}\right\}$	the "rhombi-$\left\{\begin{smallmatrix}m\\n\end{smallmatrix}\right\}$";
	$4 \cdot 2m \cdot 2n$	„ $t\left\{\begin{smallmatrix}m\\n\end{smallmatrix}\right\}$	the "truncated $\left\{\begin{smallmatrix}m\\n\end{smallmatrix}\right\}$";
	$3^2 \cdot m \cdot 3 \cdot n$	„ $s\left\{\begin{smallmatrix}m\\n\end{smallmatrix}\right\}$.	

This list includes all the finite uniform polyhedra, with several repetitions, and all the uniform tessellations except $3^3 \cdot 4^2$ (whose symmetry group is not generated by reflections alone, nor by rotations alone [21]).

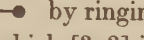
The symbol $\left\{\begin{smallmatrix}m\\n\end{smallmatrix}\right\}$ includes the *cuboctahedron* $\left\{\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}\right\}$ and the *icosidodecahedron* $\left\{\begin{smallmatrix}3\\5\end{smallmatrix}\right\}$. The *prism* is denoted by $\{\} \times \{n\}$, as being the "rectangular product" of the line-segment $\{\}$ and the n-gon $\{n\}$. In the same notation, the *square*

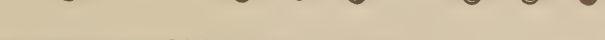
[21]) See Badoureau's Fig. 67, or Andreini's Fig. 9. It is conceivable that *finite* polytopes of this exceptional kind may occur in higher space; but none has ever been discovered.

could be called $\{\} \times \{\}$, and the *cube* $\{\} \times \{\} \times \{\}$. The symbol $s\left\{\begin{smallmatrix}2\\n\end{smallmatrix}\right\}$ for the *antiprism* is based on analogy with the *snub cube* [22]) $s\left\{\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}\right\}$ and the *snub dodecahedron* [22]) $s\left\{\begin{smallmatrix}3\\5\end{smallmatrix}\right\}$.

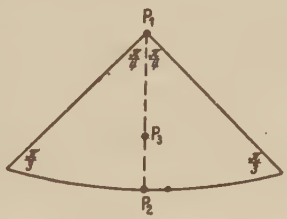
The extended polyhedral group $[3, n]$ ($n = 4$ or 5) is the whole symmetry-group of each of the seven polyhedra

$$\{3, n\}, \quad \left\{\begin{smallmatrix}3\\n\end{smallmatrix}\right\}, \quad \{n, 3\}, \quad t\{3, n\}, \quad r\left\{\begin{smallmatrix}3\\n\end{smallmatrix}\right\}, \quad t\{n, 3\}, \quad t\left\{\begin{smallmatrix}3\\n\end{smallmatrix}\right\},$$

whose graphical symbols are derived from  by ringing one, two, or all three dots. But the only uniform polyhedra of which $[3, 3]$ is the whole symmetry-group are $\{3, 3\}$ and $t\{3, 3\}$. For, the three polyhedra



have an extra symmetry, which can be observed as a symmetry of the graphical symbols; in fact, the fundamental region of $[3, 3]$ is an isosceles triangle, and the typical vertex (P_1 or P_2 or P_3) lies on the symmetrical median. By adding the reflection in this median we enlarge the group $[3, 3]$ to $[3, 4]$. These three polyhedra are thus the same as



(the octahedron, the cuboctahedron, and the truncated octahedron).

Similarly $[3, n]'$ ($n = 4$ or 5) is the whole symmetry-group of $s\left\{\begin{smallmatrix}3\\n\end{smallmatrix}\right\}$, but $s\left\{\begin{smallmatrix}3\\3\end{smallmatrix}\right\}$ is the icosahedron.

§ 1. 6.

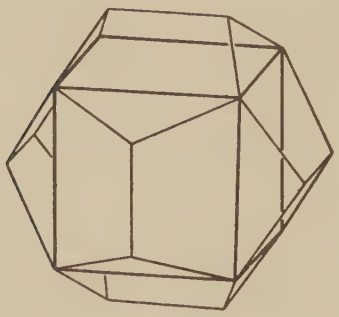
The pyritohedral group.

Kepler [23]) observed that the eight vertices of a cube can be selected from the twenty vertices of the dodecahedron, one edge of the cube lying in each of the twelve faces of the dodecahedron. It follows by reciprocation that eight of the twenty faces of the icosahedron lie in the planes of the faces of an

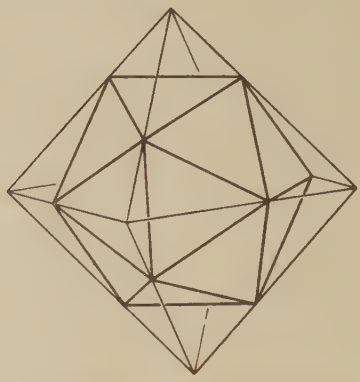
[22]) These, as the symbols indicate, would have been more happily termed "snub cuboctahedron" and "snub icosidodecahedron".

[23]) Kepler, Opera omnia 5, p. 271.

octahedron [24]) whose twelve edges pass respectively through the twelve vertices of the icosahedron.



Cube and dodecahedron.



Icosahedron and octahedron.

The vertices of the octahedron may be supposed to have Cartesian coordinates

$$(\pm 1, 0, 0), \quad (0, \pm 1, 0), \quad (0, 0, \pm 1).$$

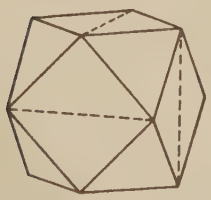
Its edges are divided in the ratio $a : b$ by the points

$$(\pm a, \pm b, 0), \quad (0, \pm a, \pm b), \quad (\pm b, 0, \pm a).$$

These are the vertices of a regular icosahedron [25]) provided the point $(a, b, 0)$ is equidistant from $(a, -b, 0)$ and $(0, a, b)$, that is, provided $\frac{a}{b}$ is the positive root of the equation

$$\tau^2 - \tau - 1 = 0,$$

namely $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. (The negative root gives analogously the *great icosahedron* $\left\{3, \frac{5}{2}\right\}$, which has the same vertices as a larger $\{3, 5\}$.)



Mrs. A. Boole Stott has pointed out that, if we divide the edges of the octahedron in any ratio (the same for all, so that each face has an inscribed equilateral triangle), we obtain in general an irregular icosahedron with edges of two different lengths. Of the twenty triangular faces, eight are equilateral and twelve isosceles. From this point of view, the cuboctahedron which results from taking the ratio 1 : 1 is to be regarded as a partially degenerate icosahedron, one diagonal of each square being the common base of two isosceles triangles which have come to lie in one plane.

---

[24]) Poinsot, Cauchy, Bertrand, Cayley, Abhandlungen über die regelmäßigen Sternkörper (Leipzig 1906), p. 61.

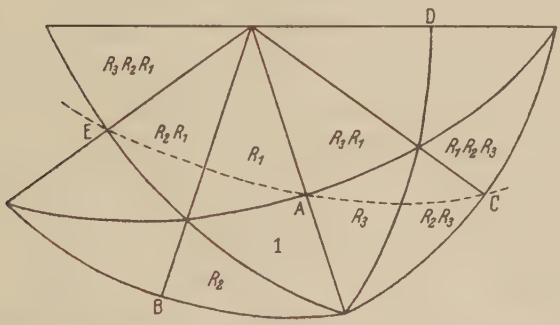
[25]) P. H. Schoute, Mehrdimensionale Geometrie 2 (Leipzig 1905), p. 158.

The symmetry-group of the figure composed of the octahedron with its inscribed icosahedron, is not [3, 4], since it lacks the reflection which reverses an edge of the octahedron. But it contains the trigonal rotations of the octahedral group (which generate the tetrahedral group) and the reflections that interchange pairs of opposite vertices of the octahedron. It is therefore the pyritohedral group [3′, 4], generated by the operations $R_1\ R_2$ and R_3 of [3, 4]. (See (1. 43). Of course this is also symmetry-group of the reciprocal figure composed of the cube with its circumscribed dodecahedron.)

The cube inscribed in the dodecahedron is one of five such cubes (in the same dodecahedron); reciprocally, five octahedra can be circumscribed to a given icosahedron. The permutations of the five cubes (or of the five octahedra) provide a very clear demonstration of the simple isomorphism between the icosahedral group [3, 5]′ and the alternating group of degree five[26]).

§ 1. 7.

The period of $R_1\ R_2\ R_3$ in $[m, n]$.



The above diagram shows five vertices of the polyhedron $\left\{\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\}$ as derived by Wythoff's construction from a network of spherical triangles of angles $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}$. The triangles are named after the corresponding operations of the group $[m, n]$, the first triangle (fundamental region) being named 1. To construct $\left\{\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\}$ we take the vertex A at the right angle of triangle 1, and derive the adjacent vertices B, C, D, E by reflecting in the hypotenuses of the four triangles (1, R_3, $R_3\,R_1$, R_1) which surround A. Since the whole figure is symmetrical under the rotation through π about A (namely the operation $R_3\,R_1$), the points E, A, C lie on a great circle. The operation $R_1\ R_2\ R_3$, which carries E to A, and A to C, is a rotary reflection, consisting of the rotation from EA to AC combined with the reflection in this great circle.

---

[26]) F. Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder (Leipzig 1884), p. 19.

Suppose that h arcs such as EA or AC make up the whole great circle. Then the period of $R_1 R_2 R_3$ is h or $2h$ according as h is even or odd. (The latter possibility occurs only in the trivial case when $m = 2$ and n is odd.)

Let us now join the five points A, B, C, D, E by straight lines, so that EAB ... is an m-gon, BAC ... is an n-gon, and EAC ... is an h-gon. Then

$$EB = 2a\cos\frac{\pi}{m}, \quad BC = 2a\cos\frac{\pi}{n}, \quad EC = 2a\cos\frac{\pi}{h},$$

where $a = AB\,(= AC = AD = AE)$. But, since BCDE is a rectangle,

$$EC^2 = EB^2 + BC^2.$$

Hence

$$\cos^2\frac{\pi}{h} = \cos^2\frac{\pi}{m} + \cos^2\frac{\pi}{n}. \tag{1.71}$$

By considering the analogous tessellations, we see that this formula continues to hold when $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$. The results are tabulated below.

m	2	3	3	3	3	4
n	n	3	4	5	6	4
h	n	4	6	10	∞	∞

The equation (1.71) has an application in the theory of regular star-polyhedra [27]). Moreover, if $m > 2$ and $n > 2$ (so that the graph is connected), the total number of reflections is $\frac{3h}{2}$. Comparison with the analogous results in higher space [28]) shows that this expression is not purely fortuitous, although no explanation for it has yet been found.

But the most important application of (1.71) is in connection with the central inversion. The operation $(R_1 R_2 R_3)^{\frac{h}{2}}$, which carries the arc AC to its antipodal position, is either the central inversion or a rotation through π, according as it involves an odd or even number of reflections, that is, according as $\frac{h}{2}$ is odd or even. If $m > 2$ and $n > 2$, the reflection in the great circle EAC does not belong to the group; therefore the central inversion belongs *only* when $\frac{h}{2}$ is odd, and is then given by the formula

$$Z = (R_1 R_2 R_3)^{\frac{h}{2}}.$$

---

[27]) Coxeter, Proc. Camb. Phil. Soc. **27** (1931), p. 203.

[28]) Coxeter, Annals of Math. **35** (1934), p. 610.

Since the central inversion belongs to $[3, n]$ ($n = 4$ or 5) but not to the rotation group $[3, n]'$, the former group is the direct product of the latter with the group of order two generated by Z; thus we may write

$$[3, n] \sim [1] \times [3, n]' \qquad (n = 4 \text{ or } 5). \tag{1.72}$$

Moreover, Z occurs in the pyritohedral group (see § 1. 4) as $(S_1 R_3)^3$; hence

$$[3', 4] \sim [1] \times [3, 3]'. \tag{1.73}$$

Since $[3, 3]'$ and $[3, 4]'$ are the alternating and symmetric groups of degree four, while $[3, 5]'$ is the alternating group of degree five, it follows that $[3', 4]$ is a subgroup in both $[3, 4]$ and $[3, 5]$. (See § 1. 6).

§ 1. 8.

An explanation for Pappus' observation on reciprocal regular polyhedra.

Pappus noticed that, when two reciprocal regular solids of the same in-radius (and therefore the same circum-radius) stand side by side on a horizontal plane, the manner in which the vertices are distributed in horizontal planes is the same for both: the planes are the same, and the numbers of vertices in each plane are proportional [29]). The situation is similar when we compare the "semi-reciprocal" solids $\{m, n\}$ and $\left\{\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\}$, so placed that two opposite edges of the former lie in the same planes as two opposite n-gons of the latter. (Thus the vertices of the dodecahedron, distributed as $2 + 4 + 2 + 4 + 2 + 4 + 2$, lie in the same planes as the vertices of the icosidodecahedron, distributed as $3 + 6 + 3 + 6 + 3 + 6 + 3$.) Wythoff's construction provides a general explanation for these apparently fortuitous results.

Let P, Q be any two points of the sphere on which the group $[m, n]$ operates. Then *the distances from* P *to all the transforms of* Q *are equal (in some order) to the distances from* Q *to all the transforms of* P. For, any operation S of the group transforms the points P, QS^{-1} into the points PS, Q.

Consider two reciprocal solids, $\{m, n\}$ and $\{n, m\}$, derived by Wythoff's construction from the same network of spherical triangles. Let P be any vertex of the former, Q of the latter, so that the transforms of P coincide in sets $2n$ at all the vertices of $\{m, n\}$ while those of Q coincide in sets of $2m$ at the vertices of $\{n, m\}$. When we regard P as lying vertically below the centre, the vertices of $\{n, m\}$ are distributed in horizontal planes according to their distances from P; and when instead we regard Q as lying vertically below the centre, we get the analogous distribution of the vertices of $\{m, n\}$. A similar argument applies to the comparison of $\{m, n\}$ and $\left\{\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\}$, the transforms of any one vertex of the latter coinciding in sets of four at all the vertices.

---

[29]) Pappus of Alexandria, Book III, Props. 54—58.

The nature of the above proof makes it clear that analogous results will hold in any number of dimensions.

§ 1. 9.

Uniform space-fillings.

The best way to acquire a clear idea of the appearance of polytopes in four dimensions is to examine first the analogous infinite figures ("solid tessellations") which consist of polyhedral solids fitting together to fill the whole three-dimensional space. Such a space-filling is said to be *uniform* if it has the following two properties:

(i) the solids are uniform polyhedra,

(ii) there is a group of motions (with or without reflections) which is transitive on the vertices.

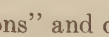
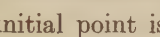
These figures have been almost exhaustively enumerated by Andreini [30]), who gives excellent stereoscopic photographs of portions of them. Although there are a few anomalous space-fillings [31]) analogous to the plane-filling $3^3 \cdot 4^2$, we shall restrict consideration to those uniform space-fillings which are derivable (from infinite groups generated by reflections) by Wythoff's construction. We also exclude, as trivial, those cases in which the fundamental region is infinite (namely a wedge, or an infinitely tall prism), that is, we exclude those cases in which the graphical symbol falls into two disconnected pieces, of which one represents a finite group and the other an infinite group.

If the graphical symbol is disconnected at all, the fundamental region is a finite prism; and the initial point, which is to be a typical vertex of the space-filling, may be taken either in one of the two basal planes or half-way between them. In the former case we put a ring around one dot in the symbol , and in the latter case around both dots. The position of the point in its plane is determined by the arrangement of rings in the remaining piece of the disconnected graph. For instance, the symbol

represents the obvious space-filling of hexagonal prisms, the fundamental region being an equilateral triangular prism with the initial point at its centre. (In order that the vertical and horizontal edges of the space-filling may be equal, the vertical and horizontal edges of this triangular prism must be in

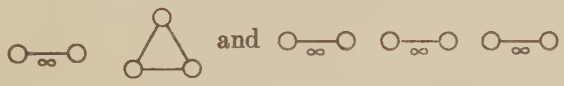
[30]) Mem. della Soc. ital. delle Sci. (3) **14** (1905), pp. 75—129.

[31]) Coxeter, Proc. London Math. Soc. (2) **34** (1931), pp. 183—184.

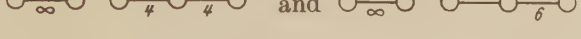
the ratio $1 : \sqrt{3}$). Clearly, the same space-filling is represented if we replace the first piece of the symbol by  (and halve height of the triangular prism), or again if we replace the other piece by or by  . As a "rectangular product" this space-filling is $\{\infty\}\times\{6,3\}$. Wythoff's construction gives all such products except

$$\{\infty\} \times s\begin{Bmatrix}3\\6\end{Bmatrix}, \quad \{\infty\} \times s\begin{Bmatrix}4\\4\end{Bmatrix}, \quad \{\infty\}\times (3^3.4^2).$$

If we "remove the reflections" and consider only the rotational subgroup of index two, the initial point is determined in the fundamental region by the fact that its distances from the edges are inversely proportional to the sines of the corresponding dihedral angles. Consequently, if the fundamental region is a prism, it must be either an equilateral triangular prism (with vertical and horizontal edges in the ratio $\sqrt{2} : \sqrt{3}$) or a cube; for, the points P and Q of page 393 must coincide. Thus the symbols

(1. 91) 

represent uniform space-fillings (of tetrahedra and octahedra in both cases, but differently arranged [32]), although



do not.

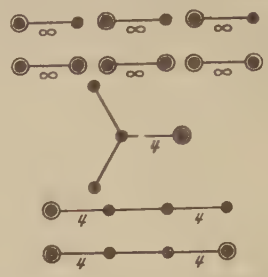
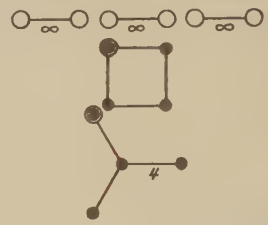
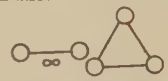
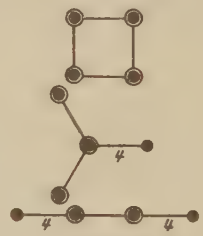
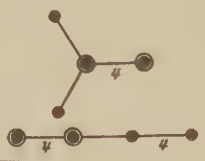
If the graphical symbol is connected, the fundamental region is tetrahedral, and we have one of the three groups (1. 34). The four dots symbolize the faces of the tetrahedron, or equally well the respectively opposite vertices. Analogy with the two-dimensional case makes it unnecessary to explain in detail what space-fillings are symbolized when we put rings around one, two, three, or all four dots. In order that the edges may be all equal, the initial point has to be equidistant from any two faces whose corresponding dots are ringed; in particular, it has to be at the in-centre of the tetrahedron when all four dots are ringed. Clearly, the symbol for each space-filling contains the symbols for the various solids that occur.

It seems best to postpone till § 2. 7 the proof that no uniform space-fillings, apart from those already mentioned, arise by considering rotational subgroups.

We are now ready to symbolize (sometimes in several different ways) all Andreini's uniform space-fillings.

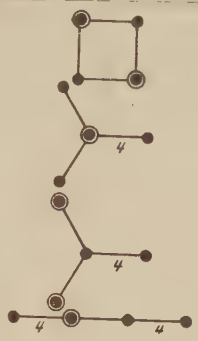
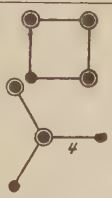
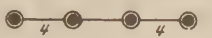
---

[32]) The vertices are the centres of the spheres in "hexagonal" and "spherical" close-packing, respectively.

Andreini's figure	Solids at each vertex	Graphical Symbol (Alternatives)	Abbreviated symbol [33]
(The ordinary cubic lattice)	8 cubes		δ_4
12	8 tetrahedra 6 octahedra		$h\,\delta_4$
13	8 tetrahedra 6 octahedra		
14	4 truncated octahedra		$t_{1,2}\,\delta_4$
15	2 tetrahedra 6 truncated tetrahedra		$q\,\delta_4$
17 [34]	1 octahedron 4 truncated cubes		$t_{0,1}\,\delta_4$

[33]) Coxeter, Phil. Trans. Royal Soc. London (A) **229** (1930), pp. 344, 365, 360. The symbol δ_4 means the solid tessellation of cubes, regarded as a degenerate four-dimensional polytope; $h\,\delta_4$ and $q\delta_4$ stand for "half δ_4" and "quarter δ_4", since $q\delta_4$ has half the vertices of $h\delta_4$, which in turn has half the vertices of δ_4; $t_{0,1}$, δ_4, $t_1\,\delta_4$, $t_{1,2}\,\delta_4$ are "truncations", finite analogues of which will be described in § 2. 4. The remaining symbols are natural generalizations of these.

[34]) Fig. 16 is not uniform.

Andreini's figure	Solids at each vertex	Graphical Symbol (Alternatives)	Abbreviated symbol
18	2 octahedra 4 cuboctahedra		$t_1\,\delta_4$
19	1 tetrahedron 1 cube 3 rhombicuboctahedra		$h_{3}\,\delta_4$
20	2 cubes 1 cuboctahedron 2 rhombicuboctahedra		$t_{0,2}\,\delta_4$
21	1 cube 1 truncated octahedron 2 truncated cuboctahedra		$t_{0,1,2}\,\delta_4$
22	1 cube 2 octagonal prisms 1 truncated cube 1 rhombicuboctahedron		$t_{0,1,3}\,\delta_4$
23	1 truncated tetrahedron 1 truncated cube 2 truncated cuboctahedra		$h_{2,3}\,\delta_4$
24	1 cuboctahedron 2 truncated tetrahedra 2 truncated octahedra		$h_2\,\delta_4$
24^{bis}	2 octagonal prisms 2 truncated cuboctahedra		$t_{0,1,2,3}\,\delta_4$

Whenever a space-filling is derived from the whole group generated by reflections (and not merely from the rotational subgroup), the number of each type of solid at a vertex is easily deduced from the graphical symbol. By removing all the ringed dots, and any links which emanate from them, we derive the symbol for the group which leaves one vertex invariant. (If all the dots are ringed, we are left with the null graph, which represents the group of order one.) By removing all the ringed dots from the symbol for one of the solids, we derive the symbol for the group which leaves invariant both this solid and one of its vertices. The number of such solids at a vertex is clearly equal to the index of the latter subgroup in the former.

Consider, for example, the symbol

Here the group which keeps one vertex fixed is of order four, being represented by two isolated dots. The solids are truncated octahedra of the two "types":

The group which keeps fixed both a solid and one of its vertices, is of order two, being represented by a single dot. The index of the latter group in the former is two, showing that the vertex is surrounded by two truncated octahedra of either type, that is, by four altogether.

Clearly, [4, 3, 4] is the whole symmetry-group of δ_4, $t_{0,1}\,\delta_4$, $t_1\,\delta_4$, $t_{0,2}\,\delta_4$, $t_{0,1,2}\delta_4$ and $t_{0,1,3}\delta_4$; [[4,3,4]], of $t_{1,2}\,\delta_4$ and $t_{0,1,2,3}\,\delta_4$; $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, of $h\,\delta_4$, $h_3\delta_4$, $h_{2,3}\,\delta_4$, $h_2\,\delta_4$; and $[\square]$, of $q\,\delta_4$.

Appendix:

On Cayley group-pictures.

The idea of representing the operations of any group by the points of a graph has been proposed by both Cayley and Dehn [35]). Every line of the graph is directed and is made to correspond to a definite generator of the group. (Cayley does this by colouring the lines, with different colours for the different generators.) At each point there are two lines for each generator, one directed towards the point and one directed away. Given any operation of the group, expressed in terms of the generators, we may start out from any

[35]) See W. Burnside, Theory of Groups (Cambridge 1911), pp. 423—427; W. Threlfall, Gruppenbilder (Leipzig 1932), pp. 22—27; W. Gruner, Comm. Math. Helv. **10** (1938), p. 53.

one point of the graph and proceed along a representative path to some other (definite) point. Any different path between the same two points will represent some other expression for the same operation. Hence each relation in the abstract definition for the group will be represented by a closed path.

Whenever we have an involutory generator, the corresponding pairs of lines may be replaced by single lines along which both directions are allowed. For instance, a hexagon of such undirected lines represents the dihedral group [3], defined by

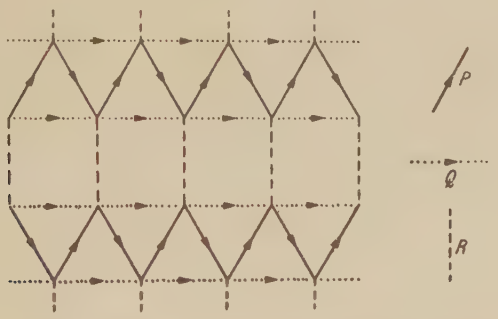
$$R_1^2 = R_2^2 = (R_1 R_2)^3 = 1.$$

On the other hand, a hexagon of cyclically directed lines represents the cyclic group [6]′, defined by

$$S^6 = 1.$$

In many cases the graph may be taken to consist of the vertices and edges of a polyhedron. Burnside's frontispiece shows the snub cube, $s\left\{\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}\right\}$, as a group-picture for the octahedral group [3, 4]′. The polyhedron being simply-connected, its different faces (together with any edge along which both directions are allowed) provide the generating relations for an abstract definition. For instance, the anomalous tessellation $3^3 \cdot 4^2$ represents the infinite group

$$P^2 = Q, \quad R^2 = 1, \quad QR = RQ.$$



The following table shows that *every uniform polyhedron and tessellation, except the dodecahedron* $\{5, 3\}$ *and the icosidodecahedron* $\left\{\begin{smallmatrix}3\\5\end{smallmatrix}\right\}$, *can be regarded as a Cayley group-picture* (sometimes of two distinct groups, by directing the edges differently)[36]).

[36]) This fact was partially recognized by Maschke, Amer. Journ. of Math. **18** (1896), pp. 156—194. His Figs. 2—10, 16—18 are respectively $\{\}\times\{n\}$, $t\{3,3\}$, $r\left\{\begin{smallmatrix}3\\3\end{smallmatrix}\right\}$, $t\{3,4\}$, $t\{4,3\}$, $r\left\{\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}\right\}$, $t\{3,5\}$, $t\{5,3\}$, $r\left\{\begin{smallmatrix}3\\5\end{smallmatrix}\right\}$, $\{\}\times\{2n\}$, $t\left\{\begin{smallmatrix}3\\3\end{smallmatrix}\right\}$, $t\left\{\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}\right\}$.

Group	Abstract definition	Cayley group-picture (See page 394)
$[m, n]$	(1.41)	$t\begin{Bmatrix} m \\ n \end{Bmatrix}$
$[1] \times [n]$	(The same with $m = 2$)	$\{\} \times \{2\,n\}$
$[m, n]'$	$S_1^m = S_2^n = (S_1 S_2)^2 = 1$	$r\begin{Bmatrix} m \\ n \end{Bmatrix}$
$[n]$	(The same with $m = 2$)	$\{\} \times \{n\}$
$[m, n]'$	$S_2^n = S_0^2 = (S_2 S_0)^m = 1$	$t\{m, n\}$
$[m, n]'$	$S_0^2 = S_1^m = S_2^n = S_0 S_1 S_2 = 1$	$s\begin{Bmatrix} m \\ n \end{Bmatrix}$
$[n]$	(The same with $m = 2$)	$s\begin{Bmatrix} 2 \\ n \end{Bmatrix}$
$[m', 2\,p]$	$S^m = R^2 = (S^{-1} R S R)^p = 1$	$t\{2\,p, m\}$
Δ	(1.42)	$\{6, 3\}$
Δ'	$S_1^3 = S_2^3 = (S_1 S_2)^3 = 1$	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 6 \end{Bmatrix}$
Δ'	$S_0^3 = S_1^3 = S_2^3 = S_0 S_1 S_2 = 1$	$\{3, 6\}$

The cube is included as $\{\} \times \{4\}$, the tetrahedron as $s\begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix}$, the octahedron as $s\begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$, the icosahedron as $s\begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \end{Bmatrix}$, the cuboctahedron as $r\begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \end{Bmatrix}$, and the square tessellation as $r\begin{Bmatrix} 4 \\ 4 \end{Bmatrix}$.

The first two lines of the above table illustrate the following general principle. The Cayley group-picture for any group generated by reflections naturally has one vertex in each region (§ 1. 2), so we can think of it as consisting of the vertices and edges of the polytope symbolized by ringing all the dots of the graph (§ 1. 5). In other words, the network of regions and the Cayley group-picture are dual complexes. The generators being involutory, there is no question of directing the edges of the polytope: both directions are allowed along every edge. Thus, in the notation of § 1. 9, the space-fillings δ_4, $t_{1,2}\,\delta_4$, $t_{0,1,2}\,\delta_4$, $t_{0,1,2,3}\,\delta_4$ provide Cayley group-pictures for $[\infty] \times [\infty] \times [\infty]$, $\square$, $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $[4, 3, 4]$, respectively.

The next three lines of the table illustrate the following less obvious principle. *The rotational subgroup of the group respresented by any connected graph has a Cayley group-picture consisting of the vertices and edges of the polytope symbolized by ringing all but one of the dots of the graph.* (We obtain various group-pictures for the same group by varying the unringed dot.) Let us prove this for the case when the graph has four dots, so that the fundamental region is a tetrahedron bounded by planes p_1, p_2, p_3, p_4. If the first three dots are ringed, the typical vertex of the polytope lies in the face p_4

of the tetrahedron, and the neighbouring vertices are derived by rotating about the sides of this face, i. e. by applying the operations $R_1 R_4$, $R_4 R_1$; $R_2 R_4$, $R_4 R_2$; $R_3 R_4$, $R_4 R_3$. Of the edges leading to these neighbouring vertices, let the first of each pair be directed away from the original vertex, and the second towards it. A consistent direction for all the edges of the polytope is then given by applying the rotation-group; and the vertices and edges of the polytope form a Cayley group-picture for this group, as generated by $R_1 R_4$, $R_2 R_4$, $R_3 R_4$ [37]). Whenever one of the dihedral angles of the tetrahedron is a right angle, the corresponding pair of edges of the polytope will coincide, in the manner appropriate for an involutory generator.

The examples in ordinary space are given in the first six lines of the following table. The plane interfaces of each space-filling provide the relations for the abstract definition of the group. This last remark enables us to insert the remaining lines of the table. The abstract definitions can be verified by writing $A = R_1 R_4$, $B = R_2 R_4$, $C = R_3 R_4$, $D = R_1 R_3$, $E = R_2 R_3$, $F = R_1 R_2$, $G = R_4$, $H = FA$, $J = FD$, $K = F^2$, $L = C^2$, in the notation of (1. 45).

Group	Abstract definition	Cayley group-picture
$\{4, 3, 4\}'$	$A^2 = B^2 = C^4 = (AB)^4 = (AC)^3 = (BC)^3 = 1$	$t_{0,1,2}\,\delta_4$
	$C^4 = D^2 = E^2 = (CD)^2 = (CE)^2 = (DE)^4 = 1$	$t_{0,1,3}\,\delta_4$
$\begin{bmatrix}3\\3\\4\end{bmatrix}'$	$H^2 = B^2 = C^4 = (HB)^2 = (HC)^3 = (BC)^3 = 1$	$t_{1,2}\,\delta_4$
	$C^4 = J^3 = E^3 = (CJ)^2 = (CE)^2 = (JE^{-1})^2 = 1$ [38])	$t_{0,2}\,\delta_4$
	$K^2 = B^2 = E^3 = (KB)^2 = (KE)^3 = (BE)^4 = 1$	$h_{2,3}\,\delta_4$
$\square'$	$L^2 = J^3 = E^3 = (LJ)^3 = (LE)^3 = (JE^{-1})^2 = 1$ [39])	$h_2\,\delta_4$
$[(4.3)', 4]$	$E^3 = F^4 = G^2 = (EF)^2 = (E^{-1}GEG)^2 = F^{-1}GFG = 1$	$t_{0,1,3}\,\delta_4$
$(4, 4 \mid 3, 3)$	$R^4 = S^4 = (RS)^3 = (R^{-1}S)^3 = 1$	$t_{1,2}\,\delta_4$
$(6, 6 \mid 2, 3)$	$U^6 = V^6 = (UV)^2 = (U^{-1}V)^3 = 1$	$t_{1,2}\,d_4$
$(4, 6 \mid 2, 4)$	$X^4 = Y^6 = (XY)^2 = (X^{-1}Y)^4 = 1$	$t_{0,1,2,3}\,\delta_4$

[37]) The abstract definition is

$$S_1^{n_{14}} = S_2^{n_{24}} = S_3^{n_{34}} = (S_2^{-1}S_3)^{n_{23}} = (S_3^{-1}S_1)^{n_{31}} = (S_1^{-1}S_2)^{n_{12}} = 1.$$

[38]) The same relations, with JE instead of JE^{-1}, would define a group of order 192.

[39]) Here JE could be written for JE^{-1}, by defining E as $R_3 R_2$ instead of $R_2 R_3$

(Eingegangen am 8. Mai 1939.)

Zur Differentialgeometrie von Flächen im n-dimensionalen euklidischen Raum. Adjungierte Extremalflächen.

Von

H. Gericke.

Gliederung.

Seite

Einleitung 409

1. Kapitel. Das Rechnen mit Grassmannschen Größen . . . 412

2. Kapitel. Aus der Geometrie des E_n.

I. Torsen.

§ 1. Definition und Bedingungsgleichungen 415
§ 2. Gratlinien 416
§ 3. Mit einer Kurve verbundene Torsen 417

II. Flächen im E_n.

§ 4. Grundgrößen und Ableitungsgleichungen 418
§ 5. Asymptotenlinien 419
§ 6. Haupttangentenkurven 422
§ 7. Abwickelbarkeit der Torsen 424
§ 8. λ-Krümmungslinien. Weitere Kennzeichnungen der Asymptotenlinien und Haupttangentenkurven 425
§ 9. Bemerkungen über Relativ-Geometrie 427

3. Kapitel. Adjungierte Variationsprobleme und adjungierte Extremalflächen bei Doppelintegralen im E_n.

I. Einführung der adjungierten Extremalfläche und des adjungierten Variationsproblems.

§ 1. Allgemeine Beziehungen 428
§ 2. Die Figuratix 429
§ 3. Das adjungierte Variationsproblem 432

II. Relativgeometrie bezüglich $\mathfrak{E}^*$.

§ 4. Die „parallele“ Zuordnung 434
§ 5. Einander entsprechende Kurven 435

III. Relativgeometrie bezüglich e.

§ 6. Bedingungen für $\mathfrak{E}^*$-Krümmungslinien 437
§ 7. Geometrische Eigenschaften der e-Krümmungslinien 438
§ 8 Der Vektor e bei speziellen Variationsproblemen. Ein Beispiel 440
§ 9. Weiteres über derartige Variationsprobleme 443
§ 10. Einander entsprechende Kurven 445

IV.

§ 11. Maßbestimmung 451

V. Die Legendresche Bedingung und die Krümmung von $\mathfrak{E}(u, v)$.

§ 12. Die Legendresche Bedingung 453
§ 13. Die Krümmung der Figuratrix 455
Literatur 457

Einleitung.

Zwischen zwei adjungierten Minimalflächen $\mathfrak{x}(u^1, u^2)$ und $\bar{\mathfrak{x}}(u^1, u^2)$ gelten folgende Beziehungen[1]): $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ sind aufeinander längentreu abgebildet; die Tangentenebenen in entsprechenden Punkten sind parallel; entsprechende Linienelemente stehen aufeinander senkrecht; den Krümmungslinien von $\mathfrak{x}$ entsprechen die Asymptotenlinien von $\bar{\mathfrak{x}}$ und umgekehrt. — Wir schreiben noch das Integral hin, das von den Minimalflächen stationär gemacht wird: Ist $\mathfrak{x}_i = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^i}$, $\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{p}$, ξ der Einheitsvektor der Flächennormalen, so ist dies Integral

$$(V_0) \qquad J_0 = \iint \xi \mathfrak{p}\, du^1\, du^2.$$

Haar [1] und Berwald [2][2]) haben die Theorie der adjungierten Minimalflächen ausgedehnt auf die Extremalflächen von Doppelintegralproblemen, die nur von den ersten Ableitungen der gesuchten Funktionen abhängen. Es zeigt sich, daß in diesem Falle, wenn man Unabhängigkeit von der Parameterwahl fordert, der Integrand nur von $\mathfrak{p} = \mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2$, d. h. vom Flächenelement abhängt:

$$(V) \qquad J = \iint F(\mathfrak{p})\, du^1\, du^2,$$

und $F(\mathfrak{p})$ in $\mathfrak{p}$ positiv homogen erster Ordnung ist: $F(k\mathfrak{p}) = k \cdot F(\mathfrak{p})$ für $k > 0$.

---

[1]) Siehe z. B. Blaschke, Lehrbuch der Differentialgeometrie I, § 118, 2, S. 259 (3. Aufl.)

[2]) Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

Es ist eine *Indikatrixfläche* $\mathfrak{y}$ durch $F(\mathfrak{y}) = 1$ definiert und eine *Figuratrixfläche* $\mathfrak{e}$ als polarreziprok zu $\mathfrak{y}$ bezüglich der Einheitskugel. F kann dann geschrieben werden

$$F = \mathfrak{e}\mathfrak{p}.$$

Gegenüber (V_0) ist die Einheitskugel ξ ersetzt durch die Fläche $\mathfrak{e}$, die im folgenden als Eichfläche einer Relativgeometrie im Sinne von W. Süss [3] benutzt wird. Die Extremalflächen sind durch das Verschwinden der mittleren Relativkrümmung gekennzeichnet.

Man ordnet nun dem Variationsproblem (V) ein Variationsproblem $(\overline{V})$ zu, das man zu (V) *adjungiert* nennt, und das man dadurch definiert, daß die Figuratrix von (V) die Indikatrix von $(\overline{V})$ ist und umgekehrt. Beim Problem der Minimalflächen ist die Indikatrix die Einheitskugel, fällt also mit der Figuratrix zusammen; man sagt, das Problem ist selbstadjungiert.

Zu jeder Extremalfläche $\mathfrak{x}$ von (V) gibt es eine nur durch Quadraturen bestimmbare Fläche $\bar{\mathfrak{x}}$, die *adjungierte Extremalfläche* zu $\mathfrak{x}$ heißt und folgende Eigenschaften hat: $\bar{\mathfrak{x}}$ ist Extremalfläche von $(\overline{V})$. Zwischen $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ gibt es eine Zuordnung derart, daß entsprechende Linienelemente aufeinander senkrecht stehen und den Asymptotenlinien von $\bar{\mathfrak{x}}$ die Relativkrümmungslinien von $\mathfrak{x}$ bezüglich $\mathfrak{e}$ entsprechen; diese sind dadurch definiert, daß längs ihnen die Vektoren $\mathfrak{e}$ Torsen bilden. Den Asymptotenlinien von $\mathfrak{x}$ entsprechen die Relativkrümmungslinien von $\bar{\mathfrak{x}}$ bezüglich $\mathfrak{y}$. Es läßt sich auf $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ je eine Maßbestimmung einführen

$$dS^2 = G_{ik}\,du^i\,du^k \qquad (i, k = 1, 2;\ \text{über gleiche}$$
$$d\bar{S}^2 = \bar{G}_{ik}\,du^i\,du^k \qquad \text{Zeiger ist zu summieren}),$$

derart, daß 1. die Abbildung von $\mathfrak{x}$ auf $\bar{\mathfrak{x}}$ im Sinne dieser Maßbestimmung längentreu ist, 2. die Maßbestimmung beim Problem der Minimalflächen das gewöhnliche Bogenelement liefert, 3. die Oberfläche bei dieser Maßbestimmung gerade das Variationsintegral ergibt.

Diese Theorie ist von Haar und Berwald für den dreidimensionalen euklidischen Raum (E_3) durchgeführt worden. Koschmieder [4] hat für den Fall von Doppelintegralen im E_4 das adjungierte Variationsproblem, die adjungierte Extremalfläche und die Maßbestimmungen angegeben. *Ziel der vorliegenden Arbeit* ist, auch den Rest der oben skizzierten Theorie adjungierter Extremalflächen auf den E_4 bzw. E_n zu übertragen. Dazu gehört die Relativgeometrie solcher Flächen, das Entsprechen von Kurvenscharen, dann aber auch ein Satz von Blaschke [37], von dem sich wenigstens ein Teil übertragen läßt, nämlich daß die Gaußsche Krümmung der Figuratrix positiv ist, wenn für das Variationsproblem ein Analogon der Legendreschen Bedingung erfüllt ist.

Als Rechenmethode verwende ich die Grassmannsche Ausdehnungslehre [5]. Ich bevorzuge im Gegensatz zu der meist benutzten Schreibweise der Tensorrechnung eine vielleicht ältere, die mehr der Vektorrechnung angeglichen ist, weil mir scheint, daß sich dabei das Vektorprodukt, das in dieser Arbeit viel benutzt wird, einfach und verhältnismäßig anschaulich handhaben läßt. Die für unseren Zweck nötigen Definitionen und Rechenregeln stelle ich im 1. Kapitel zusammen. Ich halte mich dabei an den Enzyklopädie-Artikel von Lotze [6]. Erreicht wird, daß sich die Entwicklungen von Koschmieder formal ähnlich denen von Berwald schreiben lassen und zugleich allgemein für Flächen des E_n gelten. (Warum eine Verallgemeinerung auf mehr als zweidimensionale Flächen nicht ohne weiteres möglich ist, sagt Fußnote 7, S. 429.)

Um Beziehungen zwischen Kurvenscharen auf $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ zu ermitteln, muß man zunächst *geeignete Kurvenscharen* festlegen. *Asymptotenlinien* können im E_3 dadurch definiert werden, daß ihre Schmiegebene jeweils mit der Tangentenebene der Fläche zusammenfällt. Wörtliche Übertragung dieser Definition auf Flächen des E_n liefert Kurven, die ich Haupttangentenkurven nenne (da der Ausdruck Asymptotenlinien im Anschluß an Kommerell [18, 19] in anderem Sinne gebraucht wird), die aber nicht auf allen Flächen existieren, sondern nur auf solchen, die einer bestimmten Differentialgleichung genügen (vgl. Lane [33], § 27, S. 124ff.). *Zwei* Scharen von Haupttangentenkurven existieren sogar nur auf Flächen, die auf Flächen des E_3 längentreu abbildbar sind. Ob es möglich ist, Variationsprobleme zu finden und zu kennzeichnen, auf deren Extremalflächen Haupttangentenkurven existieren, ist eine offene Frage.

Krümmungslinien können auf Flächen des E_3 dadurch definiert werden, daß längs ihnen die Normalen Torsen bilden. Eine Fläche des E_n besitzt in jedem Punkte eine $(n-2)$-dimensionale Normalebene (kurz: Normal-E_{n-2}). Eine einparametrige Schar solcher E_{n-2} wird man eine Torse nennen, wenn die Tangenten-E_{n-1} an die erzeugte Hyperfläche längs jeder erzeugenden E_{n-2} konstante Stellung hat. Man kann dann feststellen, daß die so definierten Torsen auf die E_{n-1} abwickelbar sind.

Die Normal-E_{n-2} ist gegeben durch einen $(n-2)$-Vektor $\mathfrak{E}^*$, das ist eine Größe $(n-2)$-ter Stufe im Grassmannschen Sinne. Man erhält den Satz: Den Kurven von $\mathfrak{x}$, längs denen die $\mathfrak{E}^*$ Torsen bilden, also den $\mathfrak{E}^*$-Krümmungslinien von $\mathfrak{x}$, entsprechen die Haupttangentenkurven von $\bar{\mathfrak{x}}$; nur gibt es diese Kurven nicht immer.

Bei der Aufstellung der Gleichungen für $\mathfrak{E}^*$-Krümmungslinien gelangt man fast von selbst dazu, Kurven zu betrachten, die nur einen Teil dieser Gleichungen erfüllen, deren geometrische Bedeutung dann die folgende ist: In jedem Flächenpunkt greife man innerhalb der E_{n-2} $\mathfrak{E}^*$ einen Vektor $\mathfrak{e}$

heraus; er möge genügend oft differenzierbar vom Flächenpunkt abhängen — wie ich überhaupt die nötigen Differenzierbarkeitseigenschaften stets voraussetze. Als e-Krümmungslinien bezeichne man solche Kurven, längs denen die von e gebildete Regelfläche auf eine Fläche des E_{n-1} abwickelbar ist. Diesen Kurven entsprechen dann auf der adjungierten Fläche solche, deren Schmiegebene zwar nicht in der jeweiligen Tangentenebene liegt, aber in einem E_{n-1}, der die Tangentenebene enthält. Die Schmiegebene unterliegt also einer Beschränkung, aber nicht einer so scharfen, wie sie für die oben definierten Haupttangentenkurven galt. Sie ist vielmehr so schwach, daß sie eine quadratische Gleichung für die Richtungen in einem Punkte darstellt, so daß also im allgemeinen zwei solche Kurven durch jeden Flächenpunkt gehen; und sie geht im Falle $n = 3$ in die Bedingung für Asymptotenlinien über.

Die hier angedeuteten Begriffsbildungen der (gewöhnlichen) Flächentheorie im E_n sind im 2. Kapitel ausgeführt (Literatur hierzu [III.]), die der Relativgeometrie im Zusammenhang mit dem Variationsproblem im 3. Kapitel. Den Schluß bildet das obengenannte Analogon eines Satzes von Blaschke.

1. Kapitel.

Das Rechnen mit Graßmannschen Größen.

In diesem Kapitel werden die Grundgesetze des Rechnens mit „extensiven Größen", soweit sie im folgenden gebraucht werden, im Anschluß an den Enzyklopädie-Artikel von Lotze [6] kurz zusammengestellt. Weitere Literatur s. unter [II.].

Ein *Vektor* $\mathfrak{a}$ des n-dimensionalen Euklidischen Raumes E_n ist definiert mittels eines Systems von n orthogonalen Einheitsvektoren (Grundvektoren) $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$: $\mathfrak{a} = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \mathfrak{e}_\nu$. Bei Einführung neuer orthogonaler Grundvektoren transformieren sich die a_ν kontragredient. Addition von Vektoren und Multiplikation mit Skalaren werden in bekannter Weise erklärt.

Das äußere Produkt oder Vektorprodukt ($\times$) von $r \leqq n$ Vektoren ergibt eine „Größe r-ter Stufe"; es wird definiert

1. durch die Forderung der Gültigkeit des assoziativen und des distributiven Gesetzes;

2. durch Einführung der Produkte der Einheitsvektoren als Einheitsgrößen r-ter Stufe:

$$\mathfrak{e}_{\varrho_1} \times \ldots \times \mathfrak{e}_{\varrho_r} = \overset{r}{\mathfrak{E}}_{\varrho_1 \ldots \varrho_r}$$

mit der Vertauschungsregel $\mathfrak{e}_\varrho \times \mathfrak{e}_\sigma = -\mathfrak{e}_\sigma \times \mathfrak{e}_\varrho$.

Dann wird

$$\overset{r}{\mathfrak{A}} = (\mathfrak{a}_1 \times \ldots \times \mathfrak{a}_r) = \sum A_{\varrho_1 \ldots \varrho_r} \overset{r}{\mathfrak{E}}_{\varrho_1 \ldots \varrho_r}.$$

Zu summieren ist über die verschiedenen Kombinationen der Zahlen $1, \ldots, n$ zu je r.

Derartige Größen $\overset{r}{\mathfrak{A}} = \sum A_{\varrho_1 \ldots \varrho_r} \mathfrak{E}_{\varrho_1 \ldots \varrho_r}$ heißen „Größen r-ter Stufe" oder „r-Vektoren", $A_{\varrho_1 \ldots \varrho_r}$ ihre Komponenten; diese bilden einen schiefsymmetrischen Tensor r-ter Stufe.

Ich bezeichne r-Vektoren durch große deutsche Buchstaben, wenn $r > 1$, durch kleine, wenn $r = 1$. Die Stufenzahl wird, wenn nötig, durch einen darübergesetzten Zeiger angegeben oder mit $\sigma(\mathfrak{A})$ bezeichnet. Lateinische Buchstaben bezeichnen Skalare.

Ein r-Vektor heißt *einfach*, wenn er (wie im obigen Falle) sich als Vektorprodukt von r 1-Vektoren darstellen läßt. In diesem Falle sind die $A_{\varrho_1 \ldots \varrho_r}$ die Determinanten der aus den Komponenten der $\mathfrak{a}_\varrho$ gebildeten Matrix. Kriterien für die Einfachheit sind ([6], S. 1448): Jeder 1-Vektor ist einfach; daraus folgt später die Einfachheit jedes $(n-1)$-Vektors. Ein 2-Vektor $\overset{2}{\mathfrak{A}}$ ist einfach, wenn $\overset{2}{\mathfrak{A}} \times \overset{2}{\mathfrak{A}} = 0$ ist. Die Kriterien für die Einfachheit eines r-Vektors $(r > 2)$ sind verwickelter, werden auch in dieser Arbeit nicht benötigt.

Geometrisch bedeutet ein einfacher r-Vektor das Gebiet, das von seinen r 1-Vektoren aufgespannt wird, d. h. er gibt die Stellung eines E_r an, dem noch eine Zahl, nämlich der Inhalt des von den Vektoren aufgespannten orientierten Parallelflachs zugeordnet wird.

Es gelten die Gesetze, daß ein Produkt aus 1-Vektoren verschwindet, wenn zwei Faktoren parallele Vektoren sind oder — allgemeiner — ein Faktor von den übrigen linear abhängig ist. Aus diesem Grunde würde ein Produkt von mehr als n 1-Vektoren stets verschwinden. Grassmann wählt den Ausweg, daß er ein solches Produkt anders definiert. Der Weg dazu führt über den Begriff der *Ergänzung*. Geometrisch ist die Ergänzung eines einfachen r-Vektors ein dazu orthogonaler einfacher $(n-r)$-Vektor. Allgemein wird die Ergänzung (ich bezeichne sie durch *) so eingeführt:

$$(\overset{r}{\mathfrak{A}} + \overset{r}{\mathfrak{B}})^* = \mathfrak{A}^* + \mathfrak{B}^*; \qquad (a\,\mathfrak{A})^* = a \cdot \mathfrak{A}^*.$$

Dann braucht nur noch für die Einheiten $\mathfrak{E}^*$ definiert zu werden: Ist

$$\overset{r}{\mathfrak{E}} = \mathfrak{e}_{\varrho_1} \times \ldots \times \mathfrak{e}_{\varrho_r},$$

so ist

$$\mathfrak{E}^* = \pm\, \mathfrak{e}_{\varrho_{r+1}} \times \ldots \times \mathfrak{e}_{\varrho_n},$$

wobei das Vorzeichen so zu wählen ist, daß $\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}^* = +(\mathfrak{e}_1 \times \ldots \times \mathfrak{e}_n)$ ist Dann ist

$$(\overset{r}{\mathfrak{A}}{}^*)^* = (-1)^{r(n-r)}\, \overset{r}{\mathfrak{A}}.$$

Nunmehr wird das „*regressive Produkt*“ $\overset{R}{\times}$ zweier Einheiten erklärt durch

$$(\overset{p}{\mathfrak{E}}\overset{R}{\times}\overset{q}{\mathfrak{F}})^* = \mathfrak{E}^*\times\mathfrak{F}^* \qquad (\text{für } p+q>n, \text{ also } (n-p)+(n-q)<n),$$

das regressive Produkt beliebiger r-Vektoren durch das distributive Gesetz. Bei einfachen Vektoren stellt das regressive Produkt das den beiden Vektoren gemeinsame Gebiet dar. Das R in der Bezeichnung kann fortgelassen werden, da die Art des Produkts aus der Stufenzahl der Faktoren abgelesen werden kann. Produkte aus mehreren Faktoren können „rein“ oder „gemischt“ sein, je nachdem nur die eine oder beide Arten der Multiplikation auftreten. Nur für reine Produkte gilt das assoziative Gesetz.

Rechenregeln.

a) $(\mathfrak{A}_1\times\ldots\times\mathfrak{A}_m)^* = \mathfrak{A}_1^*\times\ldots\times\mathfrak{A}_m^*$ ([6], S. 1443, (4)).

b) Zerlegungsformel ([6], S. 1445): „Es sei $\mathfrak{B}$ eine einfache Größe m-ter Stufe, aufgebaut aus den Faktoren $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_m$. $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots$ seien deren multiplikative Kombinationen zur r-ten Klasse ($r < m$), sowie $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots$ diejenigen aus den jeweils noch übrigen $\mathfrak{b}_i$ und in solcher Reihenfolge, daß stets $\mathfrak{C}_k\times\mathfrak{D}_k = +\mathfrak{B}$, dann ist allgemein

$$(Z) \qquad (\mathfrak{A}\overset{R}{\times}\mathfrak{B}) = \sum_k (\mathfrak{A}\times\mathfrak{D}_k)^*\cdot\mathfrak{C}_k$$

für jede Größe $\mathfrak{A}$ der Stufe $n+r-m$“. — $(\mathfrak{A}\times\mathfrak{D}_k)^*$ ist ein Skalar.

Zur Erläuterung dieser Formel möchte ich einen bekannten Sonderfall angeben: Das Vektorprodukt zweier Vektorprodukte im E_3. Unter dem Vektorprodukt der Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ versteht man dort gewöhnlich den zu $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ senkrechten Vektor geeigneter Länge, das ist in unserer Bezeichnungsweise die Ergänzung. Wir wollen also berechnen

$$((\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})^*\times(\mathfrak{c}\times\mathfrak{d})^*)^*;$$

das ist nach der Definition des regressiven Produkts

$$= (\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\overset{R}{\times}(\mathfrak{c}\times\mathfrak{d})$$

und somit nach (Z)

$$= (\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}\times\mathfrak{d})^*\mathfrak{c} - (\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})^*\mathfrak{d};$$

$(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})$ ist aber die aus diesen drei Vektoren gebildete Determinante.

Als *Skalarprodukt* oder *inneres Produkt* sei definiert

$$(S) \qquad \overset{a}{\mathfrak{A}}\cdot\overset{b}{\mathfrak{B}} = (\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}^*)^*$$

(statt $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}^*$ bei Lotze, damit das Skalarprodukt zweier gleichstufiger Vektoren nicht ein n-Vektor, sondern ein Skalar wird).

Zwischen $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ besteht mit einem Vorzeichen, das von der Stufenzahl abhängt, die Beziehung $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \pm(\mathfrak{B}\mathfrak{A})^*$; nur für gleichstufige Vektoren ist $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$.

Es ist $\sigma(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \sigma(\mathfrak{B}) - \sigma(\mathfrak{A})$, wenn $\sigma(\mathfrak{B}) \geqq \sigma(\mathfrak{A})$,

$= n - \sigma(\mathfrak{B}) + \sigma(\mathfrak{A})$, wenn $\sigma(\mathfrak{B}) < \sigma(\mathfrak{A})$ ist.

Skalarprodukte schreibe ich, wenn möglich, in solcher Reihenfolge, daß der erste Fall vorliegt. In diesem Falle ist das Skalarprodukt nichts anderes als die gleichläufige $\sigma(\mathfrak{A})$-fache Überschiebung. Ich zeige das hier, um die Schreibweise zu vereinfachen, für den Fall $\sigma(\mathfrak{A}) = 2$, $\sigma(\mathfrak{B}) = 3$, also

$$\mathfrak{A} = \sum A_{ik} \overset{2}{\mathfrak{E}}_{ik}, \quad \mathfrak{B} = \sum B_{lmn} \overset{3}{\mathfrak{E}}_{lmn}.$$

Dann ist

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \sum A_{ik} B_{lmn} (\mathfrak{E}_{ik} \times \mathfrak{E}^*_{lmn})^*.$$

Nun ist $\mathfrak{E}_{ik} \times \mathfrak{E}^*_{lmn} = 0$, wenn unter den Zeigern l, m, n nicht die Werte i, k vorkommen. Ich denke mir die Zeiger der B schon so geordnet, daß die i, k an erster Stelle stehen. Dann ist also

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \sum A_{ik} B_{ikn} (\mathfrak{E}_{ik} \times \mathfrak{E}^*_{ikn})^* = \sum A_{ik} B_{ikn} \mathfrak{e}_n.$$

Denn es ist $(\mathfrak{E}_{ik} \times \mathfrak{E}^*_{ikn}) = \mathfrak{E}^*_{ik} \overset{R}{\times} \mathfrak{E}_{ikn}$ und das ist nach (Z)

$$= (\mathfrak{E}^*_{ik} \times \mathfrak{E}_{ik})^* \cdot \mathfrak{e}_n = \mathfrak{e}_n.$$

Formeln für späteren Gebrauch:

a) Sei $\sigma(\mathfrak{B}) = b < c = \sigma(\mathfrak{C})$; dann ist

(S 1) $$(\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C})^* = (\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}^*)^{**} = (-1)^{(n-c+b)(c-b)} (\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}^*).$$

b) Ist $\sigma(\mathfrak{A}) + \sigma(\mathfrak{B}) \leqq \sigma(\mathfrak{C})$, so ist

$$(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{C} = (\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}^*)^*$$

(die Beschränkung der Stufenzahl ist notwendig, damit hier das assoziative Gesetz angewandt werden darf)

$$= (-1)^{(n-c+b)(c-b)} (\mathfrak{A} \times (\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C})^*)^*,$$

(S 2) $$(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{C} = (-1)^{(n-c+b)(c-b)} \mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C}).$$

2. Kapitel.

Aus der Geometrie des E_n.

I. Torsen[3]).

§ 1.

Definition und Bedingungsgleichungen.

$$\mathfrak{Y}(s) = (\mathfrak{y}_1(s) \times \mathfrak{y}_2(s) \times \ldots \times \mathfrak{y}_r(s))$$

sei eine einparametrige Schar einfacher r-Vektoren, $r \leqq n-2$. Längs einer Kurve $\mathfrak{x}(s)$ aufgereiht erzeugen sie eine $(r+1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit, die r-Regelfläche genannt werde:

F_{r+1}: $$\mathfrak{z}(s, v_\varrho) = \mathfrak{x}(s) + \sum_{\varrho=1}^{r} v_\varrho \cdot \mathfrak{y}_\varrho(s).$$

[3]) Mit aus E_r aufgebauten Mannigfaltigkeiten und ihren Abwickelbarkeitseigenschaften beschäftigen sich Segre, Bompiani, Terracini [25–31], siehe auch Brauner [24].

Sie heiße r-Torse, wenn ihre Tangenten-E_{r+1} längs einer Erzeugenden E_r fest sind. Die Stellung der Tangenten-E_{r+1} ist gegeben durch ($'$ bedeutet Ableitung nach s):

$$(1) \qquad \mathfrak{T}^{r+1} = \left(\mathfrak{z}' \times \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial v_1} \times \ldots \times \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial v_r}\right) = (\mathfrak{x}' \times \mathfrak{Y}) + \sum_{\varrho=1}^{r} v_\varrho (\mathfrak{y}_\varrho' \times \mathfrak{Y}).$$

Für $v_\varrho = 0$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$, d. h. für die Punkte der Kurve $\mathfrak{x}(s)$ selbst, ist

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{x}' \times \mathfrak{Y}.$$

Wenn $\mathfrak{x}' \times \mathfrak{Y} \neq 0$ ist, so muß, damit die Stellung von $\mathfrak{T}$ unabhängig von v_ϱ ist, jedes $\mathfrak{y}_\varrho' \times \mathfrak{Y}$ dieselbe E_{r+1} bestimmen, d. h. es muß $\mathfrak{y}_\varrho'$ in der von $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{Y}$ aufgespannten E_{r+1} liegen, also

$$(\mathrm{T}\,1) \qquad \mathfrak{x}' \times \mathfrak{y}_\varrho' \times \mathfrak{Y} = 0 \text{ sein für } \varrho = 1, \ldots, r.$$

Ist $\mathfrak{x}' \times \mathfrak{Y} = 0$, so ist in den Punkten der Kurve $\mathfrak{x}(s)$ die Tangenten-E_{r+1} nicht bestimmt. Damit $\mathfrak{T}$ dann von v_ϱ unabhängig ist, muß für alle ϱ, σ

$$(\mathrm{T}\,2) \qquad \mathfrak{y}_\varrho' \times \mathfrak{y}_\sigma' \times \mathfrak{Y} = 0$$

sein.

§ 2.

Gratlinien [4]).

Als Gratlinien der Torse F_{r+1} seien diejenigen Kurven

$$\bar{\mathfrak{x}}(s) = \mathfrak{x}(s) + \sum_{\varrho=1}^{r} v_\varrho(s)\, \mathfrak{y}_\varrho(s)$$

bezeichnet, für die $\bar{\mathfrak{x}}' \times \mathfrak{Y} = 0$ ist.

Es ist

$$\bar{\mathfrak{x}}' = \mathfrak{x}' + \Sigma v_\varrho \mathfrak{y}_\varrho' + \Sigma v_\varrho' \mathfrak{y}_\varrho,$$

$$\bar{\mathfrak{x}}' \times \mathfrak{Y} = \mathfrak{x}' \times \mathfrak{Y} + \Sigma v_\varrho (\mathfrak{y}_\varrho' \times \mathfrak{Y}).$$

Nun sind nach (T 1), (T 2) die $(r+1)$-Vektoren $\mathfrak{x}' \times \mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{y}_\varrho' \times \mathfrak{Y}$ Vielfache desselben $(r+1)$-Vektors $\mathfrak{T}$, also etwa

$$\mathfrak{x}' \times \mathfrak{Y} = x \cdot \mathfrak{T}, \qquad \mathfrak{y}_\varrho' \times \mathfrak{Y} = y_\varrho \cdot \mathfrak{T},$$

wobei x, y_ϱ Zahlen (Funktionen von s) sind. Also wird unsere Bedingungsgleichung

$$x + \sum_{\varrho=1}^{r} v_\varrho y_\varrho = 0.$$

Es besteht also eine lineare Gleichung für die r Größen v_ϱ, d. h. es gibt im allgemeinen eine $(r-1)$-parametrige Schar von Gratlinien.

---

[4]) Die Ergebnisse der § 2 und 3 werden im folgenden nicht benutzt.

§ 3.

Mit einer Kurve verbundene Torsen.

Längs einer Kurve des E_3 bilden bekanntlich die Tangenten, aber nicht die Hauptnormalen oder die Binormalen Torsen. In Verallgemeinerung hiervon fragen wir, welche von den mit einer Kurve des E_n in entsprechender Weise verbundenen r-Regelflächen Torsen sind.

Das mit der Kurve $\mathfrak{x}(s)$ verbundene orthogonale n-Bein bestehe aus den Vektoren $\xi_1 = \mathfrak{x}'$, $\xi_2, \ldots, \xi_n$; s sei die Bogenlänge, $\varkappa_i$ die Krümmungen, so daß mit $\varkappa_0 = \varkappa_n = 0$ die Frenetschen Formeln die Gestalt haben [5])

$$\xi_i' = -\varkappa_{i-1}\,\xi_{i-1} + \varkappa_i\,\xi_{i+1}.$$

Dabei kann vorausgesetzt werden, daß von den ersten m Krümmungen keine, aber alle übrigen identisch verschwinden ($m \leqq n-1$). In diesem Falle liegt die Kurve in einem E_{m+1}. Auf diesen können wir unsere Überlegungen beschränken, d. h. wir können einfach von vornherein alle $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n-1}$ als $\not\equiv 0$ annehmen.

Betrachten wir zunächst den Fall $r = 1$, also $\mathfrak{Y} = \xi_i$; dann wird aus (T 1)

$$\xi_1 \times \xi_i' \times \xi_i = -\varkappa_{i-1}(\xi_1 \times \xi_{i-1} \times \xi_i) + \varkappa_i(\xi_1 \times \xi_{i+1} \times \xi_i) = 0.$$

Damit das der Fall ist, muß wegen unserer Voraussetzungen über die $\varkappa$

$$\xi_1 \times \xi_{i-1} \times \xi_i \equiv 0 \quad \text{und} \quad \xi_1 \times \xi_{i+1} \times \xi_i \equiv 0$$

sein; und das ist dann und nur dann erfüllt, wenn $i = 1$ ist. *Von den Vektoren des eine Kurve begleitenden n-Beins erzeugen nur die Tangenten eine Torse* (vgl. Forsyth [14]).

Sei allgemein

$$\mathfrak{Y} = \xi_{i_1} \times \xi_{i_2} \times \ldots \times \xi_{i_r}; \quad i_1 < i_2 < \ldots < i_r; \quad r \leqq n-2.$$

(T 1) liefert

$$\xi_1 \times \xi_{i_\varrho}' \quad \times \xi_{i_1} \times \ldots \times \xi_{i_r} \equiv 0,$$

und dazu muß

$$\xi_1 \times \xi_{i_\varrho - 1} \times \xi_{i_1} \times \ldots \times \xi_{i_r} \equiv 0$$

und

$$\xi_1 \times \xi_{i_\varrho + 1} \times \xi_{i_1} \times \ldots \times \xi_{i_r} \equiv 0$$

sein.

Aus diesen Gleichungen folgt

entweder $i_1 = 1$, und dann sind alle diese Gleichungen in der Tat erfüllt;

oder aus der zweiten $i_{\varrho+1} = i_\varrho + 1$

und dann aus der ersten für $\varrho = 1$: $i_1 = 2$, also $i_\varrho = \varrho + 1$, und dann aus der zweiten für $\varrho = r$: $\xi_1 \times \xi_{r+2} \times \xi_2 \times \ldots \times \xi_{r+1} \equiv 0$; diese Gleichung ist aber falsch.

---

[5]) Vgl. z. B. Duschek-Mayer, Differentialgeometrie II, S. 74.

Also bleibt nur die Möglichkeit $i_1 = 1$. In diesem Falle ist (T 2) zu prüfen. Daraus ergeben sich zunächst die Gleichungen:

$$\xi_2 \times \xi'_{i_\varrho} \times \xi_1 \times \xi_{i_2} \times \ldots \times \xi_{i_r} \equiv 0 \qquad (\varrho \geqq 2),$$

d. h.

$$\xi_2 \times \xi_{i_\varrho - 1} \times \xi_1 \times \xi_{i_2} \times \ldots \times \xi_{i_r} \equiv 0 \text{ und } \xi_2 \times \xi_{i_\varrho + 1} \times \xi_1 \times \xi_{i_2} \times \ldots \times \xi_{i_r} \equiv 0.$$

Aus der zweiten dieser Gleichungen folgt $i_\varrho + 1 = i_{\varrho+1}$, aus der ersten für $\varrho = 2$: $i_2 = 2$ oder $i_2 = 3$, also $i_\varrho = \varrho$ oder $i_\varrho = \varrho + 1$. Der zweite Fall ergibt für $\varrho = r$ aus der zweiten Gleichung die falsche Gleichung:

$$\xi_2 \times \xi_{r+2} \times \xi_1 \times \xi_3 \times \ldots \times \xi_{r+1} \equiv 0,$$

also bleibt nur der Fall $i_\varrho = \varrho$: Eine Torse kann höchstens dann vorliegen, wenn $\mathfrak{Y} = \xi_1 \times \xi_2 \times \ldots \times \xi_r$ ist. Dann liegt auch eine Torse vor; denn (T 1) ist erfüllt, weil $\mathfrak{x}' = \xi_1$ ist, und (T 2) ist erfüllt, weil in

$$\xi'_i \times \xi'_k \times \xi_1 \times \ldots \times \xi_r$$

entweder i oder $k < r$ ist, etwa i, und weil dann ξ_{i-1} und ξ_{i+1} unter $\xi_1, \ldots, \xi_r$ vorkommt.

Das Ergebnis ist: *Längs einer Kurve des E_n bilden jeweils die ersten r Vektoren ($r \leqq n - 2$) des n-Beins eine Torse und nur diese.*

II. Flächen im E_n.

§ 4.

Grundgrößen und Ableitungsgleichungen.

Eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit des E_n: $\mathfrak{x}(u^1, \ldots, u^m)$, sei als m-Fläche F_n^m bezeichnet. Wir werden es später meist mit 2-Flächen zu tun haben, die wir einfach Flächen nennen. Die Normal-E_{n-m} der Fläche $\mathfrak{x}$ werde aufgespannt von den orthogonalen Einheitsvektoren ξ_λ, $\lambda = 1, 2, \ldots, n - m$. Im folgenden laufen lateinische Zeiger von 1 bis m, griechische von 1 bis $n - m$. Bezeichnet man

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^i} = \mathfrak{x}_i, \quad \mathfrak{x}_1 \times \ldots \times \mathfrak{x}_m = \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{x}_i \mathfrak{x}_k = g_{ik}, \quad \|g_{ik}\| = g,$$

so ist

$$\sqrt{g} \cdot (\xi_1 \times \xi_2 \times \ldots \times \xi_{n-m}) = \mathfrak{P}^*.$$

Wir definieren g^{kl} durch

$$g_{ik} g^{kl} = \delta_i^l = \begin{cases} 1 \text{ für } i = l \\ 0 \text{ für } i \neq l \end{cases}$$

und setzen

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u^i \partial u^k} = \mathfrak{x}_{ik}, \qquad \frac{\partial \xi_\lambda}{\partial u^i} = \xi_{\lambda,i},$$

$$c_{ik}^\lambda = \mathfrak{x}_{ik} \xi_\lambda, \qquad c_{ik}^\lambda g^{kl} = c_i^{\lambda l}.$$

Über gleiche Zeiger ist zu summieren.

Die Ableitungsgleichungen nehmen die Gestalt an:

(A 1) $$\mathfrak{x}_{ik} = c_{ik}^{\lambda}\,\xi_{\lambda} + \Gamma_{ik}^{l}\,\mathfrak{x}_{l},$$

(A 2) $$\xi_{\lambda,\,i} = -\,c_{i}^{\lambda l}\,\mathfrak{x}_{l} + \varkappa_{i}^{\lambda\mu}\,\xi_{\mu} \quad \text{mit} \quad \varkappa_{i}^{\lambda\mu} = -\,\varkappa_{i}^{\mu\lambda}.$$

Die Integrierbarkeitsbedingungen erhält man auf folgendem Wege (Zeiger hinter einem Komma bedeuten Ableitung nach dem betreffenden Parameter): Es ist

$$\mathfrak{x}_{ikl} = \mathfrak{x}_{r}(\Gamma_{ik}^{m}\,\Gamma_{ml}^{r} + \Gamma_{ik,\,l}^{r} - c_{ik}^{\lambda}\,c_{l}^{\lambda r}) + \xi_{\lambda}(c_{ik,\,l}^{\lambda} + c_{ik}^{\varrho}\,\varkappa_{l}^{\varrho\lambda} + \Gamma_{ik}^{m}\,c_{ml}^{\lambda}),$$

und man erhält somit aus der Forderung $\mathfrak{x}_{ikl} - \mathfrak{x}_{ilk} = 0$:

(J 1) $$\Gamma_{ik,\,l}^{r} - \Gamma_{il,\,k}^{r} + \Gamma_{ik}^{m}\,\Gamma_{ml}^{r} - \Gamma_{il}^{m}\,\Gamma_{mk}^{r} = c_{ik}^{\lambda}\,c_{l}^{\lambda r} - c_{il}^{\lambda}\,c_{k}^{\lambda r}$$

und

(J 2) $$c_{ik,\,l}^{\lambda} - c_{il,\,k}^{\lambda} + c_{ik}^{\varrho}\,\varkappa_{l}^{\varrho\lambda} - c_{il}^{\varrho}\,\varkappa_{k}^{\varrho\lambda} + \Gamma_{ik}^{m}\,c_{ml}^{\lambda} - \Gamma_{il}^{m}\,c_{mk}^{\lambda} = 0.$$

Es ist

$$\xi_{\lambda,\,ik} = -\,\mathfrak{x}_{r}(c_{i,\,k}^{\lambda r} + c_{i}^{\lambda l}\,\Gamma_{lk}^{r} + \varkappa_{i}^{\lambda\mu}\,c_{k}^{\mu r}) + \xi_{\mu}(\varkappa_{i,\,k}^{\lambda\mu} + \varkappa_{i}^{\lambda\varrho}\,\varkappa_{k}^{\varrho\mu} - c_{i}^{\lambda l}\,c_{lk}^{\mu}).$$

Aus $\xi_{\lambda,\,ik} - \xi_{\lambda,\,ki} = 0$ ergibt sich somit

(J 3) $$\varkappa_{i,\,k}^{\lambda\mu} - \varkappa_{k,\,i}^{\lambda\mu} + \varkappa_{i}^{\lambda\varrho}\,\varkappa_{k}^{\varrho\mu} - \varkappa_{k}^{\lambda\varrho}\,\varkappa_{i}^{\varrho\mu} = c_{i}^{\lambda l}\,c_{lk}^{\mu} - c_{k}^{\lambda l}\,c_{li}^{\mu}$$

und

(J 4) $$c_{i,\,k}^{\lambda r} - c_{k,\,i}^{\lambda r} + c_{i}^{\lambda l}\,\Gamma_{lk}^{r} - c_{k}^{\lambda l}\,\Gamma_{li}^{r} + \varkappa_{i}^{\lambda\mu}\,c_{k}^{\mu r} - \varkappa_{k}^{\lambda\mu}\,c_{i}^{\mu r} = 0.$$

Diese letzte Gleichung folgt aber auf dem üblichen Wege aus (J 2). Es ist nämlich

$$c_{ik,\,l}^{\lambda} = (c_{k}^{\lambda r}\,g_{ri})_{l} = c_{k,\,l}^{\lambda r}\,g_{ri} + c_{k}^{\lambda r}\,(g_{ri})_{l}$$

und

$$(g_{ri})_{l} = \Gamma_{rli} + \Gamma_{ilr};$$

so wird aus (J 2)

$$c_{k,\,l}^{\lambda r}\,g_{ri} - c_{l,\,k}^{\lambda r}\,g_{ri} + c_{k}^{\lambda r}\,(g_{ri})_{l} - c_{l}^{\lambda r}\,(g_{ri})_{k} + c_{k}^{\varrho r}\,\varkappa_{l}^{\varrho\lambda}\,g_{ri} - c_{l}^{\varrho r}\,\varkappa_{k}^{\varrho\lambda}\,g_{ri} + \Gamma_{ikm}\,c_{l}^{\lambda m} - \Gamma_{ilm}\,c_{k}^{\lambda m} = 0.$$

Der Faktor von $c_{k}^{\lambda r}$ ist $\Gamma_{rli} + \Gamma_{ilr} - \Gamma_{ilr} = \Gamma_{rli}$, der Faktor von $c_{l}^{\lambda r}$ ebenso Γ_{rki}. Überschieben der Gleichung mit g^{im} ergibt (J 4).

§ 5.

Asymptotenlinien.

Im E_4 hat Kommerell [18] jedem Flächenpunkt eine „Charakteristik" zugeordnet, nämlich die Kurve in der Normalebene, die durch Schnitt mit allen benachbarten Normalebenen entsteht. Jeder Fortschreitungsrichtung in einem Punkt auf der Fläche entspricht somit ein Punkt der Charakteristik.

Sie ist eine Kurve zweiter Ordnung. Die ihren unendlich fernen Punkten entsprechenden Richtungen der Fläche heißen Asymptotenrichtungen, die aus ihnen gebildeten Kurven Asymptotenlinien. Ihre Differentialgleichung ist nach Kommerell

$$h_{ik}\,\dot{u}^i\,\dot{u}^k = (\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2 \times \mathfrak{x}_{1i} \times \mathfrak{x}_{2k})\,\dot{u}^i\,\dot{u}^k = 0.$$

($\cdot$ bedeutet Ableitung nach einem Kurvenparameter.)

Bei 2-Flächen im E_n läßt sich diese Gleichung formal auch aufstellen, nur steht dann links nicht mehr ein Skalar (genauer: n-Vektor), sondern ein 4-Vektor, dessen $\binom{n}{4}$ Komponenten verschwinden sollen, so daß die hierdurch bestimmten Richtungen $\binom{n}{4}$ Gleichungen zu genügen hätten. Wir stellen die Frage nach ihrer Erfüllbarkeit in der Form: Lassen sich die Parameterkurven so bestimmen, daß

$$\mathfrak{H}_{11} = (\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2 \times \mathfrak{x}_{11} \times \mathfrak{x}_{21}) = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{H}_{22} = (\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2 \times \mathfrak{x}_{12} \times \mathfrak{x}_{22}) = 0$$

wird? Wir fragen also zunächst, wann es auf einer Fläche *zwei* Scharen von Asymptotenlinien gibt.

Diese Gleichungen sind erfüllt, wenn sich die Parameterkurven so wählen lassen, daß auf der ganzen Fläche die Differentialgleichung

$$\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2 \times \mathfrak{x}_{12} = 0$$

erfüllt ist. Solche Kurvensysteme nennt man „Netze (konjugierter Kurven)“ (Eisenhart [32], Lane [33], Guichard [34]). Nicht auf allen Flächen des E_n gibt es Netze ([32], S. 7).

Wenn sich andererseits die Parameterkurven so wählen lassen, daß $\mathfrak{H}_{11} = \mathfrak{H}_{22} = 0$ und dabei $\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2 \times \mathfrak{x}_{12} \neq 0$ ist, so wähle ich die Normalkomponente von $\mathfrak{x}_{12}$ als Richtung von ξ_1, d. h. ich setze

$$m \cdot \xi_1 = \mathfrak{x}_{12} - \Gamma^l_{12}\,\mathfrak{x}_l.$$

Dann werden für $\lambda \neq 1$ alle $c^\lambda_{ik} = 0$ und die Integrierbarkeitsbedingungen vereinfachen sich in folgender Weise: (J 1) geht in das Theorema egregium über, (J 2) für $\lambda = 1$ in

$$c^1_{ik,l} - c^1_{il,k} + \Gamma^m_{ik}\,c^1_{ml} - \Gamma^m_{il}\,c^1_{mk} = 0,$$

das sind die Mainardi-Codazzischen Gleichungen. D. h.: Die g_{ik} und c^1_{ik} erfüllen die für die Fundamentalgrößen einer Fläche im E_3 kennzeichnenden Bedingungen. Also gibt es eine Fläche im E_3 mit denselben g_{ik} wie unsere gegebene Fläche: Unsere Fläche ist auf eine Fläche des E_3 abwickelbar. (In diesem Sinne wird der Ausdruck „abwickelbar“ im folgenden stets verwendet.)

Wenn sich ξ_1 so wählen läßt, daß für $\lambda \neq 1$ alle $c^\lambda_{ik} = 0$ sind, so ist das von der Wahl der Parameterkurven unabhängig; denn darin kommt die

geometrische Tatsache zum Ausdruck, daß in jedem Flächenpunkt die fünf Vektoren $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22}$ und damit auch alle Vektoren $\ddot{\mathfrak{x}}$, d. h. die Schmiegebenen an alle Flächenkurven in diesem Punkte einem und demselben E_3 angehören.

Trägt man nun $\mathfrak{x}_{ik} = c_{ik}^{\lambda}\,\xi_\lambda + \Gamma_{ik}^{l}\,\mathfrak{x}_l$ in $\mathfrak{H}_{ik}$ ein, so erhält man

$$\mathfrak{H}_{ik} = \begin{vmatrix} c_{1i}^{\lambda}, & c_{1i}^{\mu} \\ c_{2k}^{\lambda}, & c_{2k}^{\mu} \end{vmatrix} \cdot (\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2 \times \xi_\lambda \times \xi_\mu)$$

und daraus sieht man: Wenn sich ξ_1 so wählen läßt, daß für $\lambda \neq 1$ alle $c_{ik}^{\lambda} = 0$ sind, so sind alle $\mathfrak{H}_{ik} = 0$, und zwar unabhängig von der Parameterwahl, d. h. alle Kurven der Fläche sind Asymptotenlinien.

Unser Ergebnis ist: *Wenn es auf einer Fläche des E_n zwei Scharen von Asymptotenlinien gibt, so bilden diese entweder ein Netz konjugierter Kurven oder die Fläche ist auf eine Fläche des E_3 abwickelbar und in diesem Falle sind alle Kurven der Fläche Asymptotenlinien.* Umgekehrt sind die Kurven eines Netzes Asymptotenlinien.

Wir fragen nun, wann es auf einer Fläche *eine* Schar von Asymptotenlinien gibt. Dazu ist offenbar notwendig und hinreichend, daß 1. bei beliebiger Parameterwahl die Fläche einer Differentialgleichung der Form

$$A\mathfrak{x}_{11} + 2B\mathfrak{x}_{12} + C\mathfrak{x}_{22} + D\mathfrak{x}_1 + E\mathfrak{x}_2 = 0 \tag{L}$$

genügt, und daß sich 2. eine Parametertransformation

$$\bar{u}^1 = U(u^1, u^2), \qquad \bar{u}^2 = V(u^1, u^2)$$

angeben läßt, die (L) in eine Gleichung derselben Form mit den Koeffizienten $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}, \bar{E}$ *mit* $\bar{C} = 0$ überführt.

Nun gibt es bei Flächen, die einer Gleichung (L) genügen, zwei Fälle:

Entweder es ist (in einem Flächenpunkt und damit aus Stetigkeitsgründen in einer gewissen Umgebung)

$$AC - B^2 \neq 0;$$

dann gibt es zwei Scharen konjugierter Kurven.

Oder es ist $AC - B^2 = 0$. Schließen wir die Fälle aus, wo diese Gleichung in einem isolierten Punkte oder längs einer Kurve gilt, dann läßt sich durch eine Parametertransformation sogar

$$\bar{C} = \bar{B} = 0$$

erreichen, so daß es eine Kurvenschar gibt, für die

$$\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2 \times \mathfrak{x}_{11} = 0 \tag{Ht}$$

ist. Diesen Gedankengang sowie den Beweis findet man z. B. bei Eisenhart [32], auch bei Lane [33], und schon bei Darboux, Théorie des Surfaces, Bd. I, 1887, § 106.

Wenn die Gleichung (Ht) besteht, haben die Kurven $u^2 = \text{const}$ die Eigenschaft, daß ihre Schmiegebene mit der Tangentenebene der Fläche zusammenfällt. Wir nennen diese Kurven „Haupttangentenkurven". Jede Haupttangentenkurve ist Asymptotenlinie, aber nicht umgekehrt.

Wenn es nur eine Schar von Asymptotenlinien gibt, so sind diese Kurven Haupttangentenkurven. Notwendig und hinreichend dafür, daß es eine Schar von Haupttangentenkurven gibt, ist, daß die Fläche einer Differentialgleichung (L) *mit* $AC - B^2 = 0$ *genügt.*

§ 6.

Haupttangentenkurven.

Wenn es zwei Scharen von Haupttangentenkurven gibt, so bestehen, da diese Asymptotenlinien sind, die beiden Möglichkeiten: Entweder die Fläche ist auf eine Fläche des E_3 abwickelbar oder die Kurven bilden ein Netz. Im zweiten Falle würden die Parameterkurven als Haupttangentenkurven den Gleichungen genügen:

$$\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2 \times \mathfrak{x}_{11} = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2 \times \mathfrak{x}_{22} = 0$$

und als Kurven eines Netzes der Gleichung:

$$\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2 \times \mathfrak{x}_{12} = 0;$$

d. h. aber: Die Fläche ist eine Ebene.

Zwei Scharen von Haupttangentenkurven gibt es also höchstens auf solchen Flächen, die auf Flächen des E_3 *abwickelbar sind.*

Genügt diese Abwickelbarkeitseigenschaft, um wenigstens die Existenz *einer* Schar von Haupttangentenkurven sicherzustellen? Wir untersuchen hierzu den Zusammenhang zwischen dem Bestehen einer Gleichung (L) und Abwickelbarkeitseigenschaften.

Das Bestehen einer Gleichung (L) bedeutet, daß $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22}$ alle in einem E_4 liegen, d. h. daß sich ξ_1, ξ_2 so wählen lassen, daß für $\lambda > 2$ alle $c^{\lambda}_{ik} = 0$ sind. Man kann fragen, ob sich dann die Fläche auf eine Fläche des E_4 abwickeln läßt. Das ist im allgemeinen nicht der Fall; denn es gehen zwar, wie man sich ohne weiteres überzeugt, die Gleichungen (J 1), (J 2) in diejenigen für eine Fläche des E_4 über, aus (J 3) ergibt sich jedoch die zusätzliche Bedingung

$$\sum_{\varrho=3}^{n-2} \varkappa_i^{1\varrho} \varkappa_k^{\varrho 2} - \varkappa_k^{1\varrho} \varkappa_i^{\varrho 2} = 0.$$

Wir suchen nun solche Abwicklungsprobleme, bei denen keine Bedingungen für die $\varkappa$ auftreten. Ein solches ist nur das Problem der Abwicklung einer m-dimensionalen Fläche des E_n auf eine F^m_{m+1}; denn unter den Grundgrößen

einer F^m_{m+1} treten keine $\varkappa$ auf. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen der Abwickelbarkeit sind aus (J 1, 2) abzulesen. Hinreichend ist die schon mehrfach herangezogene Bedingung, daß sich die ξ_λ so wählen lassen, daß für $\lambda \neq 1$ alle $c^\lambda_{ik} = 0$ werden. Dann nehmen die Ableitungsgleichungen (A 1) die Form an

$$\mathfrak{x}_{ik} = c^1_{ik}\,\xi_1 + \Gamma^l_{ik}\,\mathfrak{x}_l. \tag{A 1'}$$

Durch Eliminieren von ξ_1 entstehen daraus $\frac{m(m+1)}{2} - 1$ Gleichungen der Form

$$A^{ik}_M\,\mathfrak{x}_{ik} + B^l_M\,\mathfrak{x}_l = 0; \qquad M = 1, 2, \ldots, \frac{m(m+1)}{2} - 1. \tag{L_M}$$

Wenn umgekehrt $\frac{m(m+1)}{2} - 1$ derartige Gleichungen bestehen, so kann man aus ihnen durch Elimination eine Gleichung der Form

$$a\,\mathfrak{x}_{11} + b\,\mathfrak{x}_{12} = C^l\mathfrak{x}_l$$

erhalten, allgemein das Gleichungssystem in die Form

$$a_{(ik)}\,\mathfrak{x}_{11} + b_{(ik)}\,\mathfrak{x}_{ik} = C^l_{(ik)}\,\mathfrak{x}_l$$

bringen; dabei ist über i, k nicht zu summieren, und ik durchläuft alle Wertpaare aus den Zahlen $1, \ldots, m$ außer 11. Setzt man dann

$$\xi_1 = \frac{\mathfrak{x}_{11}}{\sqrt{\mathfrak{x}_{11}\,\mathfrak{x}_{11}}},$$

so nehmen die Ableitungsgleichungen die Gestalt (A 1') an. Also:

Notwendig und hinreichend dafür, daß durch geeignete Wahl der ξ_λ die c^λ_{ik} für $\lambda \neq 1$ zu Null gemacht werden können, ist das Bestehen von $\frac{m(m+1)}{2} - 1$ Gleichungen (L_M).

Im Falle $m = 2$ sind das zwei Gleichungen, die man auf folgende Form bringen kann:

$$\begin{aligned} c^1_{12}\,\mathfrak{x}_{11} - c^1_{11}\,\mathfrak{x}_{12} &= C^l_{11}\,\mathfrak{x}_l \\ -c^1_{22}\,\mathfrak{x}_{12} + c^1_{12}\,\mathfrak{x}_{22} &= C^l_{22}\,\mathfrak{x}_l. \end{aligned}$$

Genügt das Bestehen zweier solcher Gleichungen, um die Existenz einer Schar oder zweier Scharen von Haupttangentenkurven sicherzustellen? Dazu ist natürlich nach wie vor notwendig, daß eine bzw. zwei solche Gleichungen *mit* $AC - B^2 = 0$ bestehen. Solche kann man sich nun durch Linearkombination der beiden obigen verschaffen [6]).

Man setze

$$\bar{A} = p \cdot A_1 + q \cdot A_2$$

---

[6]) Diesen Hinweis verdanke ich Herrn G. Bol.

usw., also im obigen Falle

$$\overline{A} = p \cdot c^1_{12},$$
$$2\,\overline{B} = -p \cdot c^1_{11} - q \cdot c^1_{22},$$
$$\overline{C} = q \cdot c^1_{12}$$

und bestimme p, q so, daß

$$\overline{A}\,\overline{C} - \overline{B}^2 = 0$$

wird. Man erhält dafür die Gleichung

$$p^2 (c^1_{11})^2 + 2\,p\,q\,(c^1_{11} \cdot c^1_{22} - 2\,(c^1_{12})^2) + q^2 (c^1_{22})^2 = 0;$$

ihre Diskriminante ist

$$4\,(c^1_{12})^2\,[c^1_{11} \cdot c^1_{22} - (c^1_{12})^2],$$

das ist bis auf einen positiven Faktor die Gaußsche Krümmung der F^2_3, auf die die gegebene Fläche abgewickelt wurde. Man sieht nun leicht ein, daß eine reelle Lösung p, q reelle Haupttangentenkurven bedeutet. Also gilt:

Notwendig und hinreichend dafür, daß es auf einer Fläche F^2_n zwei Scharen von Haupttangentenkurven gibt, ist, daß sie zwei Gleichungen (L) genügt. Dann ist sie auf eine F^2_3 abwickelbar; die Haupttangentenkurven sind reell, wenn deren Gaußsche Krümmung negativ ist, und fallen zusammen, wenn sie gleich Null ist. Den Haupttangentenkurven entsprechen die gewöhnlichen Asymptotenlinien auf der F^2_3.

Die letzte Behauptung sieht man so ein: Wählt man auf der F^2_n die Haupttangentenkurven als Parameterkurven, so ist $c^1_{11} = c^1_{22} = 0$, und das bedeutet gerade, daß auf der F^2_3 die Asymptotenlinien Parameterkurven sind.

Ich fasse noch einmal zusammen: *Dafür daß es auf einer F^2_n eine Schar von Haupttangentenkurven gibt, ist das Bestehen einer Differentialgleichung* (L) *mit $AC - B^2 = 0$ notwendig und hinreichend. Für die Existenz von zwei Scharen von Haupttangentenkurven ist Abwickelbarkeit auf eine F^2_3 notwendig, hinreichend ist, daß sich durch Wahl der Normalen $c^\lambda_{ik} = 0$ für $\lambda \neq 1$ erreichen läßt.*

C. Segre [25] hat auf anderem Wege gezeigt, daß eine Fläche, die zwei Gleichungen (L) genügt, entweder in einem E_3 liegt oder in dem Sinne abwickelbar ist, daß sie ein Kegel oder der Ort der Tangenten einer Kurve ist.

§ 7.

Abwickelbarkeit der Torsen.

Da wir gerade bei Abwickelbarkeitsfragen stehen, wollen wir hier nachrechnen, daß die in § 1 eingeführten Torsen T^{r+1}_n:

$$\mathfrak{z}(s, v_\varrho) = \mathfrak{x}(s) + \sum_{\varrho=2}^{r+1} v_\varrho\, \mathfrak{y}_\varrho(s)$$

für die noch die Beziehungen (T 1), (T 2) gelten, auf den E_{r+1} abwickelbar sind. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß die für T_n^{r+1} berechneten Größen g_{ik}, c_{ik}^{λ}, $\varkappa_i^{\mu\lambda}$ den Integrierbarkeitsbedingungen für den E_{r+1} genügen. Diese Bedingungen sind in diesem Falle, daß die linken Seiten von (J 1), das sind die Komponenten des Riemannschen Krümmungstensors, verschwinden.

Wir bezeichnen die Ableitung nach s mit dem Zeiger 1, die Ableitung nach v_ϱ mit dem Zeiger ϱ, bei den $\mathfrak{y}$ trennt ein Komma die Nummer des $\mathfrak{y}$ von der Ableitungsmarke: $\mathfrak{y}_{\varrho,\sigma} = \dfrac{\partial \mathfrak{y}_\varrho}{\partial v_\sigma}$.

Es ist für $\varrho, \sigma = 2, \ldots, r+1$: $\mathfrak{z}_{\varrho\sigma} = 0$, also $\underline{c_{\varrho\sigma}^{\lambda} = 0}$.

Ferner: Die Gleichungen (T 1), (T 2) besagen, daß $\mathfrak{z}_{1\varrho} = \mathfrak{y}_{\varrho,1}$ in der Tangenten-E_{r+1} an T_n^{r+1} liegen, d. h.

$$\underline{c_{1\varrho}^{\lambda} = 0 \text{ für } \varrho > 1.}$$

Wählt man nun weiter den Einheitsvektor der Normalkomponente von $\mathfrak{z}_{11}$ als ξ_1:

$$\xi_1 = \frac{\mathfrak{z}_{11} - \Gamma_{11}^1 \mathfrak{x}_1}{\sqrt{(\mathfrak{z}_{11} - \Gamma_{11}^2 \mathfrak{x}_2)^2}},$$

dann werden alle $c_{ik}^{\lambda} = 0$ mit Ausnahme von c_{11}^1. Geht man mit diesen Werten in (J 1) ein, und zwar in die als gültig vorausgesetzte Bedingung (J 1) für die Fläche T_n^{r+1} als Fläche des E_n, so verschwinden die rechten Seiten, also auch die linken Seiten. Diese linken Seiten sind aber gerade die Größen, deren Verschwinden wir beweisen wollten.

§ 8.

λ-Krümmungslinien. Weitere Kennzeichnungen der Asymptotenlinien und Haupttangentenkurven.

1. Hat man $\xi_\lambda(u^1, u^2)$ einmal für die ganze Fläche festgelegt, so kann man für jedes λ λ-Krümmungsradien einführen durch

$$\frac{1}{R_\lambda} = \frac{\mathfrak{x}_{ik}\,\xi_\lambda\,\dot{u}^i\,\dot{u}^k}{g_{ik}\,\dot{u}^i\,\dot{u}^k} = \frac{c_{ik}^{\lambda}\,\dot{u}^i\,\dot{u}^k}{g_{ik}\,\dot{u}^i\,\dot{u}^k}$$

und kann in bekannter Weise die Extremwerte von R_λ: $R_{\lambda 1}$, $R_{\lambda 2}$ bestimmen, sowie die Richtungen, die diesen Extremwerten entsprechen. Es gibt in jedem Punkt zwei reelle derartige Richtungen. Wählt man diese λ-Krümmungslinien als Parameterkurven, so gelten die den Rodriguesschen entsprechenden Formeln

$$\xi_{\lambda,i} = -\frac{1}{R_{\lambda(i)}}\,\mathfrak{x}_i + \varkappa_i^{\lambda\mu}\,\xi_\mu.$$

(Über i ist hier nicht zu summieren, was durch Einklammern dieses Zeigers angedeutet ist.) Diese Gleichungen besagen: Es ist

$$c_1^{\lambda\,2} = 0, \text{ wenn } u^2 = 0 \ \lambda\text{-Krümmungslinie ist, und}$$

$$c_2^{\lambda\,1} = 0, \text{ wenn } u^1 = 0 \ \lambda\text{-Krümmungslinie ist.}$$

Umgekehrt folgt aus $c_1^{\lambda\,2} = 0$, daß $u^2 = 0$ λ-Krümmungslinie ist. Die Beweise sind die bekannten. Dagegen bilden die ξ_λ im allgemeinen längs der λ-Krümmungslinien keine Torse, dazu ist vielmehr $\varkappa_i^{\lambda\,\mu} = 0$ erforderlich; denn die Forderung (T 1) geht über in

$$\sum_\mu \varkappa_i^{\lambda\,\mu} (\mathfrak{x}_i \times \xi_\mu \times \xi_\lambda) = 0$$

und die 3-Vektoren $(\mathfrak{x}_i \times \xi_\mu \times \xi_\lambda)$ sind linear unabhängig.

2. Sind die Kurven $u^2 = \text{const}$ gleichzeitig für alle λ λ-Krümmungslinien, so sind sie Asymptotenlinien. Denn aus

$$0 = c_1^{\lambda\,2} = c_{11}^{\lambda} g^{12} + c_{12}^{\lambda} g^{22},$$

$$0 = c_1^{u\,2} = c_{11}^{u} g^{12} + c_{12}^{u} g^{22}$$

folgt

$$\begin{vmatrix} c_{11}^{\lambda}, & c_{12}^{\lambda} \\ c_{11}^{u}, & c_{12}^{u} \end{vmatrix} = 0$$

und aus der Darstellung von $\mathfrak{H}_{ik}$ (S. 421) folgt $\mathfrak{H}_{11} = 0$. Ebenso folgt $\mathfrak{H}_{22} = 0$, wenn für alle λ $c_2^{\lambda\,1} = 0$ ist.

3. Auf dieselben Kurven führt die Frage, längs welcher Kurven die Normal-E_{n-2} $\mathfrak{Y} = \xi_1 \times \xi_2 \times \ldots \times \xi_{n-2}$ Torsen bilden. (T 1) liefert, damit die Kurven $u^2 = \text{const}$ derartige Kurven sind, die Bedingungen

$$\mathfrak{x}_1 \times \xi_{\lambda,\,1} \times \xi_1 \times \ldots \times \xi_{n-2} = c_1^{\lambda\,2} (\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2 \times \xi_1 \times \ldots \times \xi_{n-2}) = 0,$$

d. h.

$$c_1^{\lambda\,2} = 0,$$

und zwar muß diese Gleichung gleichzeitig für alle λ erfüllt sein; die gesuchten Kurven sind also die Asymptotenlinien.

4. Die Frage, längs welcher Kurven die Tangentenebenen eine Torse bilden, führt ebenfalls auf die Asymtotenlinien. Für $\mathfrak{Y} = \mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2$, $u^1 = s$, $u^2 = \text{const}$ ergibt (T 1) den Entartungsfall $\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{Y} = 0$, (T 2) ergibt

$$\mathfrak{x}_{11} \times \mathfrak{x}_{21} \times \mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2 = 0 = \mathfrak{H}_{11}.$$

5. Ich führe folgende Bezeichnungen ein:

$$\overset{3}{\mathfrak{C}}_{ik} = \mathfrak{x}_{ik} \times \mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_{ik} \times \mathfrak{P} = \mathfrak{P} \times \mathfrak{x}_{ik}.$$

Dann ist

$$\mathfrak{H}_{11} = \mathfrak{C}_{11} \times \mathfrak{x}_{21}, \quad \mathfrak{H}_{22} = -\mathfrak{C}_{22} \times \mathfrak{x}_{12}.$$

$\mathfrak{C}_{11} = 0$ (bzw. $\mathfrak{C}_{22} = 0$) kennzeichnet die Kurven $u^2 = \text{const}$ (bzw. $u^1 = \text{const}$) als Haupttangentenkurven.

6. Die Asymptotenlinien lassen sich ferner kennzeichnen als diejenigen Kurven, längs denen die 2-Vektoren $\dot{\mathfrak{P}} = \frac{d\mathfrak{P}}{dt}$ (t ein Kurvenparameter) *einfache* 2-Vektoren sind. Es ist nämlich

$$\mathfrak{P}_i = (\mathfrak{x}_{1i} \times \mathfrak{x}_2) + (\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_{2i}),$$

und daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_1 &= -2\,\mathfrak{H}_{11}, \\ \mathfrak{P}_2 \times \mathfrak{P}_2 &= -2\,\mathfrak{H}_{22}, \\ (\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2) + (\mathfrak{P}_2 \times \mathfrak{P}_1) &= -2\,\mathfrak{H}_{12} \end{aligned}$$

(es ist $\mathfrak{H}_{21} = \mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2 \times \mathfrak{x}_{12} \times \mathfrak{x}_{21} = 0$), so daß

$$\mathfrak{H}_{ik}\, \dot{u}^i \dot{u}^k = -\tfrac{1}{2} (\mathfrak{P}_i \times \mathfrak{P}_k)\, \dot{u}^i \dot{u}^k$$

ist. $\mathfrak{H}_{11} = 0$ bedeutet also, daß der 2-Vektor $\mathfrak{P}_1$ einfach ist.

§ 9.

Bemerkungen über Relativ-Geometrie.

Hier ließe sich eine Relativ-Geometrie von Flächen im E_n nach dem Vorbild von W. Süß [3] anschließen. Im E_3 geht man so vor, daß man das sphärische Bild einer Fläche, das ja auf die Fläche durch parallele Tangentenebenen bezogen ist, durch eine (konvexe) Fläche $\mathfrak{e}$ ersetzt, die man ebenfalls durch parallele Tangentenebenen auf die Fläche abbildet.

Hier bieten sich zwei Wege der Verallgemeinerung:

1. Die Gesamtheit der Normal-E_{n-2}: $\mathfrak{N} = \xi_1 \times \ldots \times \xi_{n-2}$ bildet eine Fläche im $E_{\binom{n}{n-2}}$. Für diese gilt $\mathfrak{N}_i \times \mathfrak{P} = 0$, und das kann man als Verallgemeinerung des Falles

$$n - 2 = 1; \quad \mathfrak{N} = \xi; \quad \xi_i \times \mathfrak{P} = 0$$

ansehen; hier im E_3 folgt die letzte Gleichung z. B. aus den Ableitungsgleichungen und bringt zum Ausdruck, daß jede Tangentenrichtung des sphärischen Bildes in die Tangentenebene des entsprechenden Flächenpunktes fällt. — Man hat dann $\mathfrak{N}$ zu ersetzen durch eine Eichfläche $\mathfrak{E}$, die man so auf die Fläche $\mathfrak{x}$ abgebildet denkt, daß $\mathfrak{E}_i \times \mathfrak{P} = 0$ ist. Die Kurven der Fläche $\mathfrak{x}$, längs denen die $\mathfrak{E}$ Torsen bilden, wären dann als R-Krümmungslinien zu bezeichnen usw.

2. Man betrachtet die von einem ξ_λ gebildete Fläche, (die auf der Einheitskugel des E_n liegt). Die Abbildung der Fläche $\mathfrak{x}$ auf die Fläche ξ_λ ist jedoch keine Abbildung durch parallele Tangentenebenen; es ist *nicht* $\xi_{\lambda,i} \times \mathfrak{P} = 0$, sondern, wenn man die Bezeichnung $\mathfrak{N}_\lambda = \xi_1 \times \ldots \times \xi_{\lambda-1} \times \xi_{\lambda+1} \times \ldots \times \xi_{n-2}$ einführt,

$$\xi_{\lambda,i} \times \mathfrak{P} \times \mathfrak{N}_\lambda = 0.$$

Mit dieser schwächeren Eigenschaft kann man sich begnügen. Man wird jetzt an die Stelle der Fläche ξ_λ eine Eichfläche e setzen und e so auf x abbilden, daß mit dem oben eingeführten $\mathfrak{N}_\lambda$

$$e_i \times \mathfrak{P} \times \mathfrak{N}_\lambda = 0$$

wird. Man kann dann wieder R-Krümmungslinien einführen usw.

Beide Wege sollen verfolgt werden; Einzelheiten werden später im Zusammenhang mit dem Variationsproblem angegeben.

3. Kapitel.

Adjungierte Variationsprobleme und adjungierte Extremalflächen bei Doppelintegralen im E_n.

I. Einführung der adjungierten Extremalfläche und des adjungierten Variationsproblems (nach Berwald und Koschmieder).

§ 1.

Allgemeine Beziehungen.

Wir betrachten nur solche Variationsprobleme, die nur von den ersten Ableitungen der gesuchten Funktionen abhängen, also die Gestalt haben:

$$\iint f\left(\frac{\partial z_1}{\partial x}, \frac{\partial z_1}{\partial y}, \frac{\partial z_2}{\partial x}, \frac{\partial z_2}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial z_{n-2}}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

Der Übergang zur Parameterdarstellung liefert als Variationsintegral

$$\text{(V)} \qquad \iint F(\mathfrak{P})\, du^1\, du^2.$$

Die Komponenten von $\mathfrak{P} = \mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2$ bezeichnen wir mit P_{ik}, den 2-Vektor mit den Komponenten $\frac{\partial F}{\partial P_{ik}}$ mit $F_{\mathfrak{P}}$, ebenso den Vektor, dessen Komponenten die Ableitungen von F nach den Komponenten von $\mathfrak{x}_i$ sind, mit $F_{\mathfrak{x}_i}$.

Aus der Forderung der Unabhängigkeit von der Parameterwahl folgen die Homogenitätsbeziehungen

$$P_{ik}\frac{\partial F}{\partial P_{ik}} = \mathfrak{P} \cdot F_{\mathfrak{P}} = F.$$

Die Eulerschen Differentialgleichungen sind

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial}{\partial u^1}(F_{\mathfrak{x}_1}) + \frac{\partial}{\partial u^2}(F_{\mathfrak{x}_2}) = 0.$$

Nun ist $F_{\mathfrak{x}_1} = \mathfrak{x}_2 F_{\mathfrak{P}}$, $F_{\mathfrak{x}_2} = -\mathfrak{x}_1 \cdot F_{\mathfrak{P}}$, wie man am sichersten durch Aufschreiben der Komponenten nachrechnet. (E) geht somit über in:

$$\text{(E')} \qquad \frac{\partial}{\partial u^1}(\mathfrak{x}_2 F_{\mathfrak{P}}) = \frac{\partial}{\partial u^2}(\mathfrak{x}_1 F_{\mathfrak{P}}).$$

Dies sind gerade die Integrabilitätsbedingungen für die Differentialgleichungen

$$(\bar{X}) \qquad \bar{\mathfrak{x}}_i = \mathfrak{x}_i F_{\mathfrak{P}}\ ^{7}).$$

Jeder Extremalfläche des Variationsproblems (V) ist also eine Fläche $\bar{\mathfrak{x}}$ „adjungiert", die durch Quadraturen bestimmt werden kann. Sie wird sich als Extremalfläche des jetzt einzuführenden „adjungierten Variationsproblems" erweisen. Dieses erhalten wir auf folgendem Wege: Wir stellen zu (V) die Indikatrix- und die Figuratrixfläche her und fragen nach einem solchen Variationsproblem, für welches diese beiden Flächen ihre Rollen vertauschen.

§ 2.

Die Figuratrix.

Die Indikatrix $\mathfrak{Y}$ ist bestimmt durch die Gleichung

$$(Y) \qquad F(\mathfrak{Y}) = 1, \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{Y} = \frac{1}{F}\mathfrak{P}.$$

Die Figuratrix $\mathfrak{E}$ wird als polarreziprok zu $\mathfrak{Y}$ bezüglich der Einheitskugel definiert durch die Gleichungen

$$(YE) \qquad \mathfrak{Y}\,\mathfrak{E} = 1, \quad \mathfrak{Y}_i \cdot \mathfrak{E} = 0 \qquad \left(\mathfrak{Y}_i = \frac{\partial\,\mathfrak{Y}}{\partial\,u^i}\right).$$

Daraus folgt:

$$\mathfrak{Y} \cdot \mathfrak{E}_i = 0.$$

$\mathfrak{E} = F_{\mathfrak{P}}$ erfüllt diese Gleichungen; die letzte folgt z. B. daraus, daß $\frac{\partial}{\partial u^i}(F_{\mathfrak{P}}) = (F_i)_{\mathfrak{P}}$ und F_i homogen 0-ter Ordnung in $\mathfrak{P}$ ist. Aber $\mathfrak{E}$ ist dadurch nicht eindeutig bestimmt. Ist z. B.

$$\mathfrak{Y}^* = \mathfrak{y}_1 \times \ldots \times \mathfrak{y}_{n-2},$$

so erfüllt z. B. auch

$$\widehat{\mathfrak{E}} = F_{\mathfrak{P}} + \sum_{i,k=1}^{n-2} y_{ik}(\mathfrak{y}_i \times \mathfrak{y}_k)$$

mit beliebigen Zahlen y_{ik} die Gleichungen (YE). Wir wollen das dazu benutzen, um $\mathfrak{E}$ noch die Bedingung aufzuerlegen, daß $\mathfrak{E}$ einfach sein soll. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist (s. S. 413) $\mathfrak{E} \times \mathfrak{E} = 0$. Ferner wollen wir nachher $\bar{\mathfrak{x}}_i = \mathfrak{x}_i \cdot \mathfrak{E}$ setzen. Dazu muß $\mathfrak{E}$ noch die Gleichung erfüllen:

$$\frac{\partial}{\partial u^1}(\mathfrak{x}_2\,\mathfrak{E}) = \frac{\partial}{\partial u^2}(\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{E}).$$

---

[7]) Daran liegt es, daß sich die hier durchgeführte Theorie nicht auf m-dimensionale ($m > 2$) Flächen ausdehnen läßt. Die Eulerschen Differentialgleichungen sind dann nicht mehr die entsprechenden Integrierbarkeitsbedingungen.

Die Gleichungen, denen $\mathfrak{E}$ genügen soll, sind also (YE), $\mathfrak{E}\times\mathfrak{E}=0$ und die eben angeschriebene. Wir wollen zeigen, daß sich (mindestens) ein solcher 2-Vektor $\mathfrak{E}$ stets finden läßt. Dazu setzen wir an

$$\mathfrak{E} = F_{\mathfrak{P}} + \mathfrak{G}.$$

Dann ergeben sich für $\mathfrak{G}$ die Bedingungen

1. $\mathfrak{G}\cdot\mathfrak{Y} = 0$ bzw. $\mathfrak{G}\cdot\mathfrak{P} = 0$ oder $\underline{\mathfrak{G}\times\mathfrak{P}^* = 0}$.

2. $\mathfrak{G}\cdot\mathfrak{Y}_i = 0$, das ist $= \mathfrak{G}\cdot\mathfrak{P}\cdot\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{1}{F}\right) + \mathfrak{G}\cdot\mathfrak{P}_i\cdot\frac{1}{F} = 0$,

also $\underline{\mathfrak{G}\times\mathfrak{P}_i^* = 0}$ [8]).

3. $$\frac{\partial}{\partial u^1}(\mathfrak{x}_2\,\mathfrak{G}) = \frac{\partial}{\partial u^2}(\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{G}).$$

Wir zerlegen die 2-Vektoren in dem Koordinatensystem $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \xi_1, \ldots, \xi_{n-2}$ in Komponenten nach folgendem Schema

$$F_{\mathfrak{P}} = F_0(\mathfrak{x}_1\times\mathfrak{x}_2) + F_{1\varrho}(\mathfrak{x}_1\times\xi_\varrho) + F_{2\varrho}(\mathfrak{x}_2\times\xi_\varrho) + F_{\varrho\sigma}(\xi_\varrho\times\xi_\sigma)\ [9]).$$

Es ist

$$\mathfrak{P} = (\mathfrak{x}_1\times\mathfrak{x}_2), \quad \mathfrak{P}^* = \sqrt{g}\,(\xi_1\times\ldots\times\xi_{n-2}),$$

$$\mathfrak{P}_i^* = (\sqrt{g})_i(\xi_1\times\ldots\times\xi_{n-2}) + \sqrt{g}(\xi_{1,i}\times\ldots) + \ldots + \sqrt{g}(\ldots\times\xi_{n-2,i}).$$

Für die Komponenten von $\mathfrak{G}$ ergibt sich aus 1. $G_0 = 0$, 3. ist am einfachsten erfüllt, wenn alle $G_{1\varrho} = G_{2\varrho} = 0$ gesetzt werden, und damit ist zugleich auch 2. erfüllt. Wir fragen, ob sich die allein noch übrigen $G_{\varrho\sigma}$ so bestimmen lassen, daß $\mathfrak{E}\times\mathfrak{E} = 0$ wird.

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}\times\mathfrak{E} = {} & (\mathfrak{x}_1\times\mathfrak{x}_2\times\xi_\varrho\times\xi_\sigma)(E_0\ E_{\varrho\sigma} - E_{1\varrho}E_{2\sigma} + E_{1\sigma}E_{2\varrho}) \\ & + (\mathfrak{x}_1\times\xi_\varrho\times\xi_\sigma\times\xi_\tau)(E_{1\varrho}E_{\sigma\tau} - E_{1\sigma}E_{\varrho\tau} + E_{1\tau}E_{\varrho\sigma}) \\ & + (\mathfrak{x}_2\times\xi_\varrho\times\xi_\sigma\times\xi_\tau)(E_{2\varrho}E_{\sigma\tau} - E_{2\sigma}E_{\varrho\tau} + E_{2\tau}E_{\varrho\sigma}) \\ & + (\xi_\varrho\times\xi_\sigma\times\xi_\tau\times\xi_\nu)(E_{\varrho\sigma}E_{\tau\nu} - E_{\varrho\tau}E_{\sigma\nu} + E_{\varrho\nu}E_{\sigma\tau}) = 0.\end{aligned}$$

Da die hingeschriebenen 4-Vektoren linear unabhängig sind, müssen ihre Koeffizienten einzeln verschwinden. Der erste ergibt:

$$E_{\varrho\sigma} = \frac{1}{E_0}(E_{1\varrho}E_{2\sigma} - E_{1\sigma}E_{2\varrho}).$$

---

[8]) Aus der Definition der Ergänzung folgt

$$\left(\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial u^i}\right)^* = \frac{\partial\mathfrak{P}^*}{\partial u^i},$$

so daß dafür ohne Bedenken $\mathfrak{P}_i^*$ geschrieben werden kann.

[9]) Dabei ist z. B. $F_{1\sigma} \neq F_{\varrho\sigma}$ für $\varrho = 1$.

Trägt man diese Werte $E_{\varrho\sigma}$ in die übrigen Koeffizienten ein, so verschwinden diese.

Man hat nun nur noch $E_0 = F_0$, $E_{1\varrho} = F_{1\varrho}$, $E_{2\varrho} = F_{2\varrho}$, $E_{\varrho\sigma} = F_{\varrho\sigma} + G_{\varrho\sigma}$ einzutragen; das liefert

$$G_{\varrho\sigma} = -F_{\varrho\sigma} + \frac{1}{F_0}(F_{1\varrho}F_{2\sigma} - F_{1\sigma}F_{2\varrho}).$$

Damit ist $\mathfrak{G}$ so bestimmt, daß $\mathfrak{E}$ die verlangten Eigenschaften hat.

Eine weitere Frage, die für Späteres von Belang ist, ist die, ob dem 2-Vektor $\mathfrak{E}$ noch die Bedingung $\mathfrak{E}\times\mathfrak{P} = 0$ auferlegt werden kann. Es ist

$$\mathfrak{E}\times\mathfrak{P} = E_{\varrho\sigma}(\xi_\varrho \times \xi_\sigma \times \mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2),$$

es müßten also alle $E_{\varrho\sigma} = 0$ werden. Bei unserer Wahl $G_{1\varrho} = G_{2\varrho} = 0$ ergibt das

$$F_{1\varrho}F_{2\sigma} - F_{1\sigma}F_{2\varrho} = 0,$$

also eine Bedingung für das Variationsproblem. Die Frage, ob sich $\mathfrak{E}\times\mathfrak{P} = 0$ erreichen läßt, wenn man nicht von vornherein $G_{1\varrho} = G_{2\varrho} = 0$ wählt, bleibt offen.

Die Forderung, daß $\mathfrak{E}$ einfach ist, ist für die spätere Rechnung notwendig. Koschmieder geht so vor: er fordert, daß $F_\mathfrak{P}$ einfach ist, und setzt $\mathfrak{E} = F_\mathfrak{P}$. Für den Fall $n = 4$ hat H. Kneser (Fußnote 11 der Arbeit von Koschmieder) gezeigt, daß die Forderung $F_\mathfrak{P}\times F_\mathfrak{P} = 0$ keine wesentliche Einschränkung für das Variationsproblem bedeutet, und zwar auf folgendem Wege: $\mathfrak{P}$ unterliegt der Bedingung $\mathfrak{P}\times\mathfrak{P} = 0$. Das ist im Falle $n = 4$ eine quadratische Gleichung für die Komponenten von $\mathfrak{P}$. Deutet man $\mathfrak{P}$ als Vektor im 6-dimensionalen Raume, so wird durch diese Gleichung ein Kegel bestimmt. Nun interessiert von F nur das Verhalten auf diesem Kegel; denn nur diejenigen Stücke der Lösungen $\mathfrak{P}$, die auf diesem Kegel liegen, liefern die Extremalflächen des E_4. Ist nun $F(\mathfrak{P})$ im 6-dimensionalen Raume gegeben, so läßt sich, wie Kneser zeigt, eine Funktion $G(\mathfrak{P})$ so finden, daß auf dem Kegel $F = G$ und dort auch $G_\mathfrak{P}\times G_\mathfrak{P} = 0$ ist; es kann also an Stelle des Variationsproblems mit der Integrandenfunktion F das mit der Integrandenfunktion G betrachtet werden.

Auf den Fall des E_n wäre das folgendermaßen zu übertragen: $\mathfrak{P}\times\mathfrak{P} = 0$ bedeutet jetzt $N = \binom{n}{4}$ Gleichungen für die Komponenten des 4-Vektors $\mathfrak{P}\times\mathfrak{P}$, die mit $\{\mathfrak{P}\times\mathfrak{P}\}_M$ bezeichnet seien. Jeder der Gleichungen $\{\mathfrak{P}\times\mathfrak{P}\}_M = 0$ ist eine bestimmte Gleichung $\{F_\mathfrak{P}\times F_\mathfrak{P}\}_M = 0$ zugeordnet, nämlich die, in der dieselben P_{ik} verwandt sind.

Man bestimme F^1 so, daß auf dem Kegel $\{\mathfrak{P}\times\mathfrak{P}\}_1 = 0$

$$F^1 = F \quad \text{und} \quad F^1_\mathfrak{P}\times F^1_\mathfrak{P} = 0$$

wird, dann F^2 so, daß auf dem Kegel $\{\mathfrak{P}\times\mathfrak{P}\}_2 = 0$

$$F^2 = F^1 \quad \text{und} \quad F^2_{\mathfrak{P}}\times F^2_{\mathfrak{P}} = 0$$

wird, usw. Schließlich wird F^N auf dem Durchschnitt aller Kegel $\{\mathfrak{P}\times\mathfrak{P}\}_M = 0$ mit F übereinstimmen, und es wird dort $F^N_{\mathfrak{P}}\times F^N_{\mathfrak{P}} = 0$ sein.

§ 3.

Das adjungierte Variationsproblem.

1. Man kann rein formal definieren: Das Variationsproblem

$$(\overline{\mathrm{V}}) \qquad \iint \bar{F}(\mathfrak{Q})\, du^1\, du^2 = \text{Extr.}, \qquad \mathfrak{Q} = \mathfrak{z}_1\times\mathfrak{z}_2,$$

heißt zu (V) adjungiert, wenn ($\bar{F}(\mathfrak{Q})$ in $\mathfrak{Q}$ homogen erster Ordnung und)

$$\bar{F}_{\mathfrak{Q}} = \mathfrak{Y}$$

ist. Aus der Homogenität folgt

$$\bar{F} = \mathfrak{Q}\cdot\bar{F}_{\mathfrak{Q}} = \mathfrak{Q}\cdot\mathfrak{Y},$$

und die Eulerschen Differentialgleichungen sind

$$(\overline{\mathrm{E}}) \qquad \frac{\partial}{\partial u^1}(\mathfrak{z}_2\,\mathfrak{Y}) = \frac{\partial}{\partial u^2}(\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{Y}).$$

Wir behaupten: sie sind für $\mathfrak{z}_i = \bar{\mathfrak{x}}_i = \mathfrak{x}_i\cdot\mathfrak{E}$ erfüllt, d. h. $\mathfrak{x}$ ist Extremalfläche von ($\overline{\mathrm{V}}$).

Wir berechnen

$$\bar{\mathfrak{x}}_1\,\mathfrak{Y} = \frac{1}{F}\cdot\bar{\mathfrak{x}}_1\,\mathfrak{P}.$$

Nach (S) (s. S. 414) ist

$$\bar{\mathfrak{x}}_1\,\mathfrak{P} = (\bar{\mathfrak{x}}_1\times\mathfrak{P}^*)^* = \bar{\mathfrak{x}}_1^{*R}\times\mathfrak{P} = \bar{\mathfrak{x}}_1^{*R}\times(\mathfrak{x}_1\times\mathfrak{x}_2)$$

und nach der Zerlegungsformel

$$= -(\bar{\mathfrak{x}}_1^*\times\mathfrak{x}_1)^*\,\mathfrak{x}_2 + (\bar{\mathfrak{x}}_1^*\times\mathfrak{x}_2)\,\mathfrak{x}_1,$$

also schließlich

$$\bar{\mathfrak{x}}_1\,\mathfrak{P} = (\bar{\mathfrak{x}}_1\,\mathfrak{x}_2)\,\mathfrak{x}_1 - (\bar{\mathfrak{x}}_1\,\mathfrak{x}_1)\,\mathfrak{x}_2.$$

Nach ($\overline{\mathrm{X}}$), S. 429, und (S 2), S. 415, ist

$$(\mathrm{O}) \qquad \begin{cases} \bar{\mathfrak{x}}_1\,\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_1\,\bar{\mathfrak{x}}_1 = \mathfrak{x}_1(\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{E}) = \pm(\mathfrak{x}_1\times\mathfrak{x}_1)\mathfrak{E} = 0 \\ \text{und} \\ \bar{\mathfrak{x}}_1\,\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_2\,\bar{\mathfrak{x}}_1 = (-1)^{n-2}(\mathfrak{x}_2\times\mathfrak{x}_1)\,\mathfrak{E} = (-1)^{n-1}\,\mathfrak{P}\,\mathfrak{E} = (-1)^{n-1}F, \end{cases}$$

also

$$(\overline{\mathrm{X}}') \qquad \bar{\mathfrak{x}}_1\,\mathfrak{Y} = (-1)^{n-1}\,\mathfrak{x}_1 \text{ und ebenso } \bar{\mathfrak{x}}_2\,\mathfrak{Y} = (-1)^{n-1}\,\mathfrak{x}_2.$$

Daraus folgt, daß die Gleichungen ($\overline{\mathrm{E}}$) erfüllt sind, w. z. b. w.

Aus (O) folgt ferner

$$\bar{\mathfrak{x}}_1\,\mathfrak{x}_1 = 0, \quad \bar{\mathfrak{x}}_2\,\mathfrak{x}_2 = 0, \quad \bar{\mathfrak{x}}_1\,\mathfrak{x}_2 + \bar{\mathfrak{x}}_2\,\mathfrak{x}_1 = 0,$$

d. h. *auf den Flächen* $\mathfrak{x}$ *und* $\bar{\mathfrak{x}}$ *stehen entsprechende Linienelemente aufeinander senkrecht.*

2. Es ist ferner $F(\mathfrak{P}) = \overline{F}(\overline{\mathfrak{P}})$.

Um das festzustellen, berechnen wir $\overline{\mathfrak{P}}$:

$$\overline{\mathfrak{P}} = (\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{E}) \times (\mathfrak{x}_2\,\mathfrak{E}) = [(\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{E})^* \overset{R}{\times} (\mathfrak{x}_2\,\mathfrak{E})^*]^* = [(\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{E})^* \overset{R}{\times} (\mathfrak{x}_2 \times \mathfrak{E}^*)]^*.$$

Hierauf wenden wir die Zerlegungsformel an; dazu muß $\mathfrak{E}^*$ als einfach vorausgesetzt werden; $\mathfrak{E}^*$ ist einfach, wenn $\mathfrak{E}$ einfach ist.

Sei

$$\mathfrak{E}^* = \mathfrak{e}_1 \times \ldots \times \mathfrak{e}_{n-2},$$

dann ist

$$(\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{E})^* \times \mathfrak{e}_i = \mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{e}_1 \times \ldots \times \mathfrak{e}_{n-2} \times \mathfrak{e}_i = 0,$$

also wird

$$\overline{\mathfrak{P}} = (-1)^{n-2}\,[((\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{E})^* \times \mathfrak{x}_2)^*\,\mathfrak{E}^*]^*,$$

$$\overline{\mathfrak{P}} = (-1)^{n-2}\,(\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{E}^* \times \mathfrak{x}_2)^*\,\mathfrak{E} = (\mathfrak{P}\mathfrak{E})\,\mathfrak{E},$$

$$(\overline{\mathrm{P}}) \qquad \overline{\mathfrak{P}} = F \cdot \mathfrak{E}.$$

Einsetzen in $\overline{F}(\overline{\mathfrak{P}}) = \overline{\mathfrak{P}} \cdot \mathfrak{Y}$ ergibt die Behauptung.

3. Wesentlich konkreter ist das Verfahren, das Koschmieder benutzt, um das adjungierte Variationsproblem zu ermitteln; es setzt allerdings $\mathfrak{E} = F_{\mathfrak{P}}$ voraus, was bisher nicht benutzt wurde.

Koschmieder geht aus von dem Gleichungssystem $(\overline{\mathrm{P}})$. Die rechte Seite ist abhängig von $\mathfrak{P}$. Man denke nun dieses Gleichungssystem nach den $\mathfrak{P}$ aufgelöst und erhält

$$\mathfrak{P} = \boldsymbol{\Phi}(\overline{\mathfrak{P}}).$$

Trägt man das in $F(\mathfrak{P})$ ein, so erhält man

$$F(\mathfrak{P}) = F(\boldsymbol{\Phi}(\overline{\mathfrak{P}})) = \overline{F}(\overline{\mathfrak{P}});$$

hierdurch ist $\overline{F}$ definiert.

Es ist zu zeigen:

1. $\overline{F}(\overline{\mathfrak{P}})$ ist in $\overline{\mathfrak{P}}$ homogen erster Ordnung.

2. $\bar{\mathfrak{x}}$ ist Extremalfläche von $\iint \overline{F}(\overline{\mathfrak{P}})\,du^1\,du^2 = \mathrm{Extr.}$

Aus $F = \mathfrak{P}\mathfrak{E}$ folgt, daß $\mathfrak{E}$ homogen 0-ter Ordnung in $\mathfrak{P}$ ist, somit folgt aus $(\overline{\mathrm{P}})$, daß $\overline{\mathfrak{P}}$ homogen erster Ordnung in $\mathfrak{P}$ ist. Also ist

$$\overline{F}(k \cdot \overline{\mathfrak{P}}) = F(k \cdot \boldsymbol{\Phi}(\overline{\mathfrak{P}})) = k \cdot F(\mathfrak{P}) = k \cdot \overline{F}(\overline{\mathfrak{P}}), \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Zum Beweis der zweiten Behauptung genügt es, zu zeigen, daß $\bar{F}_{\overline{\mathfrak{P}}} = \mathfrak{Y}$ ist. Der Deutlichkeit halber muß jetzt in Komponenten geschrieben werden.

Aus $(\overline{\mathrm{P}})$ folgt

$$\overline{\mathfrak{P}}\,\mathfrak{Y} = F, \text{ d. h. } \overline{P}_{ik}\,Y_{ik} = F = \overline{F},$$

also ist

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{P}_{ij}} = Y_{ij} + \bar{P}_{kl}\frac{\partial Y_{kl}}{\partial \bar{P}_{ij}}. \tag{1}$$

Nun war

$$Y_{kl} = \frac{P_{kl}}{F},$$

also ist

$$\frac{\partial Y_{kl}}{\partial \bar{P}_{ij}} \cdot \bar{P}_{kl} = \frac{\bar{P}_{kl}}{F} \cdot \frac{\partial P_{kl}}{\partial \bar{P}_{ij}} - \frac{\bar{P}_{kl} \cdot P_{kl}}{F^2} \cdot \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{P}_{ij}}. \tag{2}$$

Aus $(\bar{\mathrm{P}})$ folgt weiter:

$$\bar{P}_{kl} \cdot P_{kl} = F^2; \tag{3}$$

Ferner ist

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{P}_{ij}} = \frac{\partial F}{\partial P_{kl}} \frac{\partial P_{kl}}{\partial \bar{P}_{ij}} \tag{4}$$

und wegen $(\bar{\mathrm{P}})$ und $F_{\mathfrak{P}} = \mathfrak{E}$ (!)

$$\frac{\partial F}{\partial P_{kl}} = E_{kl} = \frac{\bar{P}_{kl}}{F}.$$

Trägt man dies in (4) und dann $\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{P}_{ij}}$ aus (4), ferner (3) in (2) ein. so erhält man

$$\bar{P}_{kl}\frac{\partial Y_{kl}}{\partial \bar{P}_{ij}} = 0$$

und damit aus (1) $\bar{F}_{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P}$, w. z. b. w.

II. Relativgeometrie bezüglich $\mathfrak{E}^*$.

§ 4.

Die „parallele“ Zuordnung.

Im E_3 ist $\mathfrak{E}^* = \mathfrak{n}$ ein 1-Vektor, und die Endpunkte der Vektoren $\mathfrak{n}(u^1, u^2)$ erzeugen eine Fläche, die der Fläche $\mathfrak{x}$ durch parallele Tangentenebenen zugeordnet ist; das wird ausgedrückt durch die Gleichungen

$$\mathfrak{n}_i \times \mathfrak{P} = 0.$$

Jetzt tritt an die Stelle der Fläche $\mathfrak{n}$ eine zweiparametrige Schar von $(n-2)$-Vektoren $\mathfrak{E}^*(u^1, u^2)$, die man als Fläche im $E_{\binom{n}{n-2}}$ deuten kann. Eine Art paralleler Zuordnung zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{E}^*$ besteht darin, daß

$$\mathfrak{E}_i^* \times \mathfrak{P} = 0$$

ist. Das folgt aus

$$\mathfrak{E}_i \cdot \mathfrak{Y} = 0.$$

Im dreidimensionalen Falle kann man dann $\mathfrak{n}_i$ in der Form darstellen

$$\mathfrak{n}_i = b_i^k \mathfrak{x}_k.$$

Diese Darstellung läßt sich in der Weise verallgemeinern, daß an die Stelle der Skalare b_i^k vier $(n-3)$-Vektoren $\mathfrak{B}_i^k$ treten. Ich behaupte: $\mathfrak{E}_i^*$ läßt sich darstellen in der Form

(B) $$\mathfrak{E}_i^* = \mathfrak{B}_i^k \times \mathfrak{x}_k.$$

Sei

$$\mathfrak{E}^* = \mathfrak{e}_1 \times \ldots \times \mathfrak{e}_{n-2}.$$

Es ist $(\mathfrak{E}^* \times \mathfrak{P})^* = F \neq 0$, also sind die Vektoren $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{e}_\varrho$ $(\varrho = 1, \ldots, n-2)$ linear unabhängig. In diesem Koordinatensystem zerlegen wir $\mathfrak{E}_i^*$ in Komponenten. Dazu setzen wir

$$\mathfrak{E}_\varrho^* = \mathfrak{e}_1 \times \ldots \times \mathfrak{e}_{\varrho-1} \times \mathfrak{e}_{\varrho+1} \times \ldots \times \mathfrak{e}_{n-2},$$
$$\mathfrak{E}_{\varrho\sigma}^* = \mathfrak{e}_1 \times \ldots \times \mathfrak{e}_{\varrho-1} \times \mathfrak{e}_{\varrho+1} \times \ldots \times \mathfrak{e}_{\sigma-1} \times \mathfrak{e}_{\sigma+1} \times \ldots \times \mathfrak{e}_{n-2}.$$

Dann läßt sich mit einer nur an dieser Stelle benutzten Bezeichnungsweise $\mathfrak{E}_i^*$ so schreiben:

$$\mathfrak{E}_i^* = E_i \cdot \mathfrak{E}^* + E_{i\varrho}^1 (\mathfrak{E}_\varrho^* \times \mathfrak{x}_1) + E_{i\varrho}^2 (\mathfrak{E}_\varrho^* \times \mathfrak{x}_2) + E_{i\varrho\sigma} (\mathfrak{E}_{\varrho\sigma}^* \times \mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2).$$

(Über griechische Zeiger ist von 1 bis $n-2$ zu summieren.) Aus $\mathfrak{E}_i^* \times \mathfrak{P} = 0$ folgt $E_i = 0$. Wir können also z. B.

$$\mathfrak{B}_i^1 = E_{i\varrho}^1 \mathfrak{E}_\varrho^* - \tfrac{1}{2} E_{i\varrho\sigma} (\mathfrak{E}_{\varrho\sigma}^* \times \mathfrak{x}_2),$$
$$\mathfrak{B}_i^2 = E_{i\varrho}^2 \mathfrak{E}_\varrho^* + \tfrac{1}{2} E_{i\varrho\sigma} (\mathfrak{E}_{\varrho\sigma}^* \times \mathfrak{x}_1)$$

setzen.

Trägt man die Werte $\mathfrak{E}_i^*$ aus (B) in die Eulerschen Differentialgleichungen

$$\mathfrak{x}_1 \mathfrak{E}_2 - \mathfrak{x}_2 \mathfrak{E}_1 = (\mathfrak{E}_2^* \times \mathfrak{x}_1) - (\mathfrak{E}_1^* \times \mathfrak{x}_2) = 0$$

ein, so erhält man

$$(\mathfrak{B}_1^1 + \mathfrak{B}_2^2) \times \mathfrak{P} = 0.$$

In dem Sonderfall des Variationsproblems der Oberfläche von Flächen im E_3 drückt diese Gleichung *das Verschwinden der mittleren Krümmung* aus.

§ 5.

Einander entsprechende Kurven.

1. Auf $\mathfrak{x}$ wurden in Kap. 2, § 8, die Tensoren eingeführt

$$\mathfrak{C}_{ik} = \mathfrak{x}_{ik} \times \mathfrak{P} = -\mathfrak{x}_i \times \mathfrak{P}_k.$$

Ich führe entsprechend für die Fläche $\mathfrak{E}^*$ ein

$$B_{ik} = \mathfrak{E}_{ik}^* \times \mathfrak{P} = -\mathfrak{E}_i^* \times \mathfrak{P}_k.$$

(Es ist $\mathfrak{C}_{ik} = \mathfrak{C}_{ki}$, $B_{ik} = B_{ki}$.)

Nun ist

$$\mathfrak{E}^*_{ik} = \frac{\partial}{\partial u^k}(\mathfrak{B}^l_i)\times\mathfrak{x}_l + \mathfrak{B}^l_i\times\mathfrak{x}_{lk},$$

also

$$B_{ik} = \mathfrak{B}^l_i\times\mathfrak{C}_{lk},$$

ausgeschrieben z. B.

$$B_{12} = \mathfrak{B}^1_1\times\mathfrak{C}_{12} + \mathfrak{B}^2_1\times\mathfrak{C}_{22}$$

$$B_{21} = \mathfrak{B}^1_2\times\mathfrak{C}_{11} + \mathfrak{B}^2_2\times\mathfrak{C}_{21}.$$

Hieraus folgt: Ist $\mathfrak{C}_{11} = \mathfrak{C}_{22} = 0$, so ist

$$B_{12} + B_{21} = 2\,B_{12} = (\mathfrak{B}^1_1 + \mathfrak{B}^2_2)\times\mathfrak{C}_{12} = (\mathfrak{B}^1_1 + \mathfrak{B}^2_2)\times\mathfrak{P}\times\mathfrak{x}_{12} = 0,$$

d. h. *den Haupttangentenkurven auf $\mathfrak{x}$ entsprechen auf $\mathfrak{E}^*$ Kurven, die bezüglich der Form $B_{ik}\,u^i\,u^k$ konjugiert sind.*

2. Für die Fläche $\bar{\mathfrak{x}}$ berechnet man die Größen $\bar{\mathfrak{C}}_{ik} = \bar{\mathfrak{x}}_{ik}\times\bar{\mathfrak{P}}$ folgendermaßen: Es ist

$$\bar{\mathfrak{x}}_{ik} = \mathfrak{x}_{ik}\,\mathfrak{E} + \mathfrak{x}_i\,\mathfrak{E}_k$$

nach (X).

$$(\mathfrak{x}_{ik}\,\mathfrak{E})\times\bar{\mathfrak{P}} = \frac{1}{F}(\mathfrak{x}_{ik}\,\bar{\mathfrak{P}})\times\bar{\mathfrak{P}} = \frac{1}{F}[(\mathfrak{x}_{ik}\,\bar{\mathfrak{x}}_2)\,\bar{\mathfrak{x}}_1 - (\mathfrak{x}_{ik}\,\bar{\mathfrak{x}}_1)\,\bar{\mathfrak{x}}_2]\times(\bar{\mathfrak{x}}_1\times\bar{\mathfrak{x}}_2) = 0;$$

also ist

$$\bar{\mathfrak{C}}_{ik} = ((\mathfrak{x}_i\mathfrak{E}_k)\times\mathfrak{E})\cdot F.$$

Daraus ergibt sich, wie wir jetzt zeigen wollen: *Den Haupttangentenkurven auf $\bar{\mathfrak{x}}$ entsprechen auf $\mathfrak{x}$ diejenigen Kurven, längs denen die $\mathfrak{E}^*$ Torsen bilden*; und umgekehrt.

Beweis. Sei $\bar{\mathfrak{C}}_{11} = 0$, d. h. $(\mathfrak{x}_1\times\mathfrak{E}^*_1)\overset{R}{\times}\mathfrak{E}^* = 0$. Zur Vereinfachung der Schreibweise führe ich den Fall $n = 4$ durch. Sei also

$$\mathfrak{E}^* = \mathfrak{e}_1\times\mathfrak{e}_2,$$

dann ist

$$\mathfrak{E}^*_1 = (\mathfrak{e}_{1,1}\times\mathfrak{e}_2) + (\mathfrak{e}_1\times\mathfrak{e}_{2,1}),$$

$$\mathfrak{x}_1\times\mathfrak{E}^*_1 = (\mathfrak{x}_1\times\mathfrak{e}_{1,1}\times\mathfrak{e}_2) + (\mathfrak{x}_1\times\mathfrak{e}_1\times\mathfrak{e}_{2,1})$$

und nach der Zerlegungsformel

$$(\mathfrak{x}_1\times\mathfrak{E}^*_1)\overset{R}{\times}\mathfrak{E}^* = -(\mathfrak{x}_1\times\mathfrak{e}_{1,1}\times\mathfrak{e}_2\times\mathfrak{e}_1)^*\,\mathfrak{e}_2 + (\mathfrak{x}_1\times\mathfrak{e}_1\times\mathfrak{e}_{2,1}\times\mathfrak{e}_2)^*\,\mathfrak{e}_1,$$

und da $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ linear unabhängig sind, folgt hieraus (T 1) für $\mathfrak{E}^*$. Die Bedingung (T 1) ist hier hinreichend; denn aus $\mathfrak{x}_1\times\mathfrak{E}^* = 0$ würde $\mathfrak{x}_1\mathfrak{E} = 0$ und somit $\mathfrak{x}_2(\mathfrak{x}_1\mathfrak{E}) = -\mathfrak{P}\mathfrak{E} = -F = 0$ folgen.

3. Im 2. Kap., § 8, 6, waren die Asymptotenlinien von $\mathfrak{x}$ gekennzeichnet als diejenigen Kurven, längs denen die 2-Vektoren $\mathfrak{P}$ einfach sind. Fragt

man nach denjenigen Kurven von $\mathfrak{x}$, längs denen die $\dot{\mathfrak{E}}$ einfach sind, so ergibt sich aus $\mathfrak{E} = \frac{1}{F}(\bar{\mathfrak{x}}_1 \times \bar{\mathfrak{x}}_2)$:

$$\mathfrak{E}_1 \times \mathfrak{E}_1 = \frac{2}{F^2}(\bar{\mathfrak{x}}_{11} \times \bar{\mathfrak{x}}_2 \times \bar{\mathfrak{x}}_1 \times \bar{\mathfrak{x}}_{21}) = -\frac{2}{F^2}\bar{\mathfrak{H}}_{11};$$

aus $\mathfrak{E}_1 \times \mathfrak{E}_1 = 0$ folgt also $\bar{\mathfrak{H}}_{11} = 0$, d. h. *den Kurven auf* $\mathfrak{x}$, *längs denen die* $\dot{\mathfrak{E}}$ *einfach sind, entsprechen auf* $\bar{\mathfrak{x}}$ *die Asymptotenlinien.*

Zu diesen Ergebnissen führt die Relativgeometrie erster Art (s. 2. Kap. § 10). Sie haben den empfindlichen Nachteil, daß die hier betrachteten Kurven nicht immer existieren (s. 2. Kap., § 5 und 6). Wir gehen jetzt zur zweiten Art Relativgeometrie über.

III. Relativgeometrie bezüglich e.

§ 6.

Bedingungen für $\mathfrak{E}^*$-Krümmungslinien.

$\mathfrak{E}^*$-Krümmungslinien gibt es nicht auf allen Flächen. Wir schreiben die Bedingungen dafür auf, daß längs einer Kurve der Fläche $\mathfrak{x}$ die $\mathfrak{E}^*$ eine Torse bilden, um festzustellen, ob sich auf jeder Fläche Kurven finden lassen, die wenigstens einen Teil dieser Bedingungen erfüllen.

Die Richtungen der $\mathfrak{E}^*$-Krümmungslinien in einem Flächenpunkt sind nach (T 1) bestimmt durch die Gleichungen:

$$\dot{\mathfrak{x}} \times \dot{\mathfrak{e}}_\varrho \times \mathfrak{E}^* = 0 \text{ für alle } \varrho = 1, \ldots, n-2. \tag{1}$$

Mit $\dot{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x}_i \dot{u}^i$, $\dot{\mathfrak{e}}_\varrho = \mathfrak{e}_{\varrho,i} \dot{u}^i$ wird daraus:

$$(\mathfrak{x}_i \times \mathfrak{e}_{\varrho,k} \times \mathfrak{E}^*)\, \dot{u}^i \dot{u}^k = 0 \qquad (\varrho = 1, \ldots, n-2). \tag{2}$$

Führt man $\beta^k_{(\varrho)\,i}$ und $\lambda^\sigma_{(\varrho)\,i}$ ein durch die Gleichung

$$\mathfrak{e}_{\varrho,k} = \beta^l_{(\varrho)\,k}\, \mathfrak{x}_l + \lambda^\sigma_{(\varrho)\,k}\, \mathfrak{e}_\sigma, \tag{3}$$

so folgt aus (2) nach Kürzen durch den Faktor

$$\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2 \times \mathfrak{E}^* = \mathfrak{P} \times \mathfrak{E}^* = F,$$

der stets als $\neq 0$ vorausgesetzt wird,

$$\beta^2_{(\varrho)\,1}\, \dot{u}^1 \dot{u}^1 + (\beta^2_{(\varrho)\,2} - \beta^1_{(\varrho)\,1})\, \dot{u}^1 \dot{u}^2 - \beta^1_{(\varrho)\,2}\, \dot{u}^2 \dot{u}^2 = 0. \tag{4}$$

Das ist für jedes ϱ eine quadratische Gleichung für $\frac{\dot{u}^2}{\dot{u}^1}$, sie liefert also für jeden Wert von ϱ zwei Richtungen auf der Fläche. Dann und nur dann, wenn diese Richtungen für alle ϱ dieselben sind, gibt es $\mathfrak{E}^*$-Krümmungslinien. Wir können aber einen bestimmten Wert von ϱ herausgreifen und für diesen $\mathfrak{e}_\varrho$-Krümmungsrichtungen und damit $\mathfrak{e}_\varrho$-Krümmungslinien definieren.

Wir werden dann zu fragen haben, ob es etwa bei unserem Variationsproblem allgemein oder wenigstens bei besonderen Variationsproblemen eine Möglichkeit gibt, einen Vektor $\mathfrak{e}_\varrho$ innerhalb $\mathfrak{E}^*$ auf natürliche Weise auszuzeichnen. Zunächst wollen wir einige geometrische Aussagen über die $\mathfrak{e}_\varrho$-Krümmungslinien machen.

§ 7.

Geometrische Eigenschaften der e-Krümmungslinien.

1. Wir ändern zunächst die Bezeichnungsweise ein wenig ab. Für das ausgezeichnete $\mathfrak{e}_\varrho$ schreiben wir einfach $\mathfrak{e}$ und für die übrigen $\mathfrak{e}_\sigma$: ξ_σ. Griechische Zeiger laufen jetzt von 1 bis $n-3$. Bei der späteren Anwendung werden nämlich die ξ_σ Vektoren der Normal-E_{n-2} sein. Daß sie Einheitsvektoren und untereinander und zu $\mathfrak{e}$ orthogonal sind, kann schon an dieser Stelle vorausgesetzt werden:

$$\mathfrak{e} \cdot \xi_\sigma = 0; \quad \xi_\sigma \xi_\tau = \delta_{\sigma\tau}.$$

Es ist also $\mathfrak{E}^* = \mathfrak{e} \times \xi_1 \times \ldots \times \xi_{n-3}$.

Gleichung (3) ist jetzt so zu schreiben:

$$\mathfrak{e}_k = \beta_k^l \mathfrak{x}_l + \lambda_k^\sigma \xi_\sigma + \mu_k \mathfrak{e}. \tag{3}$$

2. Gleichung (1) $\dot{\mathfrak{x}} \times \dot{\mathfrak{e}} \times \mathfrak{E}^* = 0$ besagt, daß die in einem Nachbarpunkt von $\mathfrak{x}$ angebrachte Gerade der Richtung $\mathfrak{e}$ die in $\mathfrak{x}$ angebrachte E_{n-2} der Stellung $\mathfrak{E}^*$ schneidet. Um das kurz anzudeuten: Wenn man

$$\mathfrak{x}(t + \Delta t) = \mathfrak{x} + \Delta t \cdot \dot{\mathfrak{x}},$$
$$\mathfrak{e}(t + \Delta t) = \mathfrak{e} + \Delta t \cdot \dot{\mathfrak{e}}$$

setzt und weiterhin Δt^2 vernachlässigt, muß es, damit der erwähnte Schnittpunkt vorhanden ist, Zahlen $1, \varepsilon, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-2}$ geben, derart, daß

$$\mathfrak{x} + \Delta t \cdot \dot{\mathfrak{x}} + \varepsilon \mathfrak{e} + \varepsilon \cdot \Delta t \dot{\mathfrak{e}} = \mathfrak{x} + \gamma_1 \xi_1 + \ldots + \gamma_{n-3} \xi_{n-3} + \gamma_{n-2} \mathfrak{e}$$

ist, d. h. die Vektoren $\dot{\mathfrak{x}}, \dot{\mathfrak{e}}, \xi_1, \ldots, \xi_{n-3}, \mathfrak{e}$ müssen linear abhängig sein, und das wird gerade durch (1) ausgedrückt.

Man könnte sagen: Längs einer e-Krümmungslinie bilden die Vektoren $\mathfrak{e}$ eine „Torse im schwachen Sinne". Diese Bezeichnung rechtfertigt sich noch durch folgende zwei Bemerkungen.

3. Wir betrachten die Fläche, die von den Geraden $\mathfrak{e}$ längs einer e-Krümmungslinie von $\mathfrak{x}$ gebildet wird. Die Parameter auf $\mathfrak{x}$ seien so gewählt, daß diese Krümmungslinie die Gleichung $u^2 = \text{const}$ hat. Die betrachtete Fläche kann demnach so dargestellt werden:

$$\mathfrak{z}(u^1, t) = \mathfrak{x}(u^1) + t \cdot \mathfrak{e}(u^1).$$

Ihre Tangentenebene ist gegeben durch

$$\mathfrak{T} = \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial u^1} \times \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t} = \mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{e} + t \cdot (\mathfrak{e}_1 \times \mathfrak{e}).$$

Da $u^2 = \text{const}$ e-Krümmungslinie ist, folgt aus (4)

$$\beta_1^2 = 0$$

und (3) geht über in

$$\mathfrak{e}_1 = \beta_1^1 \mathfrak{x}_1 + \lambda_1^\sigma \mathfrak{x}_\sigma + \mu_1 \mathfrak{e}.$$

Somit wird

$$\mathfrak{T} = (1 + t\,\beta_1^1)\,(\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{e}) + t\,\lambda_1^\sigma\,(\mathfrak{x}_\sigma \times \mathfrak{e}).$$

Die Stellung von $\mathfrak{T}$ ist also (natürlich) nicht von t unabhängig, also nicht längs einer Erzeugenden konstant. Wir können aber zu einem $(n-1)$-Vektor konstanter Stellung kommen, indem wir mit dem von t unabhängigen $(n-3)$-Vektor

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{x}_1 \times \ldots \times \mathfrak{x}_{n-3}$$

vektoriell multiplizieren:

$$\mathfrak{T} \times \mathfrak{N} = (1 + t\,\beta_1^1)\,(\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{E}^*).$$

Dieser $(n-1)$-Vektor ist längs einer Erzeugenden konstant; natürlich ist es dann auch seine Ergänzung; diese ist ein 1-Vektor in der Normal-E_{n-2} der Fläche $\mathfrak{z}$. Also: *Die Vektoren* $\mathfrak{e}$ *längs einer* $\mathfrak{e}$*-Krümmungslinie von* $\mathfrak{x}$ *bilden eine Regelfläche, längs deren Erzeugenden zwar nicht die Normal-*E_{n-2}*, wohl aber eine Normalrichtung festbleibt.* Mit anderen Worten: *Die Gesamtheit der Tangentenebenen längs einer Erzeugenden bildet höchstens einen* E_{n-1}.

Bemerkung. Dieser E_{n-1} bzw. die festbleibende Normalrichtung

$$(\mathfrak{T} \times \mathfrak{N})^* = (1 + t_1 \beta_1^1)\,(\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{E}^*)^*$$

hängt nur von $\mathfrak{E}^*$, nicht aber von der Wahl von $\mathfrak{e}$ ab. Es ist übrigens die Richtung von

$$(\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{E}^*)^* = \mathfrak{x}_1 \mathfrak{E} = \bar{\mathfrak{x}}_1.$$

4. Wir behaupten: *Die Fläche* $\mathfrak{z}$ *ist auf eine Fläche des* E_{n-1} *abwickelbar.*

Dazu sind die Integrierbarkeitsbedingungen heranzuziehen. Es wird vorausgesetzt, daß die Größen g_{ik}, c_{ik}^λ, $\varkappa_i^{\lambda\mu}$ der Fläche $\mathfrak{z}$ die Gleichungen (J 1–3) für eine Fläche des E_n erfüllen, d. h. wenn λ, μ, ϱ die Werte 1 bis $n-2$ durchlaufen. Wir wollen zeigen, daß sich bei geeigneter Wahl der Normalen-Einheitsvektoren solche Werte für die g_{ik}, c_{ik}^λ, $\varkappa_i^{\lambda\mu}$ ergeben, daß die Gleichungen (J 1–3) schon für $\lambda, \mu, \varrho = 1, \ldots, n-3$ erfüllt sind. Dazu müssen folgende Gleichungen erfüllt sein:

Wegen (J 1): $\quad c_{ik}^{n-2}\, c_l^{n-2,\,r} - c_{il}^{n-2}\, c_k^{n-2,\,r} = 0,$

wegen (J 2): $\quad c_{ik}^{n-2}\, \varkappa_l^{n-2,\,\lambda} - c_{il}^{n-2}\, \varkappa_k^{n-2,\,\lambda} = 0,$

wegen (J 3): $\quad \varkappa_i^{\lambda,\,n-2}\, \varkappa_k^{n-2,\,\mu} - \varkappa_k^{\lambda,\,n-2}\, \varkappa_i^{n-2,\,\mu} = 0.$

Wir wählen u^1 und t als Parameter auf $\mathfrak{z}$ und bezeichnen die Ableitung nach t durch den Zeiger 2. Die Normal-E_{n-2} sei

$$\eta_1 \times \eta_2 \times \ldots \times \eta_{n-2}$$

und dabei sei

$$\eta_{n-2} = \frac{\bar{\mathfrak{x}}_1}{\sqrt{\bar{\mathfrak{x}}_1^2}},$$

so daß also $\eta_{n-2,2} = -c_2^{n-2,k}\,\mathfrak{x}_k + \varkappa_2^{n-2,\varrho}\,\eta_\varrho = 0$ ist. Daraus folgt $c_2^{n-2,k} = 0$, also auch $c_{2\,k}^{n-2} = 0$ für alle k, und $\varkappa_2^{n-2,\varrho} = -\varkappa_2^{\varrho,n-2} = 0$ für alle ϱ.

Daraus folgen die obigen Gleichungen, wenn man berücksichtigt, daß i, k, l nur die Werte 1, 2 annehmen und in den ersten beiden Gleichungen $k \neq 1$, in der letzten $i \neq k$ vorausgesetzt werden kann (da die Gleichungen sonst trivialerweise erfüllt sind).

§ 8.

Der Vektor e bei speziellen Variationsproblemen. Ein Beispiel.

1. Wir kommen zu der S. 438 erwähnten Frage, ob sich bei speziellen Variationsproblemen ein Vektor e in natürlicher Weise auszeichnen läßt. Das ist in der Tat möglich, wenn

$$\mathfrak{E} \times \mathfrak{P} = 0 \tag{1}$$

ist. Ob das etwa bei allen unseren Variationsproblemen durch geeignete Wahl von $\mathfrak{E}$ (s. S. 431) erreicht werden kann, ist fraglich. Es ist z. B. der Fall, wenn F nur von $\mathfrak{P}^2$ abhängt:

$$F(\mathfrak{P}) = \Psi(\mathfrak{P}^2); \quad F_{\mathfrak{P}} = 2\frac{\partial \Psi}{\partial(\mathfrak{P}^2)}\mathfrak{P}.$$

$\frac{\partial \Psi}{\partial(\mathfrak{P}^2)}$ ist ein Skalar, also $\mathfrak{E} = F_{\mathfrak{P}}$ einfach und sogar proportional zu $\mathfrak{P}$.

Ist $\mathfrak{E} \times \mathfrak{P} = 0$, so ist auch $\mathfrak{E}^* \times \mathfrak{P}^* = 0$, d. h. $\mathfrak{E}^*$ fällt entweder mit der Normal-E_{n-2} von $\mathfrak{x}$ (das ist $\mathfrak{P}^*$) zusammen — dann kann das Folgende mit beliebiger Wahl von ξ, e durchgeführt werden — oder $\mathfrak{E}^*$ und $\mathfrak{P}^*$ haben ein $(n-3)$-dimensionales Gebiet gemeinsam, während sie im Falle $\mathfrak{E}^* \times \mathfrak{P}^* \neq 0$ nur ein $(n-4)$-dimensionales Gebiet gemeinsam haben. Wir beschränken uns auf den Fall $n = 4$. Dann haben $\mathfrak{E}^*$ und $\mathfrak{P}^*$ eine Gerade gemeinsam, deren Einheitsvektor ξ sei. Wir setzen

$$\mathfrak{E}^* = \mathfrak{e} \times \xi; \quad \xi^2 = 1, \quad \mathfrak{e}\xi = 0 \tag{2}$$

und haben dadurch einen Vektor e bestimmt.

2. Ein Beispiel für $F_{\mathfrak{P}} \times \mathfrak{P} \neq 0$ erhält man, wenn man mit einem konstanten 2-Vektor $\mathfrak{Q}$: $F = \mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{P}$ setzt. Ein Beispiel dafür, daß $\mathfrak{E} \times \mathfrak{P} = 0$ ist, ohne daß $F_{\mathfrak{P}}$ proportional zu $\mathfrak{P}$ ist, ist das folgende:

$$F = \sqrt{P_{12}^2 + P_{13}^2 + P_{14}^2}.$$

Es ist

$$F_{12} = \frac{\partial F}{\partial P_{12}} = \frac{P_{12}}{F}, \quad F_{13} = \frac{P_{13}}{F}, \quad F_{14} = \frac{P_{14}}{F},$$

$$F_{23} = F_{42} = F_{43} = 0.$$

a) $F_{\mathfrak{P}}$ ist einfach:

$$F_{\mathfrak{P}} \times F_{\mathfrak{P}} = F_{12} F_{34} + F_{13} F_{42} + F_{14} F_{23} = 0,$$

also kann $\mathfrak{E} = F_{\mathfrak{P}}$ gesetzt werden.

b) $\mathfrak{P} \times F_{\mathfrak{P}} = 0$:

$$P_{12} F_{34} + P_{13} F_{42} + P_{14} F_{23} + P_{34} F_{12} + P_{42} F_{13} + P_{23} F_{14}$$

$$= \frac{1}{F} (P_{12} P_{34} + P_{13} P_{42} + P_{14} P_{23}) = 0.$$

c) Die Stellung von $F_{\mathfrak{P}}$ fällt nicht mit der von $\mathfrak{P}$ zusammen: Wir setzen $\mathfrak{P} = \mathfrak{p} \times \mathfrak{q}$; $\mathfrak{p} = \{p_1, \ldots, p_4\}$; $\mathfrak{q} = \{q_1, \ldots, q_4\}$. Dann ist z. B. die vierte Komponente des 3-Vektors $\mathfrak{p} \times F_{\mathfrak{P}}$:

$$\{\mathfrak{p} \times F_{\mathfrak{P}}\}_4 = p_2 F_{31} + p_3 F_{12}$$

$$= \frac{1}{F} [p_2 (p_3 q_1 - p_1 q_3) + p_3 (p_1 q_2 - p_2 q_1)]$$

$$= \frac{1}{F} p_1 P_{32} \not\equiv 0.$$

Wir berechnen $\mathfrak{e}$ und ξ: ξ soll die Schnittgerade von $F^*_{\mathfrak{P}}$ und $\mathfrak{P}^*$ angeben; also sind zunächst diese 2-Vektoren aufzuschreiben: Es ist

$$F^*_{12} = F_{34} = 0; \quad F^*_{13} = F_{42} = 0; \quad F^*_{14} = F_{23} = 0.$$

$$F^*_{34} = F_{12} = \frac{P_{12}}{F} = \frac{P^*_{34}}{F}; \quad F^*_{42} = \frac{P^*_{42}}{F}; \quad F^*_{23} = \frac{P^*_{23}}{F}.$$

Ist $\mathfrak{P}^*$ darstellbar durch die Vektoren

$$\mathfrak{m} = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}, \quad \mathfrak{n} = \{n_1, n_2, n_3, n_4\}$$

als $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{m} \times \mathfrak{n}$, so kann $F^*_{\mathfrak{P}}$ mittels der Vektoren

$$\mathfrak{m}' = \{0, m_2, m_3, m_4\}, \quad \mathfrak{n}' = \{0, n_2, n_3, n_4\}$$

so dargestellt werden: $F^*_{\mathfrak{P}} = \frac{1}{F} (\mathfrak{m}' \times \mathfrak{n}')$.

Man kann b) und c) hier noch einmal bestätigen: Der Rang der Matrix

$$\begin{matrix} m_1, & m_2, & m_3, & m_4 \\ n_1, & n_2, & n_3, & n_4 \\ 0, & m_2, & m_3, & m_4 \\ 0, & n_2, & n_3, & n_4 \end{matrix}$$

ist im allgemeinen 3.

Die Schnittgerade von $F^*_{\mathfrak{P}}$ und $\mathfrak{P}^*$ sei bestimmt durch

$$\tilde{\xi} = \mu\,\mathfrak{m} + \nu\,\mathfrak{n} = \mu'\,\mathfrak{m}' + \nu'\,\mathfrak{n}'. \qquad \left(\text{Es ist dann } \xi = \frac{\tilde{\xi}}{|\tilde{\xi}|}.\right)$$

Der Vergleich der ersten Komponenten ergibt

$$\mu m_1 + \nu n_1 = 0,$$

und es ist leicht zu bestätigen, daß die Gleichung

$$\tilde{\xi} = n_1\,\mathfrak{m} - m_1\,\mathfrak{n} = n_1\,\mathfrak{m}' - m_1\,\mathfrak{n}'$$

auch in den übrigen Komponenten richtig ist.

In die Richtung von $\mathfrak{e}$ zeigt der Vektor

$$\tilde{\mathfrak{e}} = F^*_{\mathfrak{P}} \cdot \tilde{\xi} = \frac{1}{F}\,(\mathfrak{m}' \times \mathfrak{n}')\,(n_1\,\mathfrak{m}' - m_1\,\mathfrak{n}')$$

$$= \frac{1}{F}\,[(n_1\,\mathfrak{n}'\,\mathfrak{m}' - m_1\,\mathfrak{n}'^2)\,\mathfrak{m}' - (n_1\,\mathfrak{m}'^2 - m_1\,\mathfrak{n}'\,\mathfrak{m}')\,\mathfrak{n}'].$$

Sind $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ so gewählt, daß $\mathfrak{m}\,\mathfrak{n} = 0$ ist, so folgt aus $\mathfrak{m}'^2 = \mathfrak{m}^2 - m_1^2$; $\mathfrak{n}'^2 = \mathfrak{n}^2 - n_1^2$; $\mathfrak{n}'\,\mathfrak{m}' = -\,n_1 m_1$:

$$\tilde{\mathfrak{e}} = -\,\frac{1}{F}\,[(m_1\,\mathfrak{n}^2)\,\mathfrak{m}' + (n_1\,\mathfrak{m}^2)\,\mathfrak{n}'].$$

Es ist (unter derselben Voraussetzung)

$$\tilde{\xi}^2 = n_1^2\,\mathfrak{m}^2 + m_1^2\,\mathfrak{n}^2.$$

Aus

$$\mathfrak{P}^* \cdot F^*_{\mathfrak{P}} = F = \frac{1}{F}\,(\mathfrak{m}' \times \mathfrak{n}')\,(\mathfrak{m} \times \mathfrak{n})$$

ergibt sich

$$F^2 = \mathfrak{P}^2 - \tilde{\xi}^2;$$

setzen wir

$$\tilde{\xi}^2 = \mathfrak{P}^2 - F^2 = P_{34}^2 + P_{42}^2 + P_{23}^2 = G^2,$$

so wird

$$\xi = \frac{\tilde{\xi}}{G}; \quad \mathfrak{e} = F^*_{\mathfrak{P}}\,\xi = \frac{\tilde{\mathfrak{e}}}{G}.$$

Das adjungierte Variationsproblem: Es ist

$$\overline{F}^2 = \mathfrak{P}\,\overline{\mathfrak{P}}.$$

$\overline{\mathfrak{P}}$ erhält man aus $\overline{\mathfrak{P}} = F \cdot F_{\mathfrak{P}}$:

$$\overline{P}_{12} = P_{12};\ \overline{P}_{13} = P_{13};\ \overline{P}_{14} = P_{14};\ \overline{P}_{34} = \overline{P}_{42} = \overline{P}_{23} = 0.$$

Also ist

$$\mathfrak{P}\,\overline{\mathfrak{P}} = P_{12}\,\overline{P}_{12} + P_{13}\,\overline{P}_{13} + P_{14}\,\overline{P}_{14}$$

$$= \underline{\overline{P}_{12}^2 + \overline{P}_{13}^2 + \overline{P}_{14}^2 = \overline{F}^2}.$$

Das ist eine Funktion derselben Form: *Das Variationsproblem ist selbstadjungiert.*

§ 9.

Weiteres über derartige Variationsprobleme.

1. Die Gestalt des Variationsproblems. Die Ableitungsgleichungen für $\mathfrak{e}$ und ξ lauten zunächst formal:

(A 1) $$\mathfrak{e}_i = \beta_i^k \mathfrak{x}_k + \lambda_i \xi + \mu_i \mathfrak{e},$$

(A 2) $$\xi_i = -c_i^k \mathfrak{x}_k + \varkappa_i \mathfrak{e}.$$

Dabei ist bereits $\xi_i \xi = 0$ berücksichtigt. Aus $\mathfrak{E}_i^* \times \mathfrak{P} = 0$ folgt noch $\mu_i = 0$. Nämlich es ist

$$\mathfrak{E}_i^* \times \mathfrak{P} = (\mathfrak{e}_i \times \xi \times \mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2) + (\mathfrak{e} \times \xi_i \times \mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2) = 0,$$

nun folgt aber aus (A 2)

$$(\mathfrak{e} \times \xi_i \times \mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2) = 0$$

und aus (A 1)

$$(\mathfrak{e}_i \times \xi \times \mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2) = \mu_i (\mathfrak{e} \times \xi \times \mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2) = \mu_i (\mathfrak{E}^* \times \mathfrak{P}) = \mu_i F.$$

F läßt sich jetzt so schreiben:

$$F = \sqrt{(\mathfrak{e} \times \mathfrak{x}_2 \times \mathfrak{x}_2)^2};$$

denn es ist

$$F^2 = (\xi \times \mathfrak{e} \times \mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2)^2 = \begin{vmatrix} \xi^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{e}^2 & \mathfrak{e}\mathfrak{x}_1 & \mathfrak{e}\mathfrak{x}_2 \\ 0 & \mathfrak{x}_1\mathfrak{e} & \mathfrak{x}_1^2 & \mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 \\ 0 & \mathfrak{x}_2\mathfrak{e} & \mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_1 & \mathfrak{x}_2^2 \end{vmatrix}$$

Es gilt auch die Umkehrung: Wenn $F = \sqrt{(\mathfrak{e} \times \mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2)^2}$ ist, so ist $F_{\mathfrak{P}}$ einfach, es kann also $\mathfrak{E} = F_{\mathfrak{P}}$ gesetzt werden, und es ist $\mathfrak{E} \times \mathfrak{P} = 0$.

Es ist nämlich

$$F \cdot F_{\mathfrak{P}} = \mathfrak{e}\,(\mathfrak{e} \times \mathfrak{P}),$$

was man am sichersten in der trivialen Weise prüft, daß man alles explizit in Komponenten hinschreibt. Mit Benutzung eckiger Klammern als Symbol für alternierende Zeiger läßt es sich etwa so andeuten:

$$F^2 = e_{[i} P_{k\eta} \cdot e_{[i} P_{k\eta},$$

also

$$2F \frac{\partial F}{\partial P_{kl}} = 2 e_i \cdot e_{[i} P_{kl]}.$$

Nach der obigen Gleichung und nach Umformung mittels der Zerlegungsformel ist

$$F_{\mathfrak{P}} = \frac{1}{F} [\mathfrak{e}^2 (\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2) - (\mathfrak{e}\,\mathfrak{x}_1)(\mathfrak{e} \times \mathfrak{x}_2) + (\mathfrak{e}\,\mathfrak{x}_2)(\mathfrak{e} \times \mathfrak{x}_1)]$$

und daraus ist $F_{\mathfrak{P}} \times F_{\mathfrak{P}} = 0$ und $F_{\mathfrak{P}} \times \mathfrak{P} = 0$ sofort abzulesen.

2. Verschwinden der mittleren Relativkrümmung. Variieren wir [10]) die Fläche $\mathfrak{x}$ in

$$\tilde{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} + \varepsilon n \mathfrak{e} + \varepsilon m \xi,$$

so ist

$$\tilde{\mathfrak{x}}_1 = (1 + \varepsilon n \beta_1^1 - \varepsilon m c_1^1)\mathfrak{x}_1 + \varepsilon(\beta_1^2 n - m c_1^2)\mathfrak{x}_2 + \varepsilon(n_1 + m \varkappa_1)\mathfrak{e} + \varepsilon(m_1 + n\lambda_1)\xi$$

und unter Vernachlässigung von Gliedern mit ε^2 wird

$$\mathfrak{e}\times\tilde{\mathfrak{x}}_1\times\tilde{\mathfrak{x}}_2 = (\mathfrak{e}\times\mathfrak{x}_1\times\mathfrak{x}_2)\,[1 + \varepsilon n\,(\beta_1^1 + \beta_2^2) - \varepsilon m\,(c_1^1 + c_2^2)] + (\mathfrak{e}\times\mathfrak{x}_1\times\xi)\,\varepsilon A + (\mathfrak{e}\times\mathfrak{x}_2\times\xi)\,\varepsilon B,$$

wobei der Wert der Faktoren A, B nicht von Belang ist. Da

$$(\mathfrak{e}\times\mathfrak{x}_i\times\xi)\,(\mathfrak{e}\times\mathfrak{x}_1\times\mathfrak{x}_2) = \begin{vmatrix} . & . & \xi\mathfrak{e} \\ . & . & \xi\mathfrak{x}_1 \\ . & . & \xi\mathfrak{x}_2 \end{vmatrix} = 0$$

ist, ist

$$(\mathfrak{e}\times\tilde{\mathfrak{x}}_1\times\tilde{\mathfrak{x}}_2)^2 = (\mathfrak{e}\times\mathfrak{x}_1\times\mathfrak{x}_2)^2\,[1 + 2\,\varepsilon n\,(\beta_1^1 + \beta_2^2) - 2\,\varepsilon m\,(c_1^1 + c_2^2)].$$

Hieraus schließt man (indem man etwa zunächst $m = 0$ setzt): *Extremalflächen sind dadurch gekennzeichnet, daß*

$$\underline{\beta_1^1 + \beta_2^2 = 0 \quad \textit{und} \quad c_1^1 + c_2^2 = 0}$$

ist. Bis auf den Faktor 2 ist $c_1^1 + c_2^2$ die mittlere Krümmung bezüglich der Normalen ξ, $\beta_1^1 + \beta_2^2$ die mittlere Relativkrümmung bezüglich der Relativnormalen $\mathfrak{e}$. Diese Ausdrücke werden im folgenden Paragraphen noch näher erläutert.

3. Folgerungen für das adjungierte Variationsproblem. Wir setzen $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ als adjungierte Extremalflächen voraus, ferner für unser Variationsproblem: $\mathfrak{E}\times\mathfrak{P} = 0$.

a) Dann gilt für das adjungierte Variationsproblem die entsprechende Gleichung

$$\mathfrak{Y}\times\bar{\mathfrak{P}} = 0.$$

Denn es ist

$$\bar{\mathfrak{P}} = \mathfrak{E}\cdot F, \quad \mathfrak{Y} = \frac{1}{F}\mathfrak{P}.$$

Hieraus folgt zugleich, daß die Stellung der Ebenen $\mathfrak{E}^*$ und $\bar{\mathfrak{P}}^*$, sowie $\mathfrak{P}^*$ und $\mathfrak{Y}^*$ dieselbe ist. Also ist die Schnittgerade der Ebenen $\mathfrak{Y}^*$ und $\bar{\mathfrak{P}}^*$ zu der Schnittgeraden ξ der Ebenen $\mathfrak{P}^*$ und $\mathfrak{E}^*$ parallel. Also kann man setzen

$$\mathfrak{Y}^* = \mathfrak{y}\times\xi; \quad \bar{\mathfrak{P}}^* = \xi\times\bar{\eta} \text{ mit } \xi\bar{\eta} = \xi\mathfrak{y} = 0.$$

---

[10]) Siehe z. B. W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie I, 3. Aufl., S. 235.

b) Die Gleichungen (YE) von S. 429 gehen in die entsprechenden Gleichungen für $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{y}$ über. Es ist nämlich

$$1 = \mathfrak{E}^* \mathfrak{Y}^* = (\mathfrak{e} \times \xi)(\mathfrak{y} \times \xi)$$

und dies ist (vgl. Lotze [6], S. 1451, (8))

$$= \begin{vmatrix} \mathfrak{e}\mathfrak{y}, & \mathfrak{e}\xi \\ \xi\mathfrak{y}, & \xi^2 \end{vmatrix} = \underline{\mathfrak{e}\mathfrak{y} = 1.}$$

Aus

$$\mathfrak{E}_i^* \cdot \mathfrak{Y}^* = (\mathfrak{e}_i \times \xi)(\mathfrak{y} \times \xi) + (\mathfrak{e} \times \xi_i)(\mathfrak{y} \times \xi) = 0$$

folgt $\underline{\mathfrak{e}_i \mathfrak{y} = 0}$ und somit $\underline{\mathfrak{e}\mathfrak{y}_i = 0}$.

c) Die Gleichung $\bar{\mathfrak{P}}^* = \mathfrak{E}^* \cdot F$ besagt: Die Relativnormalebene $\mathfrak{E}^*$ von $\mathfrak{x}$ hat dieselbe Stellung wie die gewöhnliche Normalebene von $\bar{\mathfrak{x}}$ im entsprechenden Punkte. Insbesondere steht $\mathfrak{e}$ als Vektor dieser Ebene auf $\bar{\mathfrak{x}}_i$ senkrecht:

$$\bar{\mathfrak{x}}_i \cdot \mathfrak{e} = 0.$$

Das kann man übrigens auch so nachprüfen:

$$\mathfrak{e} \cdot \bar{\mathfrak{x}}_i = \mathfrak{e}(\mathfrak{x}_i \cdot \mathfrak{E}) = (\mathfrak{e} \times \mathfrak{x}_i) \times (\mathfrak{e} \times \xi) = 0.$$

Ebenso ist natürlich $\mathfrak{x}_i \cdot \mathfrak{y} = 0$.

§ 10.

Einander entsprechende Kurven.

Wir wollen mit Hilfe der Vektoren $\mathfrak{e}$, ξ, $\mathfrak{y}$ eine Relativgeometrie auf $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ aufbauen.

1. Fundamentalformen. Jedem Punkt der Fläche $\mathfrak{x}$ ist zugeordnet 1. eine Normal-E_2, aufgespannt von den Vektoren

$$\xi_1 = \xi, \quad \xi_2 = \frac{\mathfrak{y}}{\sqrt{\mathfrak{y}^2}}.$$

2. eine Relativnormalebene $\mathfrak{E}^*$, aufgespannt von $\mathfrak{e}$ und ξ.

Wählen wir $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{e}, \xi$ als Bezugsvektoren, so erhalten wir als Ableitungsgleichungen die folgenden:

$$\begin{aligned} \xi_i &= -c_i^k \mathfrak{x}_k + \nu_i \mathfrak{e}, \\ \mathfrak{e}_i &= \beta_i^k \mathfrak{x}_k + \lambda_i \xi, \\ \mathfrak{x}_{ik} &= \gamma_{ik}^l \mathfrak{x}_l + b_{ik} \mathfrak{e} + c_{ik} \xi. \end{aligned}$$

Die b_{ik} stehen mit den $\beta_{ik} = \beta_i^l \mathfrak{x}_l \mathfrak{x}_k = \mathfrak{e}_i \mathfrak{x}_k$ nur dann in einem engen Zusammenhang, wenn $\mathfrak{e}\mathfrak{x}_i = 0$ ist, wie das z. B. bei Minimalflächen der Fall ist. Dann ist

$$\mathfrak{e}^2 \cdot b_{ik} = \mathfrak{x}_{ik} \mathfrak{e} = -\mathfrak{x}_i \mathfrak{e}_k = -\beta_{ik} = -\beta_{ki}.$$

Es ist übrigens

$$b_{ik} = \mathfrak{x}_{ik}\mathfrak{y} = -\mathfrak{x}_i\mathfrak{y}_k = b_{ki}.$$

Man kann nun auf $\mathfrak{x}$ die drei Formen betrachten:

(II, 1) $$c_{ik}\,\dot{u}^i\,\dot{u}^k,$$

(II, 2) $$b_{ik}\,\dot{u}^i\,\dot{u}^k,$$

(II, 3) $$\beta_{ik}\,\dot{u}^i\,\dot{u}^k.$$

2. Krümmungslinien. Wir nennen

(K) $$\frac{1}{R} = \frac{c_{ik}\,\dot{u}^i\,\dot{u}^k}{g_{ik}\,\dot{u}^i\,\dot{u}^k}$$

die (gewöhnlichen) ξ-Krümmungen einer Flächenkurve in einem Flächenpunkt; die Extremwerte $\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}$ bezeichnen wir als die Hauptkrümmungen bezüglich ξ, die ihnen entsprechenden Richtungen definieren die ξ-Krümmungslinien. Deren Differentialgleichung erhält man in üblicher Weise als

$$-c_1^2\,\dot{u}^1\,\dot{u}^1 + (c_1^1 - c_2^2)\,\dot{u}^1\,\dot{u}^2 + c_2^1\,\dot{u}^2\,\dot{u}^2 = 0.$$

Insbesondere ist $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = c_1^1 + c_2^2$.

Nennt man

$$\frac{1}{r} = \frac{\beta_{ik}\,\dot{u}^i\,\dot{u}^k}{g_{ik}\,\dot{u}^i\,\dot{u}^k}$$

Relativkrümmung bezüglich $\mathfrak{e}$, so erhält man für die durch die Extremwerte von $\frac{1}{r}$ bestimmten Richtungen die Gleichung

$$-\beta_1^2\,\dot{u}^1\,\dot{u}^1 + (\beta_1^1 - \beta_2^2)\,\dot{u}^1\,\dot{u}^2 + \beta_2^1\,\dot{u}^2\,\dot{u}^2 = 0,$$

also die Differentialgleichung der früher auf anderem Wege eingeführten $\mathfrak{e}$-Krümmungslinien [s. Gleichung (4), S. 437]. Es ist

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \beta_1^1 + \beta_2^2.$$

Die Orthogonalität der ξ-Krümmungslinien läßt sich in der üblichen Weise nachweisen: Die Extremumsforderung ergibt aus der Gleichung (K)

$$\left(\frac{1}{R}\,g_{ik} - c_{ik}\right)\dot{u}^i = 0,$$

und wenn jetzt die ξ-Krümmungslinien als Parameterkurven gewählt werden und den Kurven $u^2 = \text{const}$ die Krümmung $\frac{1}{R_1}$, den Kurven $u^1 = \text{const}$ die Krümmung $\frac{1}{R_2}$ zugeordnet wird, so folgen daraus unter anderem die Gleichungen

$$\frac{1}{R_1}\,g_{12} - c_{12} = 0,$$

$$\frac{1}{R_2}\,g_{21} - c_{21} = 0.$$

Da nun $c_{12} = c_{21}$ ist, folgt daraus, wenn $\frac{1}{R_1} \neq \frac{1}{R_2}$ ist,

$$g_{12} = 0 \quad \text{und} \quad c_{12} = 0,$$

d. h. die *ξ-Krümmungslinien sind orthogonal und konjugiert bezüglich der Form* (II, 1).

Dasselbe läßt sich für die mittels der Form (II, 2) definierten $\mathfrak{y}$-Krümmungslinien nachweisen, jedoch nicht für die e-Krümmungslinien, denn es ist nicht bekannt, ob $\beta_{12} = \beta_{21}$ ist. Dagegen läßt sich das Konjugiertsein der e-Krümmungslinien bezüglich (II, 3) wenigstens für unsere Extremalflächen beweisen: Es ist

$$\beta_{12} = \beta_1^1 g_{12} + \beta_1^2 g_{22},$$
$$\beta_{21} = \beta_2^1 g_{11} + \beta_2^2 g_{21},$$

und wenn man die e-Krümmungslinien als Parameterkurven wählt, also wenn $\beta_1^2 = \beta_2^1 = 0$ ist, folgt daraus

$$\beta_{12} + \beta_{21} = (\beta_1^1 + \beta_2^2)\, g_{12} = 0.$$

Es sei noch erwähnt, daß sich das Produkt der Relativkrümmungen $\frac{1}{r_1 r_2}$ als Quotient von Relativ-Oberflächenelementen darstellen läßt. Das sieht man folgendermaßen: Mit den e-Krümmungslinien als Parameterkurven erhält man

$$\beta_1^1 = -\frac{1}{r_1}, \quad \beta_2^2 = -\frac{1}{r_2}.$$

Dann ist

$$(\mathfrak{e}_1 \times \mathfrak{e}_2 \times \xi) = \frac{1}{r_1 r_2} (\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2 \times \xi),$$

also

$$\frac{1}{r_1 r_2} = \frac{\sqrt{(\mathfrak{e}_1 \times \mathfrak{e}_2 \times \xi)^2}}{\sqrt{(\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2 \times \xi)^2}}.$$

Hier ist nun der Nenner das Oberflächenelement der Fläche $\mathfrak{x}$, der Zähler wäre als Relativoberflächenelement von $\mathfrak{e}$ bezüglich ξ zu bezeichnen. Damit ist die verlangte Darstellung gegeben. Man kann aber auch schreiben

$$\frac{1}{r_1 r_2} = \frac{(\mathfrak{e}_1 \times \mathfrak{e}_2 \times \xi \times \mathfrak{e})}{(\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2 \times \xi \times \mathfrak{e})} = \frac{(\mathfrak{e}_1 \times \mathfrak{e}_2 \times \xi \times \mathfrak{e})}{F}.$$

Dieser Ausdruck kann als der Quotient der R-Oberflächenelemente von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{e}$ bezüglich $\mathfrak{E}^*$ bezeichnet werden.

3. Asymptotenlinien. Als ξ- bzw. e- bzw. $\mathfrak{y}$-Asymptotenlinien werden wir diejenigen Kurven bezeichnen, für die die entsprechende Form II verschwindet. Man wird fragen, ob diese Kurven eine Eigenschaft besitzen ähnlich der für Flächen im E_3 bekannten, daß die Schmiegebenen der Asymptotenlinien mit den Tangentenebenen der Fläche zusammenfallen.

Sind die Kurven $u^2 = \text{const}$ ξ-Asymptotenlinien, so ist

$$c_{11} = \mathfrak{x}_{11} \xi = 0.$$

Die Schmiegebenen der betrachteten Kurven sind durch die Vektoren $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_{11}$ bestimmt, also gilt: Die Schmiegebene der ξ-Asymptotenlinien steht jeweils auf dem Flächennormalvektor ξ senkrecht. Sie braucht also nicht mit der Tangentenebene zusammenzufallen, sie fällt aber in den E_3, der von der Tangentenebene und dem Normalvektor ξ_2 aufgespannt wird.

Das Entsprechende gilt für die $\mathfrak{y}$-Asymptotenlinien, da diese durch die ähnlich gebaute Form

$$\mathfrak{x}_{ik}\,\mathfrak{y}\,\dot{u}^i\,\dot{u}^k = 0$$

definiert werden, aber nicht für die $\mathfrak{e}$-Asymptotenlinien.

Auf Minimalflächen im E_3 sind die Asymptotenlinien orthogonal. Dasselbe gilt hier für die ξ- und für die $\mathfrak{e}$-Asymptotenlinien. Setzt man z. B. die $\mathfrak{e}$-Asymptotenlinien als Parameterkurven voraus, also

$$\beta_{11} = \beta_{22} = 0,$$

so ist

$$\beta_1^1 + \beta_2^2 = (\beta_{12} + \beta_{21})\, g^{12} = 0,$$

also, wenn nicht alle Koeffizienten der Form (II, 3) verschwinden, $g_{12} = 0$.

4. Entsprechende Kurven auf $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$. Auf der Fläche $\bar{\mathfrak{x}}$ führen wir die entsprechenden Fundamentalformen ein und bezeichnen ihre Koeffizienten durch Überstreichen. Insbesondere ist

$$\bar{c}_{ik} = \bar{\mathfrak{x}}_{ik}\,\xi,$$
$$\bar{b}_{ik} = \bar{\mathfrak{x}}_{ik}\,\mathfrak{e}.$$

Wir berechnen zunächst $\bar{\mathfrak{x}}_{ik}$:

$$\bar{\mathfrak{x}}_i = \mathfrak{x}_i \cdot \mathfrak{E} = (\mathfrak{x}_i \times \mathfrak{E}^*)^* = (\mathfrak{x}_i \times \mathfrak{e} \times \xi)^*,$$
$$\bar{\mathfrak{x}}_{ik} = (\mathfrak{x}_{ik} \times \mathfrak{e} \times \xi)^* + (\mathfrak{x}_i \times \mathfrak{e}_k \times \xi)^* + (\mathfrak{x}_i \times \mathfrak{e} \times \xi_k)^*.$$

Daraus folgt

$$\bar{c}_{11} = (\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{e} \times \xi_1 \times \xi) = c_1^2\,(\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2 \times \mathfrak{e} \times \xi) = c_1^2 \cdot F,$$
$$\bar{c}_{22} = -\,c_2^1 \cdot F,$$
$$\bar{c}_{12} = c_2^2 \cdot F = \bar{c}_{21} = -\,c_1^1 \cdot F;$$

und ebenso

$$\bar{b}_{11} = -\,\beta_1^2 \cdot F, \quad \bar{b}_{22} = \beta_2^1 \cdot F,$$
$$\bar{b}_{12} = -\,\beta_2^2 F = \bar{b}_{21} = \beta_1^1 \cdot F.$$

Daraus liest man sofort ab: Aus $\bar{c}_{11} = 0$ folgt $c_1^2 = 0$ usw. *Den ξ-Krümmungslinien von $\mathfrak{x}$ entsprechen die ξ-Asymptotenlinien von $\bar{\mathfrak{x}}$; den $\mathfrak{e}$-Krümmungslinien von $\mathfrak{x}$ entsprechen die $\mathfrak{e}$-Asymptotenlinien von $\bar{\mathfrak{x}}$.*

5. Entsprechende Kurven auf $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{e}$. Solche erhalten wir nur mittels der Form (II, 3):

$$\beta_{ik}\,\dot{u}^i\,\dot{u}^k = \mathfrak{e}_i\,\mathfrak{x}_k\,\dot{u}^i\,\dot{u}^k.$$

Diese Form haben wir oben als Fundamentalform der Fläche $\mathfrak{x}$ bezüglich der R-Normalen $\mathfrak{e}$ gedeutet; wir können sie auch als Fundamentalform der Fläche $\mathfrak{e}$ bezüglich der R-Normalen $\mathfrak{x}$ deuten. In diesem Sinne können wir ein oben bereits angegebenes Ergebnis auch so aussprechen: *Den* $\mathfrak{e}$*-Krümmungslinien auf* $\mathfrak{x}$ *entsprechen auf der Fläche* $\mathfrak{e}$ *Kurven, die bezüglich der Form* (II, 3) *konjugiert sind.*

6. Die Charakteristik. Für das Folgende ist die Beschränkung auf den E_4 wesentlich, während sie bisher hauptsächlich der Vereinfachung der Schreibweise diente. Die Kommerellsche Charakteristik ist aber nur für Flächen im E_4 definiert.

Eisenhart ([35], S. 234) bringt den Satz, daß die Charakteristiken in entsprechenden Punkten von adjungierten *Minimal*flächen kongruent sind. Wir wollen diesen Satz im folgenden auf einem Wege beweisen, der zugleich zeigt, an welcher Stelle die Übertragung auf allgemeinere Variationsprobleme versagt.

Wir betrachten zunächst die Charakteristik in einem Punkt der Fläche $\bar{\mathfrak{x}}$. Sie ist definiert (vgl. S. 419) als diejenige Kurve der Normalebene, die von den benachbarten Normalebenen ausgeschnitten wird, d. h. wenn $\mathfrak{n}$ den Vektor vom Nullpunkt zu einem Punkt der Charakteristik darstellt, durch die vier Gleichungen

(1) $$(\mathfrak{n} - \bar{\mathfrak{x}})\,\bar{\mathfrak{x}}_i = 0 \qquad (i = 1, 2),$$

(2) $$\frac{d}{dt}\left((\mathfrak{n} - \bar{\mathfrak{x}})\,\bar{\mathfrak{x}}_i\right) = 0.$$

Jeder (durch dt bestimmten) Richtung auf der Fläche entspricht ein Punkt der Charakteristik.

Da $\bar{\mathfrak{P}}^* = F \cdot \mathfrak{E}^*$ ist, wird unsere Normalebene von den Vektoren $\mathfrak{e}$ und ξ aufgespannt. Wir können also die Gleichungen (1) durch den Ansatz befriedigen:

(3) $$\mathfrak{n} - \bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{w} = w^1\,\mathfrak{e} + w^2\,\xi.$$

Die Gleichungen (2) lauten ausführlicher

$$\left((\mathfrak{n} - \bar{\mathfrak{x}})\,\bar{\mathfrak{x}}_{ik} - \bar{\mathfrak{x}}_k\,\bar{\mathfrak{x}}_i\right)\dot{u}^k = 0,$$

und wenn wir hier (3) eintragen, erhalten wir

$$\left(w^1\,\bar{\mathfrak{x}}_{ik}\,\mathfrak{e} + w^2\,\bar{\mathfrak{x}}_{ik}\,\xi - \bar{\mathfrak{x}}_k\,\bar{\mathfrak{x}}_i\right)\dot{u}^k = 0$$

oder

(4) $$\left(w^1\,\bar{b}_{ik} + w^2\,\bar{c}_{ik} - \bar{g}_{ik}\right)\dot{u}^k = 0 \qquad (i = 1, 2).$$

Hieraus erhält man

$$w^1 = \frac{(\bar{g}_{1k}\,\bar{c}_{2j} - \bar{g}_{2k}\,\bar{c}_{1j})\,\dot{u}^k\,\dot{u}^j}{(\bar{b}_{1k}\,\bar{c}_{2j} - \bar{b}_{2k}\,\bar{c}_{1j})\,\dot{u}^k\,\dot{u}^j},$$

$$w^2 = \frac{(\bar{b}_{1k}\,\bar{g}_{2j} - \bar{b}_{2k}\,\bar{g}_{1j})\,\dot{u}^k\,\dot{u}^j}{(\bar{b}_{1k}\,\bar{c}_{2j} - \bar{b}_{2k}\,\bar{c}_{1j})\,\dot{u}^k\,\dot{u}^j}.$$

Wir bezeichnen den Nenner mit $\bar{H}$; $\bar{H} = 0$ definiert die Asymptotenlinien im Kommerellschen Sinne (vgl. S. 419). Berücksichtigen wir ferner die Gleichungen $\bar{g}_{11} = \bar{g} \cdot \bar{g}^{22}$ usw., so erhalten wir

$$w^1 = \frac{\bar{g}}{\bar{H}} \left(\bar{c}_1^2 \dot{u}^1 \dot{u}^1 + (\bar{c}_2^2 - \bar{c}_1^1) \dot{u}^1 \dot{u}^2 - \bar{c}_2^1 \dot{u}^2 \dot{u}^2\right),$$

$$w^2 = \frac{\bar{g}}{\bar{H}} \left(\bar{b}_1^2 \dot{u}^1 \dot{u}^1 + (\bar{b}_2^2 - \bar{b}_1^1) \dot{u}^1 \dot{u}^2 - \bar{b}_2^1 \dot{u}^2 \dot{u}^2\right).$$

Daraus sieht man (und nur deshalb ist diese Darstellung hier angegeben): *Den Schnittpunkten der Charakteristik mit der ξ- und der $\mathfrak{e}$-Achse entsprechen die betreffenden Hauptkrümmungsrichtungen.*

Wir wollen nun dieser Charakteristik nicht die „gewöhnliche", sondern die „Relativcharakteristik" der Fläche $\mathfrak{x}$ gegenüberstellen, die wir mittels der Relativnormalebene $\mathfrak{E}^*$ in der gleichen Weise definieren. In ihrer Gleichung treten dann die Größen c_i^k und β_i^k auf, die mit den Größen $\bar{c}_i^k$, $\bar{b}_i^k$ in dem S. 448 angegebenen Zusammenhang stehen. Außerdem liegen die beiden verglichenen Charakteristiken in parallelen Ebenen.

Unsere Relativcharakteristik ist also definiert durch die Gleichungen

$$(\mathfrak{m} - \mathfrak{x})\,\mathfrak{E} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left((\mathfrak{m} - \mathfrak{x})\,\mathfrak{E}\right) = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen erfüllen wir durch den Ansatz

$$\mathfrak{m} - \mathfrak{x} = \mathfrak{z} = z^1 \mathfrak{e} + z^2 \xi$$

und erhalten dann aus der zweiten

$$(\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{E}_k - \mathfrak{x}_k \mathfrak{E})\,\dot{u}^k = 0,$$

und wegen $\mathfrak{E}_k = (\mathfrak{e}_k \times \xi)^* + (\mathfrak{e} \times \xi_k)^*$:

$$[z^1 (\mathfrak{e} \times \mathfrak{e}_k \times \xi)^* + z^2 (\xi \times \mathfrak{e} \times \xi_k)^* - (\mathfrak{x}_k \times \mathfrak{e} \times \xi)^*]\,\dot{u}^k = 0,$$

$$(\mathfrak{e} \times \mathfrak{x}_i \times \xi)^* \cdot (z^1 \beta_k^i - z^2 c_k^i + \delta_k^i)\,\dot{u}^k = 0,$$

und weil die Vektoren $(\mathfrak{e} \times \mathfrak{x}_1 \times \xi)$ und $(\mathfrak{e} \times \mathfrak{x}_2 \times \xi)$ linear unabhängig sind,

$$(4') \qquad (z^1 \beta_k^i - z^2 c_k^i + \delta_k^i)\,\dot{u}^k = 0 \qquad (i = 1, 2).$$

Daraus ergeben sich für die z^i ähnliche Ausdrücke wie oben für die w^i. Trägt man gleich die Werte $\bar{c}_{11} = c_1^2 F$ usw. (s. S. 448) ein, so erhält man

$$z^1 = \frac{F^2}{\bar{H}} \left(c_1^2 \dot{u}^1 \dot{u}^1 + (c_2^2 - c_1^1) \dot{u}^1 \dot{u}^2 - c_2^1 \dot{u}^2 \dot{u}^2\right),$$

$$z^2 = \frac{F^2}{\bar{H}} \left(\beta_1^2 \dot{u}^1 \dot{u}^1 + (\beta_2^2 - \beta_1^1) \dot{u}^1 \dot{u}^2 - \beta_2^1 \dot{u}^2 \dot{u}^2\right).$$

Daraus ergibt sich beiläufig: Den Asymptotenlinien von $\bar{\mathfrak{x}}$ entsprechen die „Relativasymptotenlinien" von $\mathfrak{x}$; das ist nur eine andere Form des Ergebnisses von § 5, Nr. 3, S. 437.

Zum Vergleich der beiden Charakteristiken ist es zweckmäßig, aus den Gleichungen (4) bzw. (4′) die $\dot{u}^i$ zu entfernen. Man erhält unter Berücksichtigung von

$$\beta_1^1 + \beta_2^2 = c_1^1 + c_2^2 = \bar{c}_1^1 + \bar{c}_2^2 = 0$$

aus (4):

$$\begin{vmatrix} w^1 \bar{b}_{11} + w^2 \bar{c}_{11} - \bar{g}_{11}, & w^1 \bar{b}_{12} + w^2 \bar{c}_{12} - \bar{g}_{12} \\ w^1 \bar{b}_{21} + w^2 \bar{c}_{21} - \bar{g}_{21}, & w^1 \bar{b}_{22} + w^2 \bar{c}_{22} - \bar{g}_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{aligned} & w^1 w^1 (\bar{b}_{11} \bar{b}_{22} - \bar{b}_{12} \bar{b}_{21}) + w^2 w^2 (\bar{c}_{11} \bar{c}_{22} - \bar{c}_{12} \bar{c}_{21}) \\ & + w^1 w^2 (\bar{b}_{11} \bar{c}_{22} + \bar{c}_{11} \bar{b}_{22} - \bar{b}_{12} \bar{c}_{21} - \bar{c}_{12} \bar{b}_{21}) \\ & - w^1 \bar{g} (\bar{b}_1^1 + \bar{b}_2^2) + \bar{g} = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

und aus (4′)

$$\begin{aligned} & z^1 z^1 (\beta_1^1 \beta_2^2 - \beta_1^2 \beta_2^1) + z^2 z^2 (c_1^1 c_2^2 - c_1^2 c_2^1) \\ & + z^1 z^2 (\beta_1^1 c_2^2 + \beta_2^2 c_1^1 - \beta_1^2 c_2^1 - \beta_2^1 c_1^2) + 1 = 0. \end{aligned}$$

Mittels $\bar{c}_{11} = c_1^2 F$ usw. erhält man hieraus

$$\begin{aligned} & z^1 z^1 (\bar{b}_{11} \bar{b}_{22} - \bar{b}_{12} \bar{b}_{21}) + z^2 z^2 (\bar{c}_{11} \bar{c}_{22} - \bar{c}_{12} \bar{c}_{21}) \\ & + z^1 z^2 (\bar{b}_{11} \bar{c}_{22} + \bar{b}_{22} \bar{c}_{11} - \bar{b}_{12} \bar{c}_{21} - \bar{b}_{21} \bar{c}_{12}) + F^2 = 0. \end{aligned} \tag{5′}$$

Wenn es sich jetzt um Minimalflächen, also um das Variationsproblem $F = \sqrt{\mathfrak{P}^2}$, handelt, so ist die gewöhnliche mittlere Krümmung $\bar{b}_1^1 + \bar{b}_2^2$ sozusagen zugleich mittlere Relativkrümmung und als solche gleich Null. Ferner ist in diesem Falle

$$F^2 = \bar{\mathfrak{P}}^2 = (\bar{\mathfrak{x}}_1 \times \bar{\mathfrak{x}}_2)^2 = \bar{g},$$

also sind die beiden Gleichungen (5) und (5′) identisch, d. h. die beiden Charakteristiken kongruent, w. z. b. w.

IV.

§ 11.

Maßbestimmung.

Für den dreidimensionalen Fall haben Haar und Berwald, für den vierdimensionalen Koschmieder eine Maßbestimmung eingeführt, derart, daß

1. die Abbildung von $\mathfrak{x}$ auf $\bar{\mathfrak{x}}$ eine Verbiegung ist;

2. der Flächeninhalt der Maßbestimmung gleich dem Variationsintegral ist;

3. für Minimalflächen, d. h. $F = \sqrt{\mathfrak{P}^2}$, das gewöhnliche Bogenelement entsteht.

Wir übertragen die Maßbestimmung von Koschmieder in unsere Schreibweise und erreichen dadurch ihre Gültigkeit für Flächen im E_n sowie eine gewisse Vereinfachung des Beweises für 3. Wir setzen

$$\gamma_{ik} = \mathfrak{E}_i \mathfrak{y}_k; \quad \|\gamma_{ik}\| = \gamma$$

(wegen $\mathfrak{E}_i \mathfrak{y} = 0$ ist dann $\mathfrak{E}_k \mathfrak{y}_i = -\mathfrak{E}_{ik} \mathfrak{y} = \mathfrak{E}_i \mathfrak{y}_k$) und definieren als Bogenelement

auf $\mathfrak{x}$: $$dS^2 = \frac{F(\mathfrak{P})}{\sqrt{\gamma}} \gamma_{ik} du^i du^k,$$

auf $\bar{\mathfrak{x}}$: $$d\bar{S}^2 = \frac{\bar{F}(\bar{\mathfrak{P}})}{\sqrt{\gamma}} \gamma_{ik} du^i du^k.$$

Daß die Abbildung von $\mathfrak{x}$ auf $\bar{\mathfrak{x}}$ eine Verbiegung ist, folgt ohne weiteres daraus, daß $\bar{F}(\bar{\mathfrak{P}}) = F(\mathfrak{P})$ ist.

Auch die zweite Eigenschaft ist leicht zu bestätigen: Setzt man

$$G_{ik} = \frac{F}{\sqrt{\gamma}} \gamma_{ik},$$

so wird

$$\iint \sqrt{G_{11} G_{22} - G_{12}^2}\, du^1 du^2 = \iint F\, du^1 du^2.$$

Die dritte Eigenschaft ergibt sich folgendermaßen: Ist $F = \sqrt{\mathfrak{P}^2}$, so ist $\mathfrak{E} = F_{\mathfrak{P}} = \frac{\mathfrak{P}}{F} = \mathfrak{y}$: das Problem ist selbstadjungiert. Es ist dann

$$\mathfrak{E}_i = \frac{\mathfrak{P}_i \cdot F^2 - \mathfrak{P}(\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{P}_i)}{F^3},$$

$$\gamma_{ik} = \mathfrak{E}_i \mathfrak{E}_k = \frac{(\mathfrak{P}_i \mathfrak{P}_k) \cdot F^2 - (\mathfrak{P}\,\mathfrak{P}_i)(\mathfrak{P}\,\mathfrak{P}_k)}{F^4}.$$

Führt man nun isotrope Parameter ein:

$$\mathfrak{x}_1^2 = \mathfrak{x}_2^2 = 0, \quad \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_{11} = \mathfrak{x}_2 \mathfrak{x}_{22} = 0,$$

so erhält man auf bekannte Weise als Differentialgleichung der Minimalflächen

$$\mathfrak{x}_{12} = 0.$$

Dann ist

$$\mathfrak{P}^2 = (\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2)(\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2) = \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_1^2, & \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \\ \mathfrak{x}_2 \mathfrak{x}_1, & \mathfrak{x}^2 \end{vmatrix} = -(\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2)^2,$$

$$\mathfrak{P}\,\mathfrak{P}_1 = -(\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2)(\mathfrak{x}_2 \mathfrak{x}_{11}); \quad \mathfrak{P}\,\mathfrak{P}_2 = -(\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2)(\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_{22});$$

$$\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_1 = -(\mathfrak{x}_2 \mathfrak{x}_{11})^2; \qquad \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 = -(\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2)(\mathfrak{x}_{11} \mathfrak{x}_{22}); \quad \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_2 = -(\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_{22})^2$$

Mit Benutzung dieser Werte erhält man $\gamma_{11} = \gamma_{22} = 0$, also

$$G_{11} = G_{22} = 0, \quad G_{12} = \frac{\sqrt{\mathfrak{P}^2}}{\sqrt{\gamma}} \gamma_{12} = \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2,$$

und das sind dieselben Werte wie die der g_{ik}.

Wählt man im allgemeinen Fall die Nullkurven der Maßbestimmung als Parameterkurven, so wird

$$\gamma_{11} = \mathfrak{E}_1 \mathfrak{Y}_1 = 0,$$

das ist

$$= -\mathfrak{E}_{11}\mathfrak{Y} = -\frac{1}{F}\mathfrak{E}_{11}\mathfrak{P},$$

und daraus folgt

$$\mathfrak{E}^*_{11} \times \mathfrak{P} = B_{11} = 0.$$

Das ist das Analogon zu der von Berwald festgestellten Tatsache, daß im dreidimensionalen Fall *den Nullkurven der Maßbestimmung die Asymptotenlinien von* $\mathfrak{E}^*$ *entsprechen.*

V. Die Legendresche Bedingung und die Krümmung von $\mathfrak{E}(u, v)$.

§ 12.

Die Legendresche Bedingung.

Wir beschränken uns auf den vierdimensionalen Fall. Wir schreiben

$$\frac{\partial F}{\partial P_{ik}} = F_{ik} = F_\lambda, \qquad \begin{matrix} ik = 12, 13, 14, 23, 42, 34, \\ \lambda = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \end{matrix}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial P_\lambda \partial P_\mu} = F_{\lambda\mu}.$$

Die quadratische Form

(1) $$F_{\lambda\mu} X_\lambda X_\mu$$

verschwindet jedenfalls für $X_\lambda = P_\lambda$; denn aus

$$\mathfrak{P} \cdot F_{\mathfrak{P}} = P_\lambda F_\lambda = F$$

folgt durch Differenzieren nach P_μ

$$F_\mu + P_\lambda F_{\lambda\mu} = F_\mu.$$

Als Analogon der Legendreschen Bedingung bezeichnen wir hier die folgende: *Die quadratische Form* (1) *soll positiv semidefinit sein und nur für* $X_\lambda = P_\lambda$ *verschwinden.* Das besagt: Es muß

(2) $$-\begin{vmatrix} F_{\lambda\mu} & P_\lambda \\ P_\mu & 0 \end{vmatrix} > 0$$

sein, der Rang der Determinante $|F_{\lambda\mu}|$ gleich $n - 1 = 5$, und die Hauptunterdeterminanten von $|F_{\lambda\mu}|$ müssen positiv sein [11]).

Die Bedeutung dieser Bedingung für das Variationsproblem läßt sich so einsehen: Eine vorgelegte Extremalfläche $\mathfrak{x}(u, v)$ mit der Randkurve C

---

[11]) C. Carathéodory, Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Teubner, Leipzig und Berlin 1935, § 199 und 252.

bette ich in ein Feld ein. Da F nur von $\mathfrak{P}$ abhängt, kann ich ein solches Feld durch Parallelverschiebung erhalten

$$\mathfrak{x}(u, v, a, b) = \mathfrak{x}(u, v, 0, 0) + a\,\mathfrak{a} + b\,\mathfrak{b}$$

mit konstanten Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, die voneinander und im allgemeinen von $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$, linear unabhängig, aber sonst beliebig gewählt seien. Eine Fläche $\mathfrak{y}$ erhalte ich indem ich

$$a = a(u, v), \quad b = b(u, v)$$

setze. Diese Funktionen seien so gewählt, daß die Fläche $\mathfrak{y}$ den Rand C hat. Die Tangentenebene von $\mathfrak{y}$ ist dann

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{y}_u \times \mathfrak{y}_v = (\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v) + (\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{a})\,a_v + (\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{b})\,b_v - (\mathfrak{x}_v \times \mathfrak{a})\,a_u - (\mathfrak{x}_v \times \mathfrak{b})\,b_u.$$

Ich bilde nun das über die Fläche $\mathfrak{y}$ erstreckte Integral

$$U = \iint \mathfrak{Q} \cdot F_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{P})\,du\,dv$$

und behaupte, daß es von der Wahl der Fläche $\mathfrak{y}$ unabhängig ist. ($\mathfrak{P}$ ist das Tangentenelement der durch den Flächenpunkt gehenden Extremalfläche.)

Wegen $\mathfrak{P} \cdot F_{\mathfrak{P}} = F$, $\mathfrak{x}_u F_{\mathfrak{P}} = -F_{\mathfrak{x}_v}$, $\mathfrak{x}_v F_{\mathfrak{P}} = F_{\mathfrak{x}_u}$ ist

$$\mathfrak{Q} \cdot F_{\mathfrak{P}} = F + \mathfrak{a}\,(a_u F_{\mathfrak{x}_u} + a_v F_{\mathfrak{x}_v}) + \mathfrak{b}\,(b_u F_{\mathfrak{x}_u} + b_v F_{\mathfrak{x}_v}).$$

Nun ist $\iint F(\mathfrak{P})\,du\,dv$ von der Wahl der Fläche $\mathfrak{y}$ unabhängig, weil $\mathfrak{P}(u, v, a, b) = \mathfrak{P}(u, v, 0, 0)$ ist. Ferner setze man

$$a \cdot F_{\mathfrak{x}_u} = R, \quad a \cdot F_{\mathfrak{x}_v} = S,$$

dann ist

$$a_u F_{\mathfrak{x}_u} + a_v F_{\mathfrak{x}_v} = R_u + S_v + a\left[\frac{\partial}{\partial u}(F_{\mathfrak{x}_u}) + \frac{\partial}{\partial v}(F_{\mathfrak{x}_v})\right];$$

die eckige Klammer verschwindet auf Grund der Eulerschen Differentialgleichungen, also läßt sich der zweite Summand von U in ein Randintegral umformen, und ebenso der dritte. Somit ist U von der Wahl der Fläche $\mathfrak{y}$ unabhängig, w. z. b. w.

Man setzt nun in üblicher Weise[12])

$$E(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) = F(\mathfrak{Q}) - F(\mathfrak{P}) - (\mathfrak{Q} - \mathfrak{P}) \cdot F_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{P})$$

und erhält aus

$$F(\mathfrak{Q}) = F(\mathfrak{P}) + (\mathfrak{Q} - \mathfrak{P}) \cdot F_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{P}) + (Q_\lambda - P_\lambda)(Q_\mu - P_\mu) \cdot F_{\lambda\mu}(\mathfrak{P} + \vartheta(\mathfrak{Q} - \mathfrak{P}))$$
$$(0 \leqq \vartheta \leqq 1):$$

$$E(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) = (Q_\lambda - P_\lambda)(Q_\mu - P_\mu) \cdot F_{\lambda\mu}(\vartheta). \tag{3}$$

Wegen $F(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P} \cdot F_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{P})$ wird

$$\iint F(\mathfrak{Q})\,du\,dv = U + \iint E\,du\,dv.$$

[12]) Vgl O. Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung, Teubner, Leipzig, Berlin 1909, S. 110.

Für die in dieselbe Randkurve eingespannte Extremalfläche ist

$$\iint F(\mathfrak{P})\,du\,dv = \iint \mathfrak{P}\cdot F_{\mathfrak{P}}\,du\,dv = U;$$

also ist

$$\iint F(\mathfrak{Q})\,du\,dv - \iint F(\mathfrak{P})\,du\,dv = \iint E\,du\,dv. \tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt: *Die Legendresche Bedingung ist hinreichend dafür, daß die vorgelegte Extremalfläche ein Minimum liefert.*

§ 13.

Die Krümmung der Figuratrix.

W. Blaschke [37] hat die Legendresche Bedingung mit der Krümmung der Figuratrix in Verbindung gebracht. Wir betrachten als Figuratrix die Fläche $F_{\mathfrak{P}} = \mathfrak{E}(u, v)$ im 6-dimensionalen Raum. Wegen

$$\mathfrak{E}_i\,\mathfrak{P} = \frac{1}{F}\,\mathfrak{E}_i\,\mathfrak{P} = 0$$

ist $\mathfrak{P}$ Normalvektor dieser Fläche. Wir setzen noch

$$\mathfrak{T} = \frac{\mathfrak{P}}{\sqrt{\mathfrak{P}^2}}$$

und bezeichnen die drei weiteren zu $\mathfrak{E}_i$ senkrechten Richtungen durch die zueinander und zu $\mathfrak{T}$ orthogonalen Einheitsvektoren $\mathfrak{Z}^1$, $\mathfrak{Z}^2$, $\mathfrak{Z}^3$. Dann gelten längs der $\mathfrak{T}$-Krümmungslinien die Gleichungen

$$\dot{\mathfrak{T}} = \frac{1}{R}\,\dot{\mathfrak{E}} + k_1\mathfrak{Z}^1 + k_2\mathfrak{Z}^2 + k_3\mathfrak{Z}^3 + m\,\mathfrak{T}. \tag{4}$$

Wegen

$$\dot{\mathfrak{E}} = \dot{F}_{\mathfrak{P}} = \{F_{\lambda\mu}\,\dot{P}_\mu\}$$

und

$$\dot{\mathfrak{T}} = \frac{\dot{\mathfrak{P}}}{\sqrt{\mathfrak{P}^2}} - \frac{\mathfrak{P}\,\dot{\mathfrak{P}}}{(\sqrt{\mathfrak{P}^2})^3}\cdot\mathfrak{P}$$

und

$$F_{\lambda\mu}P_\mu = 0$$

wird aus (4), in Komponenten geschrieben,

$$\dot{T}_\lambda - \frac{\sqrt{\mathfrak{P}^2}}{R}\,F_{\lambda\mu}\,\dot{T}_\mu - k_1 Z^1_\lambda - k_2 Z^2_\lambda - k_3 Z^3_\lambda - m\,T_\lambda = 0,$$

oder, wenn noch $\sqrt{\mathfrak{P}^2}$ in $F_{\lambda\mu}$ hineingezogen gedacht wird,

$$(R\,\delta_{\lambda\mu} - F_{\lambda\mu})\,\dot{T}_\mu - R\cdot k_1 Z^1_\lambda - R\cdot k_2 Z^2_\lambda - R\cdot k_3 Z^3_\lambda - R\cdot m\,T_\lambda = 0.$$

Hierzu kommen die Gleichungen

$$\dot{T}_u Z^i_u - k_i = 0,$$

$$\dot{T}_u\,T_u = 0.$$

R erhält man durch Elimination von $\dot{T}_\mu$, k_i, m aus diesen Gleichungen. Das ergibt für R die folgende Gleichung:

$$(5)\quad 0 = \begin{vmatrix} R-F_{11}, & -F_{12}, & -F_{13}, & -F_{14}, & -F_{15}, & -F_{16}, & T_1, & RZ_1^1, & RZ_1^2, & RZ_1^3 \\ -F_{21}, & R-F_{22}, & -F_{23}, & -F_{24}, & -F_{25}, & -F_{26}, & T_2, & RZ_2^1, & RZ_2^2, & RZ_2^3 \\ -F_{31}, & -F_{32}, & R-F_{33}, & -F_{34}, & -F_{35}, & -F_{36}, & T_3, & RZ_3^1, & RZ_3^2, & RZ_3^3 \\ -F_{41}, & -F_{42}, & -F_{43}, & R-F_{44}, & -F_{45}, & -F_{46}, & T_4, & RZ_4^1, & RZ_4^2, & RZ_4^3 \\ -F_{51}, & -F_{52}, & -F_{53}, & -F_{54}, & R-F_{55}, & -F_{56}, & T_5, & RZ_5^1, & RZ_5^2, & RZ_5^3 \\ -F_{61}, & -F_{62}, & -F_{63}, & -F_{64}, & -F_{65}, & R-F_{66}, & T_6, & RZ_6^1, & RZ_6^2, & RZ_6^3 \\ T_1, & T_2, & T_3, & T_4, & T_5, & T_6, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ Z_1^1, & Z_2^1, & Z_3^1, & Z_4^1, & Z_5^1, & Z_6^1, & 0, & 1, & 0, & 0 \\ Z_1^2, & Z_2^2, & Z_3^2, & Z_4^2, & Z_5^2, & Z_6^2, & 0, & 0, & 1, & 0 \\ Z_1^3, & Z_2^3, & Z_3^3, & Z_4^3, & Z_5^3, & Z_6^3, & 0, & 0, & 0, & 1 \end{vmatrix}.$$

Denkt man sich diese Determinante nach den ersten 7 Zeilen entwickelt, so sieht man, daß das von R freie Glied

$$K = -\begin{vmatrix} F_{\lambda\mu} & T_\lambda \\ T_\mu & 0 \end{vmatrix}$$

ist. Das Produkt der $\mathfrak{T}$-Krümmungsradien ist der Quotient aus K und dem Koeffizienten der höchsten Potenz von R. Wir haben noch zu zeigen, daß dieser positiv ist. Dann ist die Bedingung (2) als gleichwertig mit positiver $\mathfrak{T}$-Krümmung der Figuratrix erkannt.

Zu diesem Zweck subtrahieren wir in (5) die mit Z_1^1 multiplizierte erste Spalte, die mit Z_2^1 multiplizierte zweite Spalte usw. von der achten Spalte und verfahren entsprechend mit der neunten und zehnten Spalte. So erhalten wir

$$\begin{vmatrix} & & & T_1, & F_{1\mu}Z_\mu^1, & F_{1\mu}Z_\mu^2, & F_{1\mu}Z_\mu^3 \\ R\delta_{\lambda\mu} - F_{\lambda\mu} & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & T_6, & F_{6\mu}Z_\mu^1, & F_{6\mu}Z_\mu^2, & F_{6\mu}Z_\mu^3 \\ T_1, & \ldots, & T_6, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ Z_1^1, & \ldots, & Z_6^1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ Z_1^2, & \ldots, & Z_6^2, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ Z_1^3, & \ldots, & Z_6^3, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Form zeigt, daß (5) eine quadratische Gleichung für R ist. Wähle ich nun das Koordinatensystem so, daß die 3., 4., 5., 6. Achse in $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{Z}^1$, $\mathfrak{Z}^2$, $\mathfrak{Z}^3$ fallen, so bleibt bei Entwicklung nach den ersten sechs Zeilen nur übrig

$$\begin{vmatrix} R-F_{11}, & -F_{12}, & 0, & F_{14}, & F_{15}, & F_{16} \\ -F_{21}, & R-F_{22}, & 0, & F_{24}, & F_{25}, & F_{26} \\ -F_{31}, & -F_{32}, & 1, & F_{34}, & F_{35}, & F_{36} \\ -F_{41}, & -F_{42}, & 0, & F_{44}, & F_{45}, & F_{46} \\ -F_{51}, & -F_{52}, & 0, & F_{54}, & F_{55}, & F_{56} \\ -F_{61}, & -F_{62}, & 0, & F_{64}, & F_{65}, & F_{66} \end{vmatrix} = 0.$$

Der Faktor von R^2 ist also

$$\begin{vmatrix} F_{44}, & F_{45}, & F_{46} \\ F_{54}, & F_{55}, & F_{56} \\ F_{64}, & F_{65}, & F_{66} \end{vmatrix} > 0,$$

da alle Hauptunterdeterminanten von $\|F\|$ positiv sein sollten. Damit ist gezeigt: *Wenn für unser Variationsproblem die Legendresche Bedingung erfüllt ist, ist die Gausssche Relativkrümmung der Figuratrix $\mathfrak{E}$ bezüglich $\mathfrak{T}$ positiv.*

Literatur.

I. Die vorliegende Arbeit baut unmittelbar auf folgenden Arbeiten auf:

[1] A. Haar, Über adjungierte Variationsprobleme und adjungierte Extremalflächen. **Math. Annalen 100** (1928), S. 481.

[2] L. Berwald, Über adjungierte Variationsprobleme und adjungierte Extremalflächen. **Monatsh. f. Math. u. Phys. 38** (1931), S. 89.

[3] W. Süss, Zur relativen Differentialgeometrie. I. Jap. Journ. of Math. **4** (1927), S. 57; IV. **Tôh. Math. Journ. 29** (1928), S. 359.

[4] L. Koschmieder, Adjungierte Extremalflächen im vierstufigen Raum. Math. Zeitschr. **41** (1936), S. 43.

II. Zur Grassmannschen Ausdehnungslehre:

[5] H. Grassmann, Ausdehnungslehre, Berlin 1862.

[6] A. Lotze, Die Grassmannsche Ausdehnungslehre. Enzykl. III AB 11, III, S. 1426.

[7] G. N. Lewis, On four-dimensional vector analysis and its applications in electrical theory. Proc. of the Amer. Acad. of Arts and Sciences **46** (1910), S. 165.

[8] E. Jahnke, Zur Theorie der vierdimensionalen Vektoren und Dyaden. Arch. d. Math. u. Phys. **26** (1917), S. 23.

[9] R. Mehmke, Vorlesungen über Punkt- und Vektorenrechnung I, 1, 1913.

[10] H. Barton, A modern presentation of Grassmann's Tensor Analysis. Amer. Journ. of Math. **49** (1927), S. 598.

[11] R. König, E. Peschl und K. H. Weise, Axiomatischer Aufbau der Operationen im Tensorraum. Ber. d. Sächs. Akad. Leipzig, math.-naturw. Klasse. I. Bd. **86** (1934), S. 129; II. Bd. **86** (1934), S. 267; III. Bd. **86** (1934), S. 383; IV. Bd. **87** (1934), S. 223.

III. Mehrdimensionale Differentialgeometrie:

a) Zusammenfassende Darstellungen.

[12] L. Berwald, Riemannsche Mannigfaltigkeiten und ihre Verallgemeinerung. Enzykl. III, D, 11, B.

[13] L. P. Eisenhart, Riemannian Geometry. Princeton 1926.

[14] A. R. Forsyth, Geometry of four dimensions. Cambr. 1930.

[15] D. J. Struik, Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie in direkter Darstellung. Berlin, Jul. Springer, 1922.

[16] J. A. Schouten, Der Ricci-Kalkul. Berlin, Jul. Springer, 1924.

b) Flächen im n-dimensionalen Raum.

[17] A. Voss, Zur Theorie der Transformation quadratischer Differentialausdrücke und der Krümmung höherer Mannigfaltigkeiten. Math. Annalen **16** (1880), S. 129.

[18] K. Kommerell, Die Krümmung der zweidimensionalen Gebilde im ebenen Raum von vier Dimensionen. Diss. Tübingen 1897.

[19] K. Kommerell, Riemannsche Flächen im ebenen Raum von vier Dimensionen. Math. Annalen **60** (1905), S. 548.

[20] E. B. Wilson und C. L. E. Moore, A general theory of surfaces. Proc. Nat. Ac. of Sci. USA. **2** (1916), S. 273. Differential Geometry of two-dimensional surfaces in hyperspace. Proc. Amer. Ac. of Arts and Sciences **52** (1917), S. 267.

[21] J. A. Schouten und D. J. Struik, Über Krümmungseigenschaften einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit, die in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit mit beliebiger quadratischer Maßbestimmung eingebettet ist. Palermo Rend. **46** (1922), S. 165 (besonders § 10 und 11).

[22] H. Weyl, Zur Infinitesimalgeometrie: p dimensionale Fläche im n dimensionalen Raum. Math. Zeitschr. **12** (1922), S. 154.

[23] A. Tonolo, Fondamenti di geometria metrica delle superficie dello spazio lineare a cinque dimensioni. Palermo Rend. **53** (1929), S. 437. Studi di geometria delle superficie dello spazio lineare a quattro dimensioni. Ebenda **54** (1930), S. 150.

[24] K. Brauner, Über Mannigfaltigkeiten, deren Tangentialmannigfaltigkeiten ausgeartet sind. Monatsh. f. Math. u. Phys. **46** (1938), S. 335. Über eine Krümmungseigenschaft von Mannigfaltigkeiten der Klasse Eins. S.-B. Akad. Wiss. Wien IIa, **146** (1937), S. 557.

c) Netze, Asymptotenlinien, abwickelbare Flächen.

[25] C. Segre, Su una classe di superficie degli iperspazi legata colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2^0 ordine. Atti R. Acad. Torino **42** (1907), S. 1047.

[26] C. Segre, Preliminari di una teorie delle varietà luoghi di spazi. Pal. Rend. **30** (1910), S. 87.

[27] E. Bompiani, Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero. Atti Torino **48** (1912/13), S. 393.

[28] E. Bompiani, Alcune proprietà projettivo-differenziali di rette negli iperspazio. Pal. Rend. **37** (1913), S. 305.

[29] A. Terracini, Sulle V_k che rappresentano più di $\frac{k(k-1)}{2}$ equazioni di Laplace linearmente independenti. Pal. Rend. **33** (1912), S. 176.

[30] A. Terracini, Sulle varieta di spazi con carattere di sviluppabili. Atti Torino **48**, (1912/13) S. 411.

[31] A. Terracini, Superficie particolari dello spazio a cinque dimensioni in relatione con le loro linee principale. Annali di Matematica (4) **17** (1938), S. 23.

[32] L. P. Eisenhart, Transformations of surfaces. Princeton 1923.

[33] E. P. Lane, Projective Differential Geometry of Curves and Surfaces. Chicago 1932.

[34] Cl. Guichard, Théorie des Réseaux. Mem. des sciences math., Nr. 74, 77. Paris 1935.

d) Minimalflächen.

[35] L. P. Eisenhart, Minimal Surfaces in Euclidean Four-Space. Amer. Journ. of Math. **34** (1912), S. 215.

[36] C. L. E. Moore, Note on Minimal Varietys in Hyperspace. Bull. Amer. Math. Soc. **27** (1921), S. 211.

IV. Zur Variationsrechnung:

[37] W. Blaschke, Über die Figuratrix in der Variationsrechnung. Arch. f. Math. u. Phys. III, **20** (1913), S. 28.

[38] C. Carathéodory, Über die Variationsrechnung bei mehrfachen Integralen. Acta Litt. ac Sci. Szeged **4** (1928), S. 193.

[39] H. Boerner, Über die Extremalen und geodätischen Felder in der Variationsrechnung der mehrfachen Integrale. Math. Annalen **112** (1936), S. 187.

Zusatz bei der Druckprobe: Inzwischen erhalte ich Kenntnis von einer Arbeit von N. Sakellariou, Zur Variationsrechnung, Monatsh. f. Math. u. Phys. 48, (1939), S. 314, deren Inhalt sich etwa mit dem Inhalt des Abschnitts I des 3. Kapitels der vorliegenden Arbeit deckt. — November 1939.

(Eingegangen am 9. Oktober 1939.)

Zur Abschätzung der Mindestzahl inkongruenter Quadrate, die ein gegebenes Rechteck ausfüllen.

Von

R. Sprague in Berlin-Charlottenburg.

Aus der Zerlegbarkeit des Quadrats in endlich viele, sämtlich inkongruente Quadrate[1]) erwuchs die Aufgabe, eine unendliche Folge solcher Zerlegungen zu ermitteln, von denen kein Paar in einem Teilquadrat übereinstimmt.

Eine an anderer Stelle[2]) erscheinende Lösung, auf deren Existenz es dort, für die entsprechende Zerlegbarkeit von Rechtecken, allein ankommt, zeigt so starke Zunahme der Anzahl der Teilquadrate, daß ihre Abschätzung nicht lohnt. Hier soll nun eine neue Folge Q_n ($n = 1, 2, \ldots$) derartiger Zerlegungen des Quadrats angegeben werden, in welcher die Anzahlen der Teilquadrate eine arithmetische Reihe bilden. Danach läßt sich für Rechtecke, die aus t kongruenten Quadraten zusammengesetzt werden können, die Anzahl $\bar{t}$ der zu diesem Zweck erforderlichen inkongruenten Quadrate mit

$$\bar{t} = O(t^2)$$

abschätzen.

1.

Nach B. ist ein Paar kongruenter Rechtecke R_1 und R_1' mit den Seitenlängen 1 und $\frac{16}{13}$ derart in lauter Quadrate zerlegbar, daß für die (rationalen) Seitenlängen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_d$ der insgesamt d ($= 53$) Teilquadrate

$$\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_d = \tfrac{16}{29} < 1$$

gilt. Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner gehen daraus die ganzen positiven Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_d$ hervor mit

$$c_1 < c_2 < \ldots < c_d = 1040.$$

Auch weiterhin bezeichnen alle kleinen lateinischen Buchstaben positive ganze Zahlen.

Das Anfangsglied Q_1 der angekündigten Folge ist mit der in B. gegebenen Quadratzerlegung identisch. Die Möglichkeit der Bildung dieser Folge beruht

---

[1]) Beispiel einer Zerlegung des Quadrats in lauter verschiedene Quadrate. Diese Zeitschr. **45** (1939), S. 607, — im folgenden mit „B." zitiert.

[2]) Über die Zerlegung von Rechtecken in lauter verschiedene Quadrate. Journ. f. d. reine angew. Mathematik **182** (1940), S. 60—64.

wesentlich auf gewissen Eigenschaften der c_i, die hier zusammengestellt seien:

$$\alpha)\ c_i \not\equiv 0 \pmod{13^2}, \quad c_i \not\equiv 0 \pmod{633};$$

$$\beta)\ \frac{c_i}{c_k} \not\equiv \frac{13}{16}, \ \frac{c_i}{c_k} \not\equiv \frac{13 \cdot 16}{425}, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, d).$$

Die Rechtecke R_1 und R_1' werden nun folgendem, nur für R_1 beschriebenem Verfahren unterworfen:

I. An die längere Seite von R_1 wird, mit seiner kürzeren Seite, das passende ähnliche Abbild von R_1 gelegt. So ergibt sich ein neues, in Teilquadrate zerlegtes Rechteck R_2.

Allgemein entsteht R_{n+1} durch Anfügen der kürzeren Seite des passenden ähnlichen Abbildes von R_1 an die längere Seite von R_n.

II. Verkleinerung von R_n ($n > 1$) führt zu demjenigen ähnlichen Rechteck $\overline{R}_n$, das mit $R_1 \equiv \overline{R}_1$ umfangsgleich ist. Dann wird $\overline{R}_n$ zusammen mit $\overline{R}_n'$ im Quadrat Q_n untergebracht, wie Fig. 1 es für $n = 3$ zeigt.

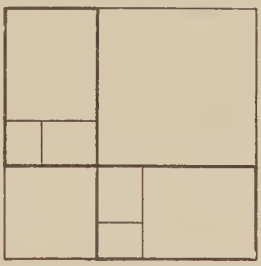


Fig. 1.

Zur Entlastung des Wortlauts ist es zweckmäßig, alle Teilquadrate von R_1 und R_1' gleichsam in R_1 vereinigt zu denken; dann braucht von R_n', $\overline{R}_n'$ nicht mehr die Rede zu sein.

Offenbar sind alle Q_n gleich groß, und Q_{n+1} enthält d Teilquadrate mehr als Q_n.

Q_n ($n = 1, 2, \ldots$) ist die in der Einleitung angekündigte Folge. Der Beweis wird in vier Schritten erbracht:

1. Q_n enthält lauter inkongruente Quadrate.

2. $\overline{R}_l$ und $\overline{R}_m$ ($l \neq m$) stimmen nicht in den Seiten überein. Daher sind die beiden außerhalb der Rechtecke gelegenen — nach 1. inkongruenten — Teilquadrate in Q_l verschieden von denen in Q_m.

3. Die kleinere Seite von $\overline{R}_l$ ist stets größer als die Seite des größten Teilquadrats in $\overline{R}_m$ (für $l = m$ ist dies schon in 1. enthalten). Also kommt das kleinere der beiden außerhalb der Rechtecke gelegenen Teilquadrate von Q_l, und erst recht das größere, in keinem $\overline{R}_m$ vor.

4. $\overline{R}_l$ und $\overline{R}_m$ ($l \neq m$) stimmen in keinem Teilquadrat überein.

2.

Beweis zu 1. Da R_1 das Quadrat über der kürzeren Seite nicht als Teilquadrat enthält ($\gamma_d < 1$), gilt nach Konstruktion dasselbe für R_n und $\overline{R}_n$. Ferner ist R_n, also auch $\overline{R}_n$, gewiß kein Quadrat. Daraus folgt, daß die beiden größten Teilquadrate von Q_n inkongruent sind und in Q_n nur je einmal vorkommen.

Es bleibt zu zeigen, daß die Teilquadrate in R_n und damit auch die in $\bar{R}_n$ paarweise inkongruent sind.

Auf Grund der Definition von R_n gilt für seine kürzere Seite σ_n:

(1) $$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = \tfrac{16}{13}, \quad \sigma_{n+2} = \tfrac{16}{13} \cdot \sigma_{n+1} + \sigma_n.$$

Daher ist

(2) $$\sigma_n = \frac{x_n}{13^{n-1}}, \quad (x_n, 13) = 1$$

mit

(3) $$x_1 = 1, \quad x_2 = 16, \quad x_{n+2} = 16 \cdot x_{n+1} + 13^2 \cdot x_n.$$

Zwei beliebige Quadratseiten in R_n haben die Längen

$$\gamma_i \cdot \frac{x_l}{13^{l-1}}, \quad \gamma_k \cdot \frac{x_m}{13^{m-1}} \qquad \begin{pmatrix} i, k = 1, 2, \ldots, d \\ l, m = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

Ihre Gleichheit ergäbe

$$\frac{\gamma_i}{\gamma_k} = \frac{c_i}{c_k} = 13^{l-m} \cdot \frac{x_m}{x_l}.$$

Hierin darf $l > m$ angenommen werden; bei $l = m$ hätte schon R_1 mindestens zwei kongruente Teilquadrate. Nun enthält nach α) kein c_i den Faktor 13 öfter als einmal; daher ist

$$l - m = 1.$$

Daraus folgt

$$(x_l, x_m) = 1;$$

denn nach (2) und (3) ist

(4) $$(x_{n+2}, x_{n+1}) = (x_{n+1}, x_n) = \ldots = (x_2, x_1) = 1.$$

Der Bruch

$$\frac{13 \cdot x_{l-1}}{x_l}$$

ist also reduziert und daher $c_k \geqq x_l$.

Für $l = 2$ bzw. $l = 3$ hätte man

$$\frac{c_i}{c_k} = \frac{13 \cdot x_{l-1}}{x_l} = \frac{13}{16} \quad \text{bzw.} \quad = \frac{13 \cdot 16}{425};$$

aber diese Werte kommen nach β) für $\frac{c_i}{c_k}$ nicht vor.

Für $l > 3$ ist

$$x_l > c_d = 1040 \geqq c_k$$

im Widerspruch zu $c_k \geqq x_l$.

Damit ist 1. bewiesen.

3.

Jetzt soll zu 2. gezeigt werden, daß $\bar{R}_l$ und $\bar{R}_m$ für $l \neq m$ nicht in den Seiten übereinstimmen.

Wegen der Umfangsgleichheit beider Rechtecke braucht nur die Verschiedenheit ihrer Seitenverhältnisse bewiesen zu werden, die mit denen von R_l und R_m übereinstimmen. Die Seitenverhältnisse von R_l und R_m betragen:

$$\frac{\sigma_{l+1}}{\sigma_l} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\sigma_{m+1}}{\sigma_m}.$$

Aus der Annahme ihrer Gleichheit folgt wegen (2)

$$\frac{x_{l+1}}{x_l} = \frac{x_{m+1}}{x_m}.$$

Diese Brüche sind nach (4) reduziert, also ist $l = m$.

4.

Zum Beweis der Behauptung 3. von **1.** werden die kleinere Seite von $\bar{R}_l$ und die Seite des größten Teilquadrats in $\bar{R}_m$ abgeschätzt. Die kleinere Seite $\bar{\sigma}_l$ von $\bar{R}_l$ beträgt

$$\bar{\sigma}_l = \frac{\sigma_l \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)}{\sigma_l + \sigma_{l+1}} = (\sigma_1 + \sigma_2) \cdot \frac{1}{1 + \frac{\sigma_{l+1}}{\sigma_l}}.$$

Nun ist nach (1)

$$\frac{\sigma_{l+1}}{\sigma_l} = \frac{16}{13} + \frac{\sigma_{l-1}}{\sigma_l} \geqq \frac{16}{13}$$

und daher

$$\frac{\sigma_{l+1}}{\sigma_l} \leqq \frac{16}{13} + \frac{13}{16} = \frac{425}{208},$$

also

$$\bar{\sigma}_l \geqq \frac{208}{633} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2).$$

Für die Seite des größten Teilquadrats in $\bar{R}_m$ ergibt sich der Wert

$$\gamma_d \cdot \frac{\sigma_m \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)}{\sigma_m + \sigma_{m+1}} = \gamma_d \cdot \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{1 + \frac{\sigma_{m+1}}{\sigma_m}} \leqq \gamma_d \cdot \frac{13}{29} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2).$$

Wegen $\gamma_d = \frac{16}{29}$ ist

$$\frac{208}{633} > \gamma_d \cdot \frac{13}{29},$$

also $\bar{\sigma}_l$, wie behauptet, größer als die längste Teilquadratseite in irgendeinem $\bar{R}_m$.

5.

Die Begründung der Behauptung 4. von **1.**, daß $\bar{R}_l$ und $\bar{R}_m$ $(l > m)$ in keinem Teilquadrat übereinstimmen, stützt sich auf folgenden Hilfssatz: Es sei

$$x_1 = 1, \; x_2 = a, \; x_{n+2} = a \cdot x_{n+1} + b^2 \cdot x_n, \; (a, b) = 1, \; a > b$$

und

$$y_n = x_{n+1} + b \cdot x_n.$$

Dann ist für $l > 2$:

$$\begin{aligned} (y_l, y_m) &\leqq y_{\left[\frac{l}{3}\right]}, \\ (y_l, x_m) &\leqq y_{\left[\frac{l}{3}\right]}, \end{aligned} \qquad (m < l).$$

Beweis. Aus $(x_1, b) = 1$, $(x_2, b) = 1$ ergibt sich durch vollständige Induktion $(x_n, b) = 1$ und damit weiter

$$(y_n, b) = 1 \tag{5}$$

sowie

$$(x_{n+1}, x_n) = 1, \quad (y_n, x_{n+1}) = 1, \quad (y_n, x_n) = 1. \tag{6}$$

Ferner ist leicht die Gültigkeit der Rekursionsformel

$$y_l = a \cdot y_{l-1} + b^2 \cdot y_{l-2} \qquad (l > 1)$$

zu bestätigen; sie führt in Verbindung mit (5) und

$$y_1 = a + b, \quad y_2 = a^2 + a \cdot b + b^2, \quad (a, b) = 1$$

zu

$$(y_l, y_{l-1}) = (y_{l-1}, y_{l-2}) = \ldots = (y_2, y_1) = 1 \tag{7}$$

und zu

$$(y_l, a) = 1. \tag{8}$$

Die Gleichung

$$y_l = x_p \cdot y_{l-p+1} + b^2 \cdot x_{p-1} \cdot y_{l-p} \qquad (l > p > 1) \tag{9}$$

entspricht für $p = 2$ der obigen Rekursionsformel. Im Falle $l > p + 1$ wird (9) durch Einsetzen von

$$y_{l-p+1} = a \cdot y_{l-p} + b^2 \cdot y_{l-p-1}$$

zu

$$\begin{aligned} y_l &= (a \cdot x_p + b^2 \cdot x_{p-1}) \cdot y_{l-p} + b^2 \cdot x_p \cdot y_{l-p-1} \\ &= x_{p+1} \cdot y_{l-p} + b^2 \cdot x_p \cdot y_{l-p-1}. \end{aligned}$$

Demnach ist (9) richtig, und folglich, für $p = 1$ wegen (7) und $x_1 = 1$,

$$(y_l, y_{l-p}) = (y_l, x_p) = (y_{l-p}, x_p) \qquad (l > p).$$

Hiermit sind die beiden ersten Gleichungen des Systems

$$\begin{aligned} (y_l, y_m) &= (y_m, x_{l-m}), \\ (y_l, x_m) &= (x_m, y_{l-m}), \\ (x_l, y_m) &= (y_m, z_{l-m}), \end{aligned} \qquad (l > m) \tag{10}$$

bewiesen. Die Größen z_n der dritten sind erklärt durch

$$z_1 = 1, \quad z_2 = a - b, \quad z_{n+2} = a \cdot z_{n+1} + b^2 \cdot z_n.$$

Elimination von x_{l-1} und x_{l-2} aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} x_l &= a \cdot x_{l-1} + b^2 \cdot x_{l-2}, \\ y_{l-1} &= x_l + b \cdot x_{l-1}, \\ y_{l-2} &= x_{l-1} + b \cdot x_{l-2}, \end{aligned} \qquad (l > 2)$$

ergibt

$$a \cdot x_l = (a - b) \cdot y_{l-1} + b^2 \cdot y_{l-2},$$

also

$$a \cdot x_l = z_2 \cdot y_{l-1} + b^2 \cdot z_1 \cdot y_{l-2}.$$

Weiter folgt, falls $l > 3$ ist,

$$\begin{aligned} a \cdot x_l &= z_2 \cdot (a \cdot y_{l-2} + b^2 \cdot y_{l-3}) + b^2 \cdot z_1 \cdot y_{l-2} \\ &= (a \cdot z_2 + b^2 \cdot z_1) \cdot y_{l-2} + b^2 \cdot z_2 \cdot y_{l-3} \\ &= z_3 \cdot y_{l-2} + b^2 \cdot z_2 \cdot y_{l-3} \end{aligned}$$

und allgemein

$$a \cdot x_l = z_p \cdot y_{l-p+1} + b^2 \cdot z_{p-1} \cdot y_{l-p} \qquad (l > p;\ p > 1).$$

Hiernach ist — für $p > 1$ wegen (7) und (8), für $p = 1$ wegen (6) und $z_1 = 1$ —

$$(x_l,\ y_{l-p}) = (y_{l-p},\ z_p) \qquad (l > p).$$

Mit $l - p = m$ ist das die dritte Gleichung von (10).

Durch wiederholte Anwendung von (10) auf $(y_l,\ y_m)$ und $(y_l,\ x_m)$ wird nun ein Index $\leqq \left[\frac{l}{3}\right]$ erreicht oder die Teilerfremdheit erwiesen. Wegen

$$z_n \leqq x_n < y_n$$

ist die Begründung des Hilfssatzes dann erledigt.

Es wird für

A. $l > m \geqq \frac{2}{3} \cdot l$:

$$\begin{aligned} (y_l,\ y_m) &= (y_m,\ x_{l-m}) \leqq x_{l-m}, \\ (y_l,\ x_m) &= (x_m,\ y_{l-m}) \leqq y_{l-m}, \end{aligned} \qquad l - m \leqq \left[\frac{l}{3}\right];$$

B. $\frac{2}{3} \cdot l > m > \frac{1}{2} \cdot l$:

$$\begin{aligned} (y_l,\ y_m) &= (y_m,\ x_{l-m}) = (x_{l-m},\ y_{2\cdot m-l}) \leqq y_{2\cdot m-l}, \\ (y_l,\ x_m) &= (x_m,\ y_{l-m}) = (y_{l-m},\ z_{2\cdot m-l}) \leqq z_{2\cdot m-l}, \end{aligned} \qquad 2 \cdot m - l \leqq \left[\frac{l}{3}\right];$$

C. $m = \frac{1}{2} \cdot l$ mit Benutzung von (6):

$$\begin{aligned} (y_l,\ y_m) &= (y_m,\ x_{l-m}) = (y_m,\ x_m) = 1, \\ (y_l,\ x_m) &= (x_m,\ y_{l-m}) = (x_m,\ y_m) = 1; \end{aligned}$$

D. $\frac{1}{2} \cdot l > m > \frac{1}{3} \cdot l$:

$$\begin{aligned} (y_l,\ y_m) &= (x_{l-m},\ y_m) = (y_m,\ z_{l-2\cdot m}) \leqq z_{l-2\cdot m}, \\ (y_l,\ x_m) &= (y_{l-m},\ x_m) = (x_m,\ y_{l-2\cdot m}) \leqq y_{l-2\cdot m}, \end{aligned} \qquad l - 2 \cdot m \leqq \left[\frac{l}{3}\right];$$

E. $\frac{1}{3} \cdot l \geqq m$:

$$\begin{aligned} (y_l,\ y_m) &\leqq y_m, \\ (y_l,\ x_m) &\leqq x_m, \end{aligned} \qquad m \gtreqless \left[\frac{l}{3}\right].$$

6.

Für die Länge einer Teilquadratseite in $\bar{R}_l$ bzw. $\bar{R}_m$ ergibt sich

$$\gamma_i \cdot \sigma_q \cdot \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_l + \sigma_{l+1}} \quad (q \leqq l) \qquad \text{bzw.} \qquad \gamma_k \cdot \sigma_r \cdot \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_m + \sigma_{m+1}} \quad (r \leqq m).$$

Aus der Annahme der Gleichheit beider Werte folgt nach (2)

$$\frac{\gamma_i}{\gamma_k} = \frac{c_i}{c_k} = 13^{q-r-l+m} \cdot \frac{x_r \cdot (x_{l+1} + 13 \cdot x_l)}{x_q \cdot (x_{m+1} + 13 \cdot x_m)},$$

also mit der Bezeichnung des Hilfssatzes ($a = 16$, $b = 13$)

$$\frac{c_i}{c_k} = 13^{q-r-l+m} \cdot \frac{x_r \cdot y_l}{x_q \cdot y_m} \qquad \begin{pmatrix} q \leqq l \\ r \leqq m \end{pmatrix}.$$

Es war $l > m$ vorausgesetzt. Für $l = 2$ hat man $m = 1$, $r = 1$, $q = 1$ oder 2, also

$$\frac{c_i}{c_k} = \frac{633}{13 \cdot 29} \quad \text{oder} \quad \frac{c_i}{c_k} = \frac{633}{16 \cdot 29},$$

im Gegensatz zu α).

Für $l > 2$ hat wegen (5) der Zähler des für $\frac{c_i}{c_k}$ erhaltenen Bruches nach dessen Reduktion einen Wert Z mit

$$Z \geqq \frac{y_l}{(y_l,\ x_q) \cdot (y_l,\ y_m)};$$

also ist nach dem Hilfssatz

$$c_i \geqq Z \geqq \frac{y_l}{y^2_{\left[\frac{l}{3}\right]}}.$$

Nun ist aber

$$y_l > 16 \cdot y_{l-1} > \ldots > 16^{l-2} \cdot y_2 = 16^{l-2} \cdot 633 > 16^l \qquad (l > 2),$$

also

$$\frac{y_l}{y_{l-1}} = 16 + \frac{13^2}{\underline{y_{l-1}}} < 16 + \frac{13^2}{16} < 29 \qquad (l > 2),$$
$$\underline{y_{l-2}}$$

ferner

$$y_l < 29 \cdot y_{l-1} < \ldots < 29^{l-2} \cdot y_2 = 29^{l-2} \cdot 633 < 29^l \qquad (l > 2),$$

und endlich, wegen $y_1 = 29$, $y_2 < 29^2$, für alle l

$$y_l \leqq 29^l.$$

Mit $\left[\frac{l}{3}\right] = s\ (>0)$ wird $l \geqq 3 \cdot s$, also

$$c_i \geqq \frac{y_{3 \cdot s}}{y_s^2} > \frac{16^{3 \cdot s}}{29^{2 \cdot s}} > 4^s.$$

Dies ist jedoch nur bis zu einem Höchstwert von s möglich. Damit ist gezeigt:

In der Folge Q_n $(n = 1, 2, \ldots)$ der zerlegten Quadrate haben spätestens von einer gewissen Stelle ab alle Glieder die gewünschten Eigenschaften 1. bis 4.

Diese Feststellung genügt bereits zum Nachweis der in der Einleitung angekündigten Abschätzung

$$\bar{t} = O(t^2).$$

7.

Die Begründung der auf alle Q_n erstreckten Behauptung in **1.** erfordert die Bestimmung des Höchstwertes l_0 von l in

$$c_d = 1040 \geqq \frac{y_l}{y^2_{\left[\frac{l}{3}\right]}}$$

und die Bestätigung von 4. für $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{l_0}$.

Nun wächst

$$\frac{y_{3 \cdot s}}{y_s^2}$$

monoton mit s; denn es ist

$$y_{3 \cdot (s+1)} > y_{3 \cdot s} \cdot 16^3$$

und

$$y^2_{s+1} < y_s^2 \cdot 29^2,$$

also

$$\frac{y_{3 \cdot (s+1)}}{y^2_{s+1}} > \frac{y_{3 \cdot s} \cdot 16^3}{y_1^2 \cdot 29^2} > 4 \cdot \frac{y_{3 \cdot s}}{y_s^2}.$$

Wegen $y_3 = 15029$ wird

$$\frac{y_9}{y_3^2} > \frac{16^6 \cdot y_3}{y_3^2} = \frac{16^6}{15029} > 1040,$$

und es ist auch

$$\frac{y_8}{y_2^2} > \frac{y_7}{y_2^2} > \frac{16^5 \cdot y_2}{y_2^2} = \frac{16^5}{633} > 1040,$$

dagegen

$$\frac{y_6}{y_2^2} < \frac{29^3 \cdot y_3}{y_2^2} = \frac{29^3 \cdot 15029}{633^2} < 1040.$$

Infolgedessen ist $l_0 = 6$.

Unter voller Ausnutzung von (10) in Verbindung mit $z_2 = 3$ ergibt sich

$$(y_6, y_m) \leqq 29, \quad (y_6, x_m) \leqq 29 \qquad (m < 6)$$

und

$$(y_l, y_m) = 1, \quad (y_l, x_m) = 1 \qquad \begin{pmatrix} 2 < l < 6 \\ m < l \end{pmatrix}.$$

Es ist daher

$$\frac{y_6}{(y_6, y_m) \cdot (y_6, x_m)} \geqq \frac{y_6}{29^2} > \frac{16^6}{29^2} > 1040 \qquad (m < 6)$$

und wegen

$$y_5 > y_4 > y_3 > 16^3 > 1040$$

auch

$$\frac{y_l}{(y_l, y_m) \cdot (y_l, x_m)} = y_l > 1040 \qquad \begin{pmatrix} 2 < l < 6 \\ m < l \end{pmatrix}.$$

Der Fall $l = 2$ war schon in **6.** erledigt.

Die Folge Q_n $(n = 1, 2, \ldots)$ hat also von Anfang an die Eigenschaften 1. bis 4.

Läßt man eins der $t > 1$ kongruenten Teilquadrate eines Rechtecks unzerlegt und ersetzt man die $t - 1$ übrigen durch Abbilder von $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{t-1}$, so ist das Rechteck in

$$1 + (2 + 53) + (2 + 2 \cdot 53) + \ldots + (2 + (t - 1) \cdot 53)$$

paarweis inkongruente Teilquadrate zerlegt.

Für die Anzahl $\bar{t}$ der erforderlichen paarweis inkongruenten Teilquadrate gilt also genauer

$$\bar{t} \leqq \tfrac{1}{2} \cdot (53 \cdot t^2 - 49 \cdot t - 2).$$

8.

Bedeuten $t(\varrho)$ und $\bar{t}(\varrho)$ die Mindestzahlen kongruenter bzw. inkongruenter Quadrate, aus denen sich das Rechteck vom rationalen Seitenverhältnis ϱ zusammensetzen läßt, so kann man dem Ergebnis von **6.** die Form geben:

$$\liminf \frac{\log t(\varrho)}{\log \bar{t}(\varrho)} \geqq \frac{1}{2}.$$

Es soll noch gezeigt werden, daß andererseits

$$\limsup \frac{\log t(\varrho)}{\log \bar{t}(\varrho)} = \infty,$$

nämlich sogar

$$\limsup \frac{\log t(\varrho)}{\bar{t}(\varrho)} > 0$$

ist.

Zu jedem festen $m > 1$ gibt es Quadrate A_0, B_0 mit den Seitenlängen a_0 bzw. b_0, von denen aus sich ein Teil eines Rechtecks S_m bis zum Teilquadrat B_m derart aufbauen läßt, wie es Fig. 2 für $m = 2$ andeutet.

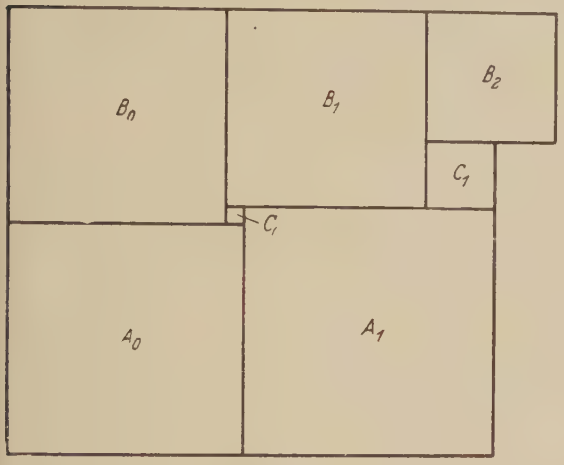


Fig. 2.

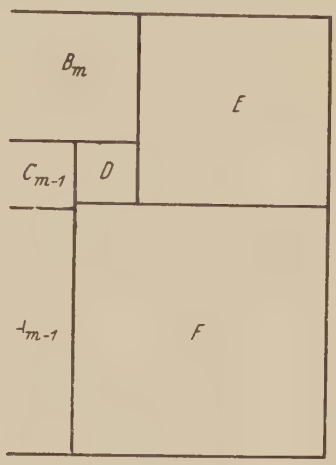


Fig. 3.

An B_m, C_{m-1}, A_{m-1} werden nach Fig. 3 die Quadrate D und F angesetzt, so daß am ganzen Rechteck S_m noch das Rechteck E fehlt.

Man findet für die Seitenlängen von

A_ν $(0 \leqq \nu < m)$: $a_0 \cdot w_\nu - b_0 \cdot (w_\nu - 1)$,

B_ν $(0 \leqq \nu \leqq m)$: $b_0 \cdot w_\nu - a_0 \cdot (w_\nu - 1)$,

C_ν $(0 \leqq \nu < m)$: $(a_0 - b_0) \cdot (w_{\nu+1} - w_\nu)$,

D: $b_0 \cdot (2 \cdot w_m - w_{m-1}) - a_0 \cdot (2 \cdot w_m - w_{m-1} - 1)$,

F: $(a_0 - b_0) \cdot (3 \cdot w_m - w_{m-1} - 1)$,

E: $b_0 \cdot (3 \cdot w_m - w_{m-1}) - a_0 \cdot (3 \cdot w_m - w_{m-1} - 2)$ und

$a_0 \cdot (5 \cdot w_m - 2 \cdot w_{m-1} - 2) - b_0 \cdot (5 \cdot w_m - 2 \cdot w_{m-1} - 1)$.

Hierin ist

(11) $$w_0 = 1, \quad w_1 = 2, \quad w_{\nu+2} = 4 \cdot w_{\nu+1} - w_\nu - 1.$$

E wird ein Quadrat, wenn

$$a_0 \cdot (8 \cdot w_m - 3 \cdot w_{m-1} - 4) = b_0 \cdot (8 \cdot w_m - 3 \cdot w_{m-1} - 1)$$

ausfällt. Daher sei

$$a_0 = 8 \cdot w_m - 3 \cdot w_{m-1} - 1,$$
$$b_0 = 8 \cdot w_m - 3 \cdot w_{m-1} - 4,$$

also

$$a_0 - b_0 = 3.$$

Danach ergeben sich als Seitenlängen der $3 \cdot m + 4$ Teilquadrate von S_m für

$$A_\nu \ (0 \leqq \nu < m): \quad b_0 + 3 \cdot w_\nu,$$
$$B_\nu \ (0 \leqq \nu \leqq m): \quad a_0 - 3 \cdot w_\nu,$$
$$C_\nu \ (0 \leqq \nu < m): \quad 3 \cdot (w_{\nu+1} - w_\nu),$$
$$D: \quad 2 \cdot w_m - 1,$$
$$F: \quad 9 \cdot w_m - 3 \cdot w_{m-1} - 3,$$
$$E: \quad 7 \cdot w_m - 3 \cdot w_{m-1} - 2.$$

Wegen $m > 1$ ist nach (11)

$$w_m > 3 \cdot w_{m-1} - 1.$$

Daraus folgt für die Seitenlängen $\overline{A}_\nu, \ldots, \overline{F}$ von $A_\nu, \ldots, F$ die Beziehung

$$3 = \overline{C}_0 < \ldots < \overline{C}_{m-2} < \overline{D} < \overline{C}_{m-1} < \overline{B}_m < \overline{E} < \overline{B}_\nu < \overline{A}_\nu < \overline{F} \ (\nu < m).$$

Diese Größen sind also sämtlich positiv und paarweise verschieden. Übrigens ist S_2 bereits bekannt durch Herrn Stöhr[3]). — Für die Seitenlängen g_m und h_m von S_m findet man

$$g_m = a_0 + b_0 = 16 \cdot w_m - 6 \cdot w_{m-1} - 5$$

und — nach kurzer Rechnung —

$$2 \cdot h_m = (m+1) \cdot g_m + 5 \cdot w_m - 3 \cdot w_{m-1} - 1.$$

Infolgedessen ist

$$4 \cdot h_m = (2 \cdot m + 3) \cdot g_m - 3 \cdot (2 \cdot w_m - 1),$$

also (g_m, h_m) ein Teiler von $3 \cdot (2 \cdot w_m - 1)$.

Ferner ist

$$8 \cdot (2 \cdot w_m - 1) - g_m = 3 \cdot (2 \cdot w_{m-1} - 1),$$

also $(g_m, 2 \cdot w_m - 1)$ ein Teiler von $3 \cdot (2 w_{m-1} - 1)$.

Nun wird gezeigt, daß stets $(2 \cdot w_m - 1, 2 \cdot w_{m-1} - 1) = 1$ ist; daraus folgt dann

$$(g_m, h_m) \leqq 3^2.$$

---

[3]) A. Stöhr, Über Zerlegungen von Rechtecken in inkongruente Quadrate (Dissertation). Schriften des Math. Inst. und des Inst. f. angew. Math. der Univ. Berlin 4 (1939), S. 119—140, Abb. 1 auf S. 120.

Nach (11) ist

$$\begin{aligned} 2 \cdot w_m - 1 &= 8 \cdot w_{m-1} - 2 \cdot w_{m-2} - 3 \\ &= 4 \cdot (2 \cdot w_{m-1} - 1) - (2 \cdot w_{m-2} - 1), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} (2 \cdot w_m - 1,\ 2 \cdot w_{m-1} - 1) &= (2 \cdot w_{m-1} - 1, 2 \cdot w_{m-2} - 1) = \dots \\ &= (2 \cdot w_1 - 1,\ 2 \cdot w_0 - 1) = 1. \end{aligned}$$

S_m besteht aus $3 \cdot m + 4$ inkongruenten Teilquadraten, und es ist $(g_m, h_m) \leqq 3^2$. Daraus folgt für die Mindestzahlen t_m, $\bar{t}_m$ von inkongruenten bzw. kongruenten Teilquadraten in S_m

$$\bar{t}_m \leqq 3 \cdot m + 4,$$

$$t_m \geqq \frac{1}{3^4} \cdot g_m \cdot h_m.$$

Wegen (11) ist für $m > 1$

$$w_{m-1} \geqq w_{m-2} + 1$$

und darum

$$w_m = 4 \cdot w_{m-1} - w_{m-2} - 1 \geqq 3 \cdot w_{m-1},$$

$$w_m \geqq 3^{m-1} \cdot w_1 = \tfrac{2}{3} \cdot 3^m;$$

hiermit führen jetzt grobe Abschätzungen zum Ziel. Es ist

$$t_m \geqq \frac{1}{3^4} \cdot g_m \cdot h_m > \frac{1}{3^4} \cdot m \cdot w_m^2 > 3^{2 \cdot m - 5} \geqq 3^{\frac{2 \cdot \bar{t}_m - 23}{3}},$$

also

$$\liminf \frac{\log t_m}{\bar{t}_m} \geqq \frac{2}{3} \cdot \log 3 > 0;$$

um so mehr gilt dann

$$\limsup \frac{\log t(\varrho)}{\bar{t}(\varrho)} > 0.$$

(Eingegangen am 23. November 1939.)

Über eine weitere Verallgemeinerung des Verbandsbegriffes.

Von

Fritz Klein-Barmen in Wuppertal.

1. Zahlreiche Begriffe der Mathematik sind auf dem Wege der formalen Verallgemeinerung bereits gesicherter Begriffe entstanden. Um einen solchen Begriff als lebensfähig und fruchtbar zu erweisen, hat man zu zeigen, daß er in nichttrivialer Weise realisiert werden kann. Dazu muß man Objekte angeben, die ihm genügen, ohne daß sie unter den als Ausgangspunkt genommenen Begriff fallen. Die Erfahrung lehrt, daß der formale Teil der Begriffsbildung meistens viel leichter zu erledigen ist als die existentiale Seite der Angelegenheit.

Im Zuge des Verallgemeinerungsprozesses, den der Begriff des *Verbandes* zur Zeit durchmacht, untersuche ich im folgenden halbverbandähnliche Bereiche, die sich von den eigentlichen *Halbverbänden*[1]) dadurch unterscheiden, daß — verknüpfungs-theoretisch gesehen — das *kommutative* Gesetz nicht mehr vorausgesetzt wird. Derartige Bereiche mögen *Schief-Halbverbände* genannt werden. Wie die weiterhin angegebenen Beispiele erkennen lassen, weichen die echten Schief-Halbverbände in ihrer Konstitution sehr stark von den eigentlichen Halbverbänden ab. Vergleichsweise besteht zwischen den Begriffen *Gewebe*[2]) und *Halbverband* eine wesentlich geringere Spannung. Dieser Umstand läßt vermuten, daß in bezug auf einen Schief-Halbverband das kommutative Gesetz nicht ein einfaches, sondern ein zusammengesetztes Axiom ist. Tatsächlich kann auch dieses Gesetz in zwei voneinander unabhängige Bestandteile aufgelöst werden. Die Kluft zwischen den kommutativen

[1]) Vgl. die im Literaturverzeichnis mit [H. 1] bezeichnete Arbeit. — Bei dieser Gelegenheit möchte ich nicht versäumen, darauf aufmerksam zu machen, daß die Theorie der Verbände, deren Bedeutung für den Aufbau der *Algebra* und *Geometrie* seit längerer Zeit erkannt ist, neuerdings auch zur Begründung der *Analysis* mit Erfolg herangezogen worden ist. So ist es C. Carathéodory gelungen, den *Integralbegriff* auf verbandstheoretischer Grundlage zu entwickeln; vgl. Carathéodory [1], [2] und [3], ferner Foradori [2]. — Der Vollständigkeit wegen habe ich in das Literaturverzeichnis auch die sonstigen neueren Arbeiten zur Theorie der Verbände aufgenommen; es handelt sich dabei durchweg um Untersuchungen, die aus dem nordamerikanischen Forschungskreis hervorgegangen sind.

[2]) Vgl. [H. 2]. Hinsichtlich anderer Verallgemeinerungen des Verbandsbegriffes verweise ich auf [H. 3].

und nicht-kommutativen Schief-Halbverbänden dürfte damit aber noch nicht als überbrückt anzusehen sein.

2. Grundgegebenheit sei eine Menge M von unterscheidbaren Elementen. Es bedeute $\circ$ eine *Verknüpfung* in M. Diese Verknüpfung sei hinsichtlich der mit $=$ bezeichneten Elementidentität durch die folgenden *Axiome* näher bestimmt:

I. Sind a, b beliebige Elemente aus M, so gibt es ein Element c aus M derart, daß gilt

$$a \circ b = c.$$

II. Für drei beliebige Elemente a, b, c aus M gilt

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

III. Für jedes Element a aus M gilt

$$a \circ a = a.$$

Erklärung 1. Eine von der Nullmenge verschiedene Menge M mit einer den Axiomen I, II und III genügenden Elementverknüpfung $\circ$ heiße ein *Schief-Halbverband*, kürzer ein *Schief* in bezug auf $\circ$ oder ein $\mathfrak{S}(\circ)$. Unter der *Ordnung* eines $\mathfrak{S}(\circ)$ werde die Anzahl der verschiedenen Elemente desselben verstanden; je nachdem die Ordnung endlich oder unendlich ist, werde das $\mathfrak{S}(\circ)$ als *endlich* oder *unendlich* bezeichnet. Ist M ein $\mathfrak{S}(\circ)$, so heiße eine Untermenge N von M, die ebenfalls ein $\mathfrak{S}(\circ)$ ist, ein *Unterschief* von M; umgekehrt heiße M ein *Oberschief* von N. Insbesondere werde, wenn M von N verschieden ist, N als ein *eigentliches* Unterschief von M und umgekehrt M als ein *eigentliches* Oberschief von N bezeichnet.

Sind keine Mißverständnisse zu befürchten, so schreiben wir statt $a \circ b$ kürzer ab.

In den beiden folgenden Sätzen, von denen der erste ohne weiteres einleuchtend ist, sei M ein $\mathfrak{S}(\circ)$; es seien

(1) $$M_1, M_2, \ldots$$

endlich oder unendlich viele Unterschiefs von M.

Satz 1. *Der mengentheoretische Durchschnitt der Unterschiefs* (1) *ist wieder ein Unterschief von M, vorausgesetzt, daß der Durchschnitt nicht leer ist.*

Satz 2. *Es gibt genau ein Unterschief C von M von der folgenden Beschaffenheit: C ist Unterschief eines jeden Unterschiefs von M, das gemeinsame Obermenge der Schiefs* (1) *ist; jedes der Schiefs* (1) *ist ein Unterschief von C.*

Beweis. C ist der mengentheoretische Durchschnitt aller Unterschiefs von M, die gemeinsame Obermengen der Schiefs (1) sind; und dieser Durchschnitt ist nicht leer, da es mindestens ein Schief gibt, das gemeinsame Obermenge der Schiefs (1) ist, nämlich M.

Erklärung 2. Das Schief C des Satzes 2 heiße das *Kompositum* der Schiefs (1).

Satz 3. *Ist* M *eine endliche oder unendliche Menge von Schiefs derart, daß je zwei Schiefs aus* M *Unterschiefs von mindestens einem Schief aus* M *sind, so ist auch die Menge aller Elemente, die Elemente von Schiefs aus* M *sind, ein Schief.*

Dieser Satz entspricht einem Satz von Steinitz aus der Körpertheorie. Es genügt, wegen des Beweises auf die betreffende Arbeit[3]) von Steinitz zu verweisen, da die dortigen Ausführungen sich leicht auf unseren Fall übertragen lassen.

Satz 4. *Es sei M ein* $\mathfrak{S}$ (o); *es seien a, b Elemente aus M. Dann ist jede der folgenden Mengen ein Unterschief von M:*

$$M_1 = (a, b, ab, ba, aba, bab),$$

$$M_2' = (a, ab, ba, aba, bab), \qquad M_2'' = (b, ab, ba, aba, bab),$$

$$M_3 = (ab, ba, aba, bab),$$

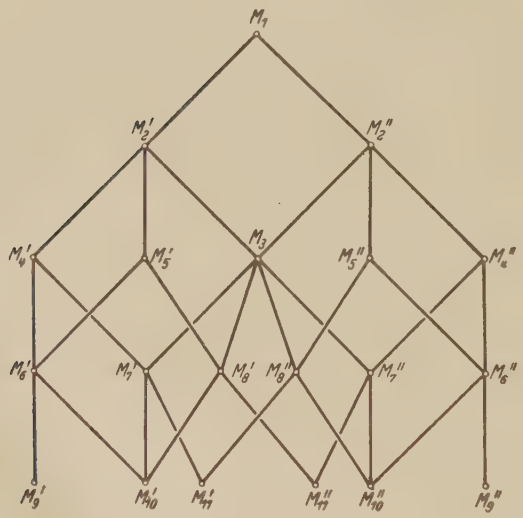


Fig. 1.

$M_4' = (a, ab, aba),$
$M_5' = (a, ba, aba),$
$M_6' = (a, aba),$
$M_7' = (ab, aba),$
$M_8' = (ba, aba),$
$M_9' = (a),$
$M_{10}' = (aba),$
$M_{11}' = (ab),$
$M_4'' = (b, ba, bab),$
$M_5'' = (b, ab, bab),$
$M_6'' = (b, bab),$
$M_7'' = (ba, bab),$
$M_8'' = (ab, bab),$
$M_9'' = (b),$
$M_{10}'' = (bab),$
$M_{11}'' = (ba).$

Beweis. Die Verknüpfung zweier Elemente aus N, wo N eine der obigen Mengen ist, ergibt ersichtlich wieder ein Element aus N.

Fig. 1 veranschaulicht die Zusammenhangsverhältnisse, die zwischen den in Satz 4 betrachteten Schiefs bestehen. Bei der üblichen Interpretation stellt Fig. 1 einen gewöhnlichen Halbverband dar, und zwar einen solchen 20. Ordnung. Dieser Halbverband hat überdies die bemerkenswerte Eigen-

[3]) Vgl. Steinitz [1], S. 12.

schaft, daß zwei Elemente mit einem gemeinsamen *unteren* Nachbarn auch einen gemeinsamen *oberen* Nachbarn haben[4]). Es handelt sich also um einen Halbverband, der einem der beiden *Birkhoffschen* Axiome genügt[5]).

Satz 5. *Ein von zwei Elementen erzeugtes freies Schief ist von der Ordnung* 6.

Beweis. Sind a, b zwei Elemente, so ist jedes Element, das vermöge a und b erzeugt werden kann, mit einem der Elemente

$$a, b, ab, ba, aba, bab$$

identisch; die letzteren bilden aber nach dem vorhergehenden Satz ein Schief.

Weiteres über die Verknüpfung der Elemente eines Schiefs sagen die folgenden Sätze aus, die zum Teil ein duales Gegenstück aufweisen. Die einfachen Beweise können wir übergehen.

Satz 6. *Mit*

$$a = bab$$

ist

$$a = ab, \quad a = ba$$

und umgekehrt.

Zu diesem Satz gibt es kein Gegenstück.

Satz 7. *Mit*

$$ab = aba \quad | \quad ab = bab$$

ist

$$ba = bab. \quad | \quad ba = aba.$$

Satz 8. *Mit*

$$aba = bab$$

ist

$$ab = ba$$

und umgekehrt.

Dieser Satz ist zu sich selbst dual.

In bezug auf ein Schief M ist also das kommutative Gesetz mit dem folgenden *Axiom* gleichwertig:

IV. Für zwei beliebige Elemente a, b aus M gilt

$$aba = bab.$$

In bezug auf ein Schief M ist das kommutative Gesetz weiter mit dem folgenden *Doppelaxiom* gleichwertig:

IV′. Sind a, b Elemente aus M derart, daß

(2′) $$a = ba, \quad b = ab$$

gilt, so ist

$$a = b.$$

---

[4]) Dagegen haben, wie die Abbildung zeigt, zwei Elemente mit einem gemeinsamen *oberen* Nachbarn nicht immer einen gemeinsamen *unteren* Nachbarn.

[5]) Näheres über Birkhoffsche Verbände in [Verb. 7], S. 64.

IV″. Sind a, b Elemente aus M derart, daß

(2″) $$a = ab, \quad b = ba$$

gilt, so ist

$$a = b.$$

Beweis. Es genügt nachzuweisen, daß aus der Konjunktion der Axiome IV′ und IV″ das kommutative Gesetz folgt. Es seien a, b zwei beliebige Elemente aus M, wo M ein den genannten Axiomen genügendes Schief ist. Nach II und III ist

$$ab = (aba)\,(ab), \quad aba = (ab)\,(aba),$$

folglich nach IV′

$$ab = aba.$$

Ähnlich ergibt sich nach IV″

$$ab = bab.$$

Nach Satz 8 ist M kommutativ.

3. Der folgende Satz stellt fest, daß die Axiome IV′ und IV″ voneinander *unabhängig* sind; es liegt somit keine nur scheinbare, sondern eine echte Aufspaltung des kommutativen Gesetzes vor.

Satz 9. *Es gibt Schiefs, die weder* IV′ *noch* IV″ *genügen, sodann solche, die zwar* IV′, *aber nicht* IV″ *genügen, und schließlich solche, die* IV″, *aber nicht* IV′ *genügen.*

Beweis. Wir führen den Nachweis dadurch, daß wir geeignete Beispiele konstruieren.

Beispiel 1. Es sei M eine Menge von gewöhnlichen ganzen Zahlen. Es bedeute ab die *rechte* oder *linke* Komponente, je nachdem die rechte Komponente eine *gerade* oder *ungerade* Zahl ist. Man sieht sofort, daß bei dieser Deutung die Axiome I und III in Kraft sind. Aber auch II hat Geltung. Ist nämlich c eine gerade Zahl, so reduziert sich II auf die Identität $c = c$. Ist aber c ungerade, so erhält man $ab = ab$.

Dagegen ist IV′ nicht allgemein in Kraft, denn das Gleichungspaar (2′) wird von *beliebigen geraden* Zahlen a, b erfüllt. Ebenso ist IV″ nicht allgemein in Kraft, denn das Paar (2″) wird von *beliebigen ungeraden* Zahlen a, b erfüllt.

Beispiel 2. Es sei M eine Menge von Zahlen. Es bedeute ab die *linke* Komponente. Dann sind wie soeben die Axiome I, II und III in Kraft. Weiter hat IV′ Geltung, denn das Gleichungspaar (2′) kann nur bestehen, wenn $a = b$ ist. Dagegen hat IV″ nicht allgemein Geltung, da das Paar (2″) von *beliebigen* Zahlen a, b erfüllt wird.

Beispiel 3. Es sei M eine Menge von Zahlen. Es bedeute ab die *rechte* Komponente. Dann sind wieder die Axiome I, II und III in Kraft. Weiter hat IV″ Geltung, dagegen nicht IV′.

Erklärung 3. Ein $\mathfrak{S}(o)$, das überdies dem Axiom IV′ bzw. IV″ genügt, werde als ein $\mathfrak{S}'(o)$ bzw. $\mathfrak{S}''(o)$ bezeichnet.

Für die gestrichelten Schiefs hat der Satz 6 ein Gegenstück, wie wir anschließend zeigen.

Satz 10. *Es sei M ein* $\mathfrak{S}'(o)$. *Mit*

(3′) $$a = aba$$

ist

(4′) $$a = ab$$

und umgekehrt. Entsprechend findet statt: *Es sei M ein* $\mathfrak{S}''(o)$. *Mit*

(3″) $$a = aba$$

ist

(4″) $$a = ba$$

und umgekehrt.

Beweis. Gilt (3′), so ist

$$a = (ab)\,a;$$

ferner ist

$$ab = a\,(ab).$$

Nach IV′ folgt daraus (4′). Gilt umgekehrt (4′), so gilt, sogar in jedem $\mathfrak{S}(o)$, auch (3′). Ähnlich beweist man den zweiten Teil der Behauptung.

Dem folgenden Satz kommt insofern eine gewisse Bedeutung zu, als er in bezug auf die gestrichelten Schiefs das kommutative Gesetz durch äquivalente Aussagen zu ersetzen gestattet.

Satz 11. *Es sei M ein* $\mathfrak{S}'(o)$. *Mit*

(5′) $$ab = bab$$

ist

(6′) $$ab = ba$$

und umgekehrt. Entsprechend findet statt: *Es sei M ein* $\mathfrak{S}''(o)$. *Mit*

(5″) $$ab = aba$$

ist

(6″) $$ab = ba$$

und umgekehrt.

Beweis. Gilt (5′), so gilt nach Satz 7 auch

$$ba = aba.$$

Es ist demnach

$$ab = (ba)\,(ab),\quad ba = (ab)\,(ba).$$

Nach IV′ folgt daraus (6′). Die Umkehrung ist selbstverständlich richtig. Entsprechend beweist man den zweiten Teil des Satzes.

In bezug auf ein $\mathfrak{S}'(o)$ ist also das Axiom IV'' mit der folgenden *Bedingung* gleichwertig: *Für zwei beliebige Elemente a, b aus M gilt*

$$ab = bab.$$

Entsprechend ist in bezug auf ein $\mathfrak{S}''(o)$ das Axiom IV' mit der folgenden *Bedingung* gleichwertig: *Für zwei beliebige Elemente a, b aus M gilt*

$$ab = aba.$$

4. Zum Schluß noch einige Bemerkungen über die *vertauschbaren* und *ausgezeichneten* Elemente eines Schiefs.

Erklärung 4. Ist M ein $\mathfrak{S}(o)$, so mögen zwei Elemente a, b aus M, für die

$$ab = ba$$

ist, *vertauschbar* heißen.

Ersichtlich ist ein Element a aus M mit jedem Element axa vertauschbar, wobei x ein ganz beliebiges Element aus M ist. Natürlich sind a und axa nicht immer voneinander verschieden. Es gibt sowohl Schiefs mit voneinander verschiedenen, vertauschbaren Elementen als auch Schiefs, bei denen niemals zwei verschiedene Elemente miteinander vertauschbar sind. Daß das erste möglich ist, zeigt das in Beispiel 1 betrachtete $\mathfrak{S}(o)$. Dafür ist nämlich, wenn $a \neq b$ ist, a mit b vertauschbar, falls eine der beiden Zahlen gerade und die andere ungerade ist. Daß das zweite möglich ist, zeigen die in den Beispielen 2 und 3 betrachteten Schiefs.

Der folgende Satz ist das Analogon zu einem elementaren Satz aus der Gruppentheorie.

Satz 12. *Sind a, x und y Elemente eines Schiefs M und ist a sowohl mit x als auch mit y vertauschbar, so ist a auch mit xy vertauschbar.*

Beweis. Es ist

$$a(xy) = (ax)y = (xa)y = x(ay) = x(ya) = (xy)a.$$

Infolgedessen bilden alle Elemente aus M, die mit einem festen Element a aus M vertauschbar sind, ein Unterschief von M; und dieses ist niemals leer, da es, wie soeben bemerkt, alle Elemente von der Gestalt axa enthält.

Erklärung 5. Es sei M ein $\mathfrak{S}(o)$. Unter einem *rechtsseitigen ausgezeichneten* Element (R-Element) von M werde ein Element f aus M verstanden derart, daß

$$xf = f$$

für alle Elemente x aus M ist. Entsprechend werde unter einem *linksseitigen ausgezeichneten* Element (L-Element) von M ein Element e aus M verstanden derart, daß

$$ex = e$$

für alle Elemente x aus M ist.

Satz 13. *Besitzt ein Schief M mindestens ein R-Element und mindestens ein L-Element, so gibt es in M überhaupt nur ein einziges ausgezeichnetes Element.*

Beweis. Es ist[+]

$$ef = f, \quad ef = e.$$

Halten wir also e fest, so folgt, daß alle R-Elemente mit e identisch sind; halten wir andererseits f fest, so folgt, daß alle L-Elemente mit f identisch sind.

So sind in Beispiel 1 alle geraden Zahlen aus M und nur diese die R-Elemente von M. Sind mehrere gerade Zahlen vorhanden, so gibt es kein L-Element; ist dagegen genau eine gerade Zahl vorhanden, so ist diese zugleich das L-Element von M. In beiden Fällen ist es gleichgültig, wieviel ungerade Zahlen Elemente von M sind.

In Beispiel 2 ist jede Zahl aus M ein L-Element von M; es gibt kein R-Element, es sei denn, daß M aus einem einzigen Element besteht.

In Beispiel 3 liegen die Verhältnisse umgekehrt. Jede Zahl aus M ist ein R-Element von M; es gibt kein L-Element, es sei denn, daß M aus einem einzigen Element besteht.

Literaturverzeichnis.

(Die früher erschienenen Arbeiten sind in [Verb. 8] und [H. 2] zusammengestellt.)

G. Birkhoff.

[10] Dependent probabilities and spaces, Proc. Nat. Acad. USA. **24** (1938), S. 154—159.

[11] Lattices and their applications, Bull. Amer. Math. Soc. (1938), S. 793—800.

G. Birkhoff und M. Ward.

[12] A characterization of Boolean algebras, Ann. of Math., II. s. **40** (1939), S. 609—610.

C. Carathéodory.

[1] Entwurf für eine Algebraisierung des Integralbegriffs, Sitzungsber. bayer. Akad. Wiss., math.-naturwiss. Abt. 1938, S. 27—69.

[2] Bemerkungen zur Axiomatik der Somentheorie, Sitzungsber. bayer. Akad. Wiss., math.-naturwiss. Abt. 1938, S. 175—183.

[3] Die Homomorphien von Somen und die Multiplikation von Inhaltsfunktionen, Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa 8 (1939), S. 1—26.

E. Foradori.

[2] Zur Theorie des Carathéodoryschen Integrales, Deutsche Math. **4** (1939), S. 578—582.

H. Hermes und G. Köthe.

[1] Theorie der Verbände, Enzykl. d. Math. Wissensch. I 1, 13; 2. Aufl. (1939).

F. Klein-Barmen.

[Verb. 7] Birkhoffsche und harmonische Verbände, Math. Zeitschr. **42** (1936), S. 58—81.

[H. 1] Axiomatische Untersuchungen zur Theorie der Halbverbände und Verbände, Deutsche Math. **4** (1939), S. 32—43.

[H. 2] Theorie der Gewebe, Math. Zeitschr. **45** (1939), S. 107—126.
[H. 3] Zur Theorie der Gefüge und Vereine, Math. Zeitschr. **45** (1939), S. 595 bis 606.

O. Ore.
[9] Some studies on group theory, Congrès des mathématiques à Helsingfors 1938, S. 1—8.
[10] On the application of structure theory to groups, Bull. Amer. Math. Soc. (1938), S. 801—806.
[11] Contributions to the theory of groups of finite order, Duke math. J. **5** (1939), S. 431—460.

E. Steinitz.
[1] Algebraische Theorie der Körper. Berlin und Leipzig 1930.

M. Ward.
[7] The algebra of lattice functions, Duke math. J. **5** (1939), S. 357—371.
[8] A characterization of Dedekind structures, Bull. Amer. Math. Soc. (1939), S. 448—451.

M. Ward und R. P. Dilworth.
[6] The lattice theory of ova, Ann. of Math., II. s. **40** (1939), S. 600—608.

(Eingegangen am 23. November 1939.)

Konvergente und asymptotische Darstellungen für die Lösungen linearer Differentialgleichungen, deren Koeffizienten Dirichletsche Reihen oder Exponentialpolynome mit komplexen Exponenten sind*).

Von

Adam Schmidt in Weimar.

Inhalt.

Seite

Einleitung 482

Vorbemerkung über gewisse Dirichletsche Reihen mit komplexen Exponenten 486

Kapitel I. Konvergente Lösungsreihen für Systeme linearer Differentialgleichungen.

§ 1. Formale Lösung und Konvergenzbeweis 488

§ 2. Abschluß des Beweises 494

Kapitel II. Formale Lösungen linearer homogener Differentialgleichungen n-ter Ordnung, deren Koeffizienten Dirichletsche Reihen mit endlich vielen negativen Exponentenpunkten sind.

§ 1. Eine notwendige Bedingung 498

§ 2. Reduktion der linearen Differentialgleichung auf eine Form, die formale Lösungen zuläßt 499

§ 3. Durchführung der Reduktion 506

§ 4. Anhang zum II. Kapitel, Formale Lösungen 510

Kapitel III. Asymptotische Darstellung einer Lösung der Differentialgleichung n-ter Ordnung.

§ 1. Aufstellung einer Vergleichsdifferentialgleichung 523

§ 2. Asymptotische Darstellung 531

§ 3. Ergänzungen 542

*) Die vorliegende Arbeit wurde von der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Jena als Dissertation (D 27) angenommen, nachdem sie vorher einen Fakultätspreis erhalten hatte. Referent war Herr Prof. Hermann Schmidt. Ich möchte ihm auch hier meinen Dank für die Förderung aussprechen, die er mir durch seine vielfachen persönlichen Anregungen zuteil werden ließ.

Kapitel IV. Die Differentialgleichung $y'' + ya = 0$.

Seite
§ 1. Asymptotische Darstellung einer Lösung 543
§ 2. Die zweite Lösung. Beispiele 555

Einleitung.

Die Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$w^{(n)}(z) + \sum_{p=0}^{n-1} w^{(p)}(z) \cdot a_p(z) = 0 \tag{1}$$

oder eines Systems von linearen Differentialgleichungen

$$w_p'(z) = \sum_{q=1}^{n} a_{pq}(z)\, w_q(z) \qquad (p = 1 \ldots n) \tag{2}$$

sind bekanntlich in der Umgebung einer singulären Stelle der Koeffizienten auch dann nicht notwendig eindeutig, wenn die Koeffizienten dort regulär und eindeutig sind und an der singulären Stelle selbst höchstens einen Pol endlicher Ordnung besitzen.

Legt man die singuläre Stelle in den Punkt $z = 0$ und betrachtet man ein System, so treten bereits für eine Bestimmtheitsstelle Lösungen der folgenden Gestalt auf:

$$w_p = z^{\varrho} P_p(\log z). \tag{3}$$

Dabei ist P_p ein Polynom in $\log z$, dessen Koeffizienten an der Stelle $z = 0$ reguläre Funktionen von z sind; ϱ ist als Nullstelle eines gewissen Polynoms gegeben und daher nicht notwendig reell oder gar Rationalzahl. w_p ist also im allgemeinen logarithmisch verzweigt, und zwar auch dann, wenn P_p vom nullten Grade ist. Entsprechendes gilt für die Lösung von (1) in der Umgebung einer Bestimmtheitsstelle.

Ist $z = 0$ für (1) eine Unbestimmtheitsstelle, so muß bereits für den formalen Ansatz der Lösung zwischen Normalreihen und anormalen Reihen unterschieden werden, wobei die letzteren nach gebrochenen Potenzen von z fortschreiten.

Es liegt daher nahe, von vornherein durch $z = e^s$ die gewundene Umgebung der singulären Stelle $z = 0$ in eine linke Halbebene der s-Ebene abzubilden. Man erhält so Differentialgleichungen

$$\frac{d^n}{ds^n} y(s) + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{d^p}{ds^p} y(s) \cdot b_p(s) = 0 \tag{4}$$

oder Systeme

$$\frac{d}{ds} y_p(s) = \sum_{q=1}^{n} b_{pq}(s)\, y_q(s), \tag{5}$$

wobei die Koeffizienten Dirichletsche Reihen

$$b = \sum_{\nu=N}^{\infty} d_\nu e^{\lambda_\nu s} \tag{6}$$

mit zunächst ganzzahligen Exponenten $\lambda_\nu = \nu$ sind.

Im Falle einer Bestimmtheitsstelle ist dabei $N = 0$, während für eine Unbestimmtheitsstelle N eine beliebige negative ganze Zahl ist. Es ist nun natürlich, die Einschränkung $\lambda_\nu = \nu$ fallenzulassen und zu Dirichletschen Reihen überzugehen, bei denen die λ_ν beliebige reelle Zahlen sind. Wir wollen dabei jedoch voraussetzen, daß die λ_ν monoton wachsen und sich im endlichen nicht häufen.

Behandelt man nun Differentialgleichungen (4) oder (5), deren Koeffizienten durch abbrechende Reihen, also durch Exponentialpolynome gegeben sind, so erscheint es als willkürliche Einschränkung, wenn man nur reelle Exponenten λ_ν zuläßt, und eine Erweiterung auf komplexe Exponenten wird wünschenswert. Sind die Koeffizienten durch unendliche Reihen gegeben, so ist eine derartige Erweiterung weniger naheliegend. Es zeigt sich aber, daß man gelegentlich gewisse Reihen mit komplexen λ_ν ohne Erschwerung zulassen kann. Da bereits in (3) komplexe ϱ auftreten, erzielt man so überdies eine größere Übereinstimmung zwischen Koeffizienten und Lösung, was sogar zu Vereinfachungen führen kann.

Im übrigen können Differentialgleichungen mit komplexen λ_ν sogar in Anwendungen auftreten. [Als Modellvorstellung[1]) benutzt man gelegentlich ein mathematisches Pendel, dessen Aufhängepunkt eine periodische erzwungene Bewegung ausführt. Für das Pendel gilt die Hillsche Differentialgleichung $y''(x) + (a + \Phi(x))\, y = 0$, wobei $\Phi(x)$ periodisch ist. Im einfachsten Falle $\Phi = b \sin x$ erhält man die Mathieusche Differentialgleichung. Läßt man den Aufhängepunkt eine gedämpfte Schwingung an Stelle der ungedämpften Schwingung ausführen, so erhält man die Gleichung $y''(x) + (a + be^{\alpha x} \sin x)\, y(x) = 0$, also eine Differentialgleichung mit komplexen Exponenten, wie wir sie im I. Kapitel behandeln werden.]

Für die von uns verwendeten Reihen mit gewissen komplexen λ_ν gelten einige einfache Übertragungen grundlegender Resultate über Dirichletsche Reihen mit reellen Exponenten, die wir in einer Vorbemerkung zusammengestellt haben, wo wir auch die Beschränkungen angeben, die wir den komplexen λ_ν auflegen. Spezielle Ergebnisse aus der von Hille[2]) und anderen

[1]) Strutt, Lamésche, Mathieusche und verwandte Funktionen in Physik und Technik, Ergebnisse I, 3 (1932), S. 10, 11.

[2]) Hille, Dirichlet series with complex exponents, Ann. of Math. 25 (1923/24), S. 261—278.

begonnenen Theorie der Dirichletschen Reihen mit komplexen Exponenten werden wir nicht benötigen.

Im I. Kapitel handelt es sich nun um eine Übertragung des Satzes von Sauvage[3]) über Bestimmtheitsstellen von Systemen linearer Differentialgleichungen auf die Systeme (5). Sind dabei in den Reihen (6) die λ_ν reell, so entspricht einer Bestimmtheitsstelle der Gleichung (2) der Fall, daß die λ_ν nicht negativ sind. In diesem Kapitel können wir auch komplexe λ_ν zulassen, wobei wir im wesentlichen voraussetzen müssen, daß $\Re(\lambda_\nu)$ außer für $\lambda_0 = 0$ positiv ist. Unser Beweisverfahren gelangt unter Benutzung der Matrizenrechnung zu einer Abschätzung der Koeffizienten der Lösungsreihe. Weiter benötigen wir eine gewisse Ergänzung durch eine algebraische Reduktion. Diese Reduktion stammt für Potenzreihen von Rasch[4]), ist aber für Dirichletsche Reihen etwas umständlicher. S. Borofsky[5]) hat nach der Methode von Frobenius lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung behandelt, deren Koeffizienten Dirichletsche Reihen mit reellen Exponenten sind. Der von uns gegebene Beweis gestattet aber in dreifacher Hinsicht eine Erweiterung. Einmal verwenden wir Systeme von linearen Differentialgleichungen, dann lassen wir gewisse komplexe Exponenten zu und endlich können wir auch genauere Angaben über das Konvergenzgebiet der Lösungen machen.

Das II. und III. Kapitel beschäftigt sich mit linearen Differentialgleichungen (4), wobei in den Reihen (6) die λ_ν reell sein mögen und wobei endlich viele negative λ_ν auftreten sollen. Dabei suchen wir asymptotische Darstellungen für die Lösungen. Es handelt sich also um eine Parallele zur asymptotischen Darstellung durch Potenzreihen für die Lösungen von (1) in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle[6]) [7]).

Kapitel II gibt zunächst die Aufstellung der formalen Lösungen. Den Betrachtungen liegt dabei die etwas allgemeinere Gleichung

$$(7) \qquad \sum_{p=0}^{n} b_p y^{(p)}(s) = 0$$

[3]) Vgl. A. Schmidt, Neuer Beweis eines Hauptsatzes über lineare Differentialgleichungssysteme, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **179** (1938), S. 1—4. — Der Satz stammt von L. Sauvage, Théorie générale des systèmes d'équations différentielles, Annales de l'Ecole Normale (3) **3** (1886), S. 389.

[4]) G. Rasch, Zur Theorie und Anwendung des Produktintegrals, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **171** (1934), S. 65—119, insbes. S. 116.

[5]) S. Borofsky, Linear homogeneous differential equations with Dirichlet series as coefficients, Ann. of Math. **32** (1931), S. 811—829.

[6]) Vgl. J. Horn, Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung (1905), S. 183—205.

[7]) Vgl. z. B. W. Sternberg, Über die asymptotische Integration von Differentialgleichungen, Math. Annalen **81** (1920), S. 119—186. W. J. Trjitzinsky, Analytic theory of linear differential equations, Acta Math. **62** (1934), S. 167—226.

zugrunde, wobei die b Dirichletsche Reihen mit reellen λ_ν sind. Gleichung (7) hat im allgemeinen keine formale Dirichlet-Reihe zur Lösung. Es wird daher in Kapitel II, § 1 bis 3 gezeigt, daß man Gleichung (7) auf eine formal lösbare Form reduzieren kann. Es zeigt sich dabei, daß für uns der Begriff des Ranges ebenso wie die Unterscheidung von Normalreihen und anormalen Reihen bedeutungslos wird. Entscheidend wird dagegen das Newton-Puiseux-Diagramm [8, 9]) der Gleichung (7). Erschwerend kommt hinzu, daß nachgewiesen werden muß, daß die Reduktion auch mit endlich vielen Schritten ausführbar ist. In einem Anhang zum II. Kapitel geben wir die Berechnung der formalen Lösungen zu (7), wobei also (7) als auf eine formal lösbare Form reduziert angenommen wird. Wir lassen dabei für den Anhang wieder komplexe Exponenten zu und erreichen dadurch eine geschlossenere Form der Lösungen.

Das III. Kapitel gibt nun die asymptotische Darstellung für eine Lösung der Gleichung (4) längs der reellen Achse unter sehr allgemeinen Voraussetzungen (vgl. Kapitel III, § 3). Die Exponenten sind wieder reell. Das Beweisverfahren scheint im klassischen Falle bisher nur für Differentialgleichungen zweiter Ordnung verwendet worden zu sein [10]). Die Ausdehnung auf $n > 2$ stützt sich wieder auf das Newton-Diagramm. Doch ist es uns nicht gelungen, den Nachweis zu erbringen, daß sämtliche in Kapitel II aufgestellten Lösungen asymptotisch sind. Dazu wäre eine übersichtlichere Darstellung der formalen Lösungen wünschenswert.

Kapitel IV ist der Differentialgleichung

$$y'' + y\,a(s) = 0 \tag{8}$$

gewidmet. Wieder handelt es sich um das Analogon einer Unbestimmtheitsstelle. Die einfachere Gleichung gestattet nun ein einigermaßen abgeschlossenes Resultat, nämlich die asymptotische Darstellung eines Hauptsystems in einem Halbstreifen zu geben. Wesentlich ist dabei die Beschränkung auf $n = 2$, während das Fehlen des zweithöchsten Gliedes von geringerem Einfluß ist. Die Grundgedanken des Beweises sind dieselben wie in Kapitel III, doch ist das in mancher Hinsicht einfachere IV. Kapitel unabhängig lesbar.

---

[8]) Vgl. E. L. Ince, Ordinary differential equations (1927), S. 427.

[9]) Vgl. Ostrowski, Über algebraische Funktionen von Dirichletschen Reihen, Math. Zeitschr. **37** (1933), S. 98—133. Die Benutzung des Newton-Diagramms und der Ω-Bewertung finden in der Arbeit Ostrowskis ihr Vorbild. Unsere Reduktion G. in Kap. II, § 2 kann ebenfalls mit der Beseitigung des zweithöchsten Gliedes bei Ostrowski verglichen werden. Vgl. hierzu insbesondere S. 117, Zeile 3ff. Da eine völlige Beseitigung undurchführbar erscheint, müssen wir uns mit einer Beseitigung der störenden Anfangsglieder begnügen.

[10]) Vgl. Ince (siehe Anm. 8), S. 169 oder auch L. Bieberbach, Differentialgleichungen, 3. Aufl. (1930), S. 238—245.

Wir können hier wieder Dirichletsche Reihen mit komplexen Exponenten verwenden.

Vorbemerkung über gewisse Dirichletsche Reihen mit komplexen Exponenten.

Wir verwenden im folgenden gelegentlich Dirichletsche Reihen mit komplexen Exponenten λ_ν der folgenden Gestalt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu e^{\lambda_\nu s}, \tag{1}$$

$$a_0 \neq 0;\ \lambda_0 \text{ reell};\ \Re(\lambda_\nu) > \lambda_0 \text{ für } \nu > 0;\ \Re(\lambda_\nu) \geqq \Re(\lambda_{\nu-1}).$$

Weiter mögen die Zahlen $\Re(\lambda_\nu)$ keinen endlichen Häufungswert besitzen, so daß auch nur endlich viele λ_ν den gleichen Realteil besitzen können. Für diese Reihen gelten die folgenden einfachen Übertragungen grundlegender Resultate über Dirichletsche Reihen mit reellen Exponenten.

Es sei

$$f(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu e^{\lambda_\nu s} \quad \text{mit} \quad \lambda_\nu = \lambda_{1\nu} + i\lambda_{2\nu}; \quad \lambda_0 = 0. \tag{2}$$

Weiter mögen die unter (1) angegebenen Voraussetzungen erfüllt sein. Die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu e^{\lambda_\nu s}| = S(s)$$

sei gleichmäßig konvergent für $s = \sigma_0 + it$; $|t| \leqq T$. Es konvergiert dann gleichmäßig die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu e^{\lambda_\nu s}|$$

für

$$s = \sigma + it; \quad \sigma \leqq \sigma_0; \quad |t| \leqq T.$$

In diesem Halbstreifen konvergiert daher (2) absolut und gleichmäßig.

Beweis. Es sei $s_1 = \sigma_1 + it_1$; $\sigma_1 \leqq \sigma_0$; $|t_1| \leqq T$, dann ist, falls $\Re(\lambda_\nu) > 0$:

$$|a_\nu e^{\lambda_\nu s_1}| \leqq |a_\nu| e^{\lambda_{1\nu}\sigma_0 - \lambda_{2\nu} t_1}.$$

$S(\sigma_0 + it_1)$ ist also Majorante für $S(\sigma_1 + it_1)$.

Als zweites beweisen wir, daß $f(s)$ durch die Reihe (2) *im Halbstreifen* $s = \sigma + it$; $\sigma \leqq \sigma_0$; $|t| \leqq T$ *asymptotisch dargestellt wird; dabei definieren wir:* $f(s) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu e^{\lambda_\nu s}$ *heißt, daß für jedes* N, *für das* $\lambda_{1\,N+1} > \lambda_{1N}$ *gilt,* $f(s) = \sum_{\nu=0}^{N} a_\nu e^{\lambda_\nu s} + o(e^{\lambda_N s})$ *gleichmäßig hinsichtlich* t *für* $\sigma \to -\infty$. Wir be-

handeln also asymptotische Reihen $\sum_{\mu} A_\mu(s) e^{\alpha_\mu s}$, wobei $A_\mu(s) = \sum_{\nu=N_{1\mu}}^{N_{2\mu}} a_\nu e^{i\lambda_{2\nu} s}$, falls $\lambda_{1\nu} = \alpha_\mu$ für $\nu = N_{1\mu}, N_{1\mu}+1, \ldots N_{2\mu}$[11]).

Beweis. Es ist

$$|R_N| = |f(s) - \sum_0^N a_\nu e^{\lambda_\nu s}| = |\sum_{N+1}^{\infty} a_\nu e^{\lambda_\nu s}|$$

$$= |e^{\lambda_{N+1}(\sigma-\sigma_0)} \cdot \sum_{N+1}^{\infty} e^{\lambda_\nu(\sigma_0+it)} a_\nu \cdot e^{(\lambda_\nu - \lambda_{N+1})(\sigma-\sigma_0)}|$$

$$\leqq |e^{\lambda_{N+1}(\sigma-\sigma_0)}| \cdot \sum_{N+1}^{\infty} |e^{\lambda_\nu(\sigma_0+it)} a_\nu| e^{(\lambda_{1\nu}-\lambda_{1N+1})(\sigma-\sigma_0)}.$$

$\sum_{N+1}^{\infty} e^{\lambda_\nu(\sigma_0+it)} a_\nu$ ist nach Voraussetzung gleichmäßig konvergent und daher beschränkt. Weiter ist

$$e^{(\lambda_{1\nu}-\lambda_{1N})(\sigma-\sigma_0)} \leqq 1 \quad \text{für} \quad \nu > N.$$

Daher ist

$$|R_N| \leqq e^{\lambda_{1N+1}(\sigma-\sigma_0)} K_1.$$

Nun ist $e^{\lambda_{2N} t} \leqq K_2$. Es folgt

$$|R_N| \leqq e^{\lambda_{1N}\sigma - \lambda_{2N} t} \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot e^{-\lambda_{1N+1}\sigma_0} \cdot e^{(\lambda_{1N+1}-\lambda_{1N})\sigma}.$$

Daher

$$|R_N| \leqq |e^{\lambda_N s}| K_3 \cdot e^{(\lambda_{1N+1}-\lambda_{1N})\sigma}.$$

Daher ist für jedes N, sofern $\lambda_{1N+1} > \lambda_{1N}$:

$$R_N = o(e^{\lambda_N s}),$$

oder wie behauptet:

$$f(s) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu e^{\lambda_\nu s}.$$

Im übrigen schreiben wir statt

$$\frac{\psi(s)}{\varphi(s)} \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu e^{\lambda_\nu s}$$

auch

$$\psi(s) \sim \varphi(s) \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu e^{\lambda_\nu s}.$$

Wir bemerken noch, daß die Summe zweier Reihen vom Typus (2) wieder den Voraussetzungen zu (2) über die λ_ν genügt.

An die Exponenten λ_ν werden wir gelegentlich die Forderung stellen, daß in der Menge $\{\lambda_\nu\}$ mit $\lambda_{\nu'}$ und $\lambda_{\nu''}$ auch $\lambda_{\nu'} + \lambda_{\nu''} = \lambda_{\nu'''}$ enthalten ist. Eine abbrechende oder unendliche Reihe (2) kann aber leicht durch Glieder, deren Koeffizient $a_\nu = 0$ ist, so ergänzt werden, daß diese Forderung erfüllt ist.

[11]) Vgl. H. Schmidt, Beiträge zu einer Theorie der allgemeinen asymptotischen Darstellungen, Math. Annalen 113 (1937), S. 629–656, insbes. S. 635 oben, Zeile 3, die Bemerkung über fastperiodische Funktionen.

Im Kapitel II, Anhang, brauchen wir noch folgende Bemerkung über formale Dirichletsche Reihen mit komplexen Exponenten: Sind $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu e^{\lambda_\nu s}$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu e^{\lambda_\nu s}$ Reihen vom Typus (2), wobei wir jedoch auch $b_0 = 0$ zulassen, und wobei unter den λ_ν mit $\lambda_{\nu'}$ und $\lambda_{\nu''}$ auch $\lambda_{\nu'} + \lambda_{\nu''} = \lambda_{\nu'''}$ enthalten sei, so lassen sich eindeutig Zahlen $c_0, c_1, c_2, \ldots$ angeben, so daß *formal* gilt:

$$\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu e^{\lambda_\nu s}\right) \cdot \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu e^{\lambda_\nu s}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu e^{\lambda_\nu s}. \tag{3}$$

Formale Ausführung der Multiplikation ergibt nämlich

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} e^{\lambda_\nu s} \cdot \sum_{\lambda_{\nu'} + \lambda_{\nu''} = \lambda_\nu} a_{\nu'} c_{\nu''} = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu e^{\lambda_\nu s}.$$

Dabei ist in $\sum_{\lambda_{\nu'} + \lambda_{\nu''} = \lambda_\nu} a_{\nu'} c_{\nu''}$ über die $(\nu'\, \nu'')$ zu summieren für die $\lambda_{\nu'} + \lambda_{\nu''} = \lambda_\nu$. Eine derartige formale Gleichung soll aber bedeuten, daß für alle ν gilt

$$\sum_{\lambda_{\nu'} + \lambda_{\nu''} = \lambda_\nu} a_{\nu'} c_{\nu''} = b_\nu$$

oder

$$a_0 c_\nu = b_\nu - \sum_{\lambda_{\nu'} + \lambda_{\nu''} = \lambda_\nu}^{*} a_{\nu'} c_{\nu''},$$

wobei der * an dem Summenzeichen andeutet, daß das Glied $a_0 c_\nu$ bei der Summation nicht mit berücksichtigt wird. Auf der rechten Seite stehen wegen $\Re(\lambda_\nu) \geqq \Re(\lambda_{\nu-1})$ und wegen $\Re(\lambda_\nu) > 0$ für $\nu > 0$ nur solche $c_{\nu''}$ für die $\nu'' < \nu$. Die c_ν sind daher eindeutig bestimmt.

Kapitel I.

Konvergente Lösungsreihen für Systeme linearer Differentialgleichungen.

§ 1.

Formale Lösung und Konvergenzbeweis.

Ein System homogener linearer Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{d}{ds} y_k = \sum_{i=1}^{n} y_i a_{ik} \qquad (k = 1 \ldots n) \tag{1}$$

läßt sich als Matrixdifferentialgleichung

$$\frac{d}{ds} Y = Y A \tag{2}$$

schreiben, sofern $A = (a_{ik})$ und $Y = (y_{ik})$ gesetzt wird, wobei

$$y_{i1} \cdots y_{in} \qquad (i = 1 \ldots n)$$

n linear unabhängige Lösungen des Systems (1) darstellen. Ein Hauptsystem von Lösungen der Gleichung (1) wird dann durch eine Lösungsmatrix gegeben, für die die Determinante $\Delta(Y) \neq 0$.

In (2) sei nun

$$A = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu e^{\lambda_\nu s}; \quad A_\nu = (a_{ik}^\nu); \quad a_{ik}^\nu \text{ beliebig komplex.} \tag{3}$$

Die Reihe der absoluten Beträge $\sum_{\nu=0}^{\infty} \operatorname{Max}_{i,k} |a_{ik}^\nu| \, |e^{\lambda_\nu s}|$ sei gleichmäßig konvergent in einem Gebiet $\mathfrak{G}$. Die λ_ν seien komplexe Zahlen und es sei

a) $\lambda_0 = 0 < \Re(\lambda_1) \leqq \Re(\lambda_2) \leqq \Re(\lambda_3) \ldots$.

b) Die Folge der Zahlen $\{\Re(\lambda_\nu)\}$ habe keinen Häufungswert im Endlichen. Insbesondere sollen also nur endlich viele λ_ν den gleichen Realteil haben.

Es gilt dann der Satz:

Die Gleichung $\frac{d}{ds} Y = YA$ *hat unter den angegebenen Voraussetzungen eine Lösung* $Y = e^{A^* s} \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu e^{\lambda_\nu^* s}$. *Dabei ist* A^* *eine konstante Matrix. Die Zahlen* λ_ν^* *genügen entsprechenden Bedingungen* a, b *wie die* λ_ν. *Die Reihe* $\sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu e^{\lambda_\nu^* s}$ *ist gleichmäßig konvergent in* $\mathfrak{G}$. *Schließlich ist*

$$\Delta(Y) \neq 0.$$

Für den Beweis bilden wir vorbereitend die Menge aller Summen $\sum_{\nu=1}^{N} \mu_\nu \lambda_\nu$; $N = 1, 2, 3, \ldots$, wobei $\mu_\nu \geqq 0$ und ganz ist, und $\sum_{1}^{N} \mu_\nu \neq 0$. Die Menge der Zahlen, die einer oder mehreren Summen $\sum_{1}^{N} \mu_\nu \lambda_\nu$ gleich sind, bezeichnen wir mit $\{\Lambda_\nu\}$.

Wir beweisen unseren Satz zunächst unter einer einschränkenden Voraussetzung:

Sind $r_1, \ldots, r_n$ die Wurzeln der Gleichung

$$\Delta(A_0 - rE) = 0, \tag{4}$$

wobei jede so oft aufzuführen ist, wie ihre Vielfachheit angibt, so sei

$$\Delta(A_0 - (r_i + \Lambda_\nu) E) \neq 0 \tag{5}$$

für alle i und ν, d. h. also: keine Wurzeldifferenz von (4) soll sich als Linearkombination gewisser λ_ν mit positiven ganzen Koeffizienten darstellen lassen.

Nun setzen wir [12])

$$Y = e^{A_0^* s} X. \tag{6}$$

Dabei bedeutet A_0^* die aus der Elementarteilertheorie bekannte Normalform der Matrix A_0.

---

[12]) Für Definition und Eigenschaften von e^{As} vgl. z. B. Rasch[4]), S. 71—74.

Es ist

$$A_0^* = \begin{pmatrix} \mathsf{A}_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \mathsf{A}_q \end{pmatrix},$$

wobei

$$\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & r_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & r_{p_1} \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} r_{p_1+1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & r_{p_1+2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & r_{p_1+p_2} \end{pmatrix}$$

usw.

Mindestens in jeder Teilmatrix sind dabei die r_i einander gleich, und es gibt eine konstante Matrix S mit $\Delta(S) \neq 0$ für die

$$S A_0 S^{-1} = A_0^*. \tag{7}$$

Die Matrix A_0^* ist bis auf die Reihenfolge der Teilmatrizen A_j eindeutig bestimmt. A_0^* kann geschrieben werden:

$$A_0^* = (\delta_k^i \cdot r_k + \delta_k^{i-1}\, \delta_i^*).$$

Dabei ist $\delta_k^i = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}$ und δ_i^* nach Bedarf 0 oder 1.

Weiter ist

$$e^{A_0^* s} = \begin{pmatrix} e^{\mathsf{A}_1 s} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & e^{\mathsf{A}_q s} \end{pmatrix} \text{ mit } e^{\mathsf{A}_1 s} = e^{r_1 s} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ s & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{s^{p_1-1}}{(p_1-1)!} & \frac{s^{p_1-2}}{(p_1-2)!} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

usw., so daß $e^{A_0^* s}$ die Differentialgleichung

$$\frac{d}{ds} Y = Y A_0^*$$

erfüllt.

Die Transformation (6) ergibt die Gleichung

$$\frac{d}{ds} X = -A_0^* X + X \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu e^{\lambda_\nu s}. \tag{8}$$

Wir setzen formal

$$X = \sum_{(\mu_1 \dots \mu_N)} C_{\mu_1 \dots \mu_N} e^{\left(\sum_{\nu=1}^{N} \mu_\nu \lambda_\nu\right) s}, \tag{9}$$

wobei über alle N-tupel $(\mu_1 \dots \mu_N)$; $N = 1, 2, \dots$ und über (0) zu summieren ist. Dabei werden hier und im folgenden N-tupel der Form $(\mu_1 \dots \mu_{N_1} 0\, 0 \dots 0)$, wobei $\mu_{N_1} \neq 0$, als nicht von $(\mu_1 \dots \mu_{N_1})$ verschieden betrachtet und bei der Summation nicht berücksichtigt. Wir fordern, daß (8) formal erfüllt wird. D. h. setzt man (9) in (8), indem man formal differenziert und multipliziert,

so sollen die Koeffizienten der zu gleichen N-tupeln $(\mu_1 \dots \mu_N)$ gehörenden Glieder $e^{(\sum \mu_\nu \lambda_\nu)s}$ die nämlichen sein. Es folgt dann

$$C_0 A_0 = A_0^* C_0.$$

Es kann daher $C_0 = S$ gesetzt werden. Weiter folgt

$$(10) \quad C_{\mu_1 \dots \mu_N} \Big(\sum_{\nu=1}^{N} \mu_\nu \lambda_\nu \Big) + A_0^* C_{\mu_1 \dots \mu_N} - C_{\mu_1 \dots \mu_N} A_0 = \sum_\nu C_{\mu_1 \dots \mu_\nu - 1 \dots \mu_N} A_\nu.$$

Dabei ist über diejenigen ν zu summieren, für die $\mu_\nu \neq 0$ ist. $\mu_N - 1 = 0$ ist dabei zugelassen. (10) stellt eine Rekursionsformel für die $C_{\mu_1 \dots \mu_N}$ dar. Für die einzelnen Elemente der Matrix

$$C_{\mu_1 \dots \mu_N} = (c_{i\,k}^{\mu_1 \cdots \mu_N})$$

folgt aus (10), falls $A_\nu = (a_{i\,k}^\nu)$;

$$c_{i\,k}^{\mu_1 \cdots \mu_N} \cdot \sum_\nu \mu_\nu \lambda_\nu - \sum_{j=1}^{n} c_{i\,j}^{\mu_1 \cdots \mu_N} a_{j\,k}^0 + \sum_{j=1}^{n} \delta_i^{j-1} \delta_i^* \, c_{j\,k}^{\mu_1 \cdots \mu_N} + \sum_{j=1}^{n} \delta_j^i r_j \, c_{j\,k}^{\mu_1 \cdots \mu_N} = \sum_\nu \sum_{j=1}^{n} c_{i\,j}^{\mu_1 \cdots \mu_\nu - 1 \cdots \mu_N} a_{j\,k}^\nu$$

oder

$$\sum_{j=1}^{n} c_{i\,j}^{\mu_1 \cdots \mu_N} (a_{j\,k}^0 - \delta_k^j r_i - \delta_k^j \sum_\nu \mu_\nu \lambda_\nu) = \delta_i^* \, c_{i-1\,k}^{\mu_1 \cdots \mu_N} - \sum_\nu \sum_{j=1}^{n} c_{i\,j}^{\mu_1 \cdots \mu_\nu - 1 \cdots \mu_N} a_{j\,k}^\nu.$$

Setzt man

$$(f_{i\,k}(r)) = F(r) = (A - r)^{-1},$$

so wird $F(r)$ nach (5) für alle $r = r_i + \sum_{\nu=1}^{N} \mu_\nu \lambda_\nu$ existieren, und es wird

$$(11) \quad c_{i\,l}^{\mu_1 \cdots \mu_N} = \sum_{k=1}^{n} \delta_i^* \, c_{i-1\,k}^{\mu_1 \cdots \mu_N} f_{k\,l} \Big(r_i + \sum_1^N \mu_\nu \lambda_\nu \Big) - \sum_{\nu'} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{i\,j}^{\mu_1 \cdots \mu_{\nu'} - 1 \cdots \mu_N} a_{j\,k}^{\nu'} f_{k\,l} \Big(r_i + \sum_1^N \mu_\nu \lambda_\nu \Big).$$

Die Matrix $C_{\mu_1 \dots \mu_N}$ kann also zeilenweise berechnet werden, sobald alle

$$C_{\mu_1 \dots \mu_{\nu'} - 1 \dots \mu_n}$$

bekannt sind; es ist aber

$$\Re(\mu_1 \lambda_1 + \dots + (\mu_{\nu'} - 1) \lambda_{\nu'} + \dots \mu_N \lambda_N) < \Re\Big(\sum_{\nu=1}^{N} \mu_\nu \lambda_\nu \Big).$$

Daher können die $C_{\mu_1 \dots \mu_N}$ bestimmt werden, wenn man der Reihe nach diejenigen berechnet, für die

$$\sum_\nu \mu_\nu \lambda_\nu = \Lambda_1; \Lambda_2; \dots,$$

wobei die Λ_ν so anzuordnen sind, daß

(12) $$\Re(\Lambda_\nu) \leqq \Re(\Lambda_{\nu+1}).$$

Es kann nun der Konvergenzbeweis für die Reihe (9) *erbracht werden.* Es gibt eine Zahl P, so daß für $\Re(\sum \mu_\nu \lambda_\nu) \geqq \mathsf{P}$ sowohl für alle i, j, k

$$|f_{jk}(r_i + \sum_\nu \mu_\nu \lambda_\nu)| = \left| \frac{\delta_k^j (\Sigma \mu_\nu \lambda_\nu)^{n-1} + q_{ijk}^1 \cdot (\Sigma \mu_\nu \lambda_\nu)^{n-2} + \dots}{(\Sigma \mu_\nu \lambda_\nu)^n + q_i^1 \cdot (\Sigma \mu_\nu \lambda_\nu)^{n-1} + \dots} \right|$$

$$\leqq \frac{2}{|\Sigma \mu_\nu \lambda_\nu|} \leqq \frac{2}{\Sigma \mu_\nu \cdot \Re(\lambda_1)}$$

als auch

$$\left| \frac{n \cdot 2}{\Sigma \mu_\nu \lambda_\nu} \right| \leqq \frac{n \cdot 2}{\Re(\Sigma \mu_\nu \lambda_\nu)} \leqq 1.$$

Ist $\gamma \geqq \frac{n^3 \cdot 2}{\Re(\lambda_1)}$, so läßt sich durch Wahl von Γ erreichen, daß für alle N-tupel $(\bar\mu_1 \dots \bar\mu_N)$ für die $\Re(\sum \bar\mu_\nu \lambda_\nu) \leqq \mathsf{P}$ und für alle j, k gilt

$$|c_{jk}^{\bar\mu_1 \cdots \bar\mu_n}| \leqq \Gamma \cdot \frac{j}{n} \frac{\alpha_1^{\bar\mu_1} \cdots \alpha_N^{\bar\mu_N}}{\bar\mu_1! \cdots \bar\mu_N!} \cdot \gamma^{\sum_1^N \bar\mu_\nu}, \text{ sofern } \alpha_\nu = \max_{i,k} |a_{ik}^\nu|.$$

Mit Hilfe vollständiger Induktion soll gezeigt werden, daß diese Abschätzung auch für alle anderen $c_{jk}^{\mu_1 \cdots \mu_N}$ gilt. Wir nehmen an, es sei gezeigt, daß (13) gilt:

a) für alle N-tupel $(\bar\mu_1 \dots \bar\mu_N)$ für die

$$\Re(\Sigma \bar\mu_\nu \lambda_\nu) < \Re(\Sigma \mu_\nu \lambda_\nu)$$

und für alle j, k;

b) für $\mu_1 \dots \mu_N$ und $j < i$ und $k = 1 \dots n$, falls $i > 1$.

Dann folgt für $j = i$ und $l = 1 \dots n$ nach (11):

$$\left| c_{il}^{\mu_1 \cdots \mu_N} \right| \leqq \left| \sum_j c_{i-1\,j}^{\mu_1 \cdots \mu_N} \delta_i^* f_{jl}(r_i + \Sigma \mu_\nu \lambda_\nu) \right|$$

$$+ \left| \sum_{\nu'=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^{\mu_1 \cdots \mu_{\nu'}-1 \cdots \mu_N} a_{jk}^{\nu'} f_{kl}(r_i + \Sigma \mu_\nu \lambda_\nu) \right|$$

$$\leqq \Gamma \frac{n \cdot \alpha_1^{\mu_1} \cdots \alpha_N^{\mu_N} \cdot (i-1)}{\mu_1! \cdots \mu_N! \cdot n} \cdot \gamma^{\sum_1^N \mu_\nu} \frac{2}{\Sigma \mu_\nu \Re(\lambda_\nu)}$$

$$+ \Gamma \frac{n^3 \alpha_1^{\mu_1} \cdots \alpha_N^{\mu_N}}{n \mu_1! \cdots \mu_N!} \left(\sum_{\nu'} \mu_{\nu'} \right) \frac{\gamma^{\sum_\nu \mu_\nu} \cdot 2}{\gamma \cdot \sum_\nu \mu_\nu \{\Re(\lambda_1)\}}$$

$$\leqq \Gamma \frac{i-1}{n} \cdot \frac{\alpha_1^{\mu_1} \cdots \alpha_N^{\mu_N}}{\mu_1! \cdots \mu_N!} \gamma^{\Sigma \mu_\nu} + \Gamma \frac{1}{n} \cdot \frac{\alpha_1^{\mu_1} \cdots \alpha_N^{\mu_N}}{\mu_1! \cdots \mu_N!} \gamma^{\Sigma \mu_\nu}$$

$$\leqq \Gamma \frac{i}{n} \frac{\alpha_1^{\mu_1} \cdots \alpha_N^{\mu_N}}{\mu_1! \cdots \mu_N!} \gamma^{\Sigma \mu_\nu}.$$

Damit ist (13) für alle $c_{il}^{\mu_1 \cdots \mu_N}$ bewiesen!

Nun konvergiert gleichmäßig in $\mathfrak{G}$:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu |e^{\lambda_\nu s}|$$

nach Voraussetzung. Daher konvergiert auch gleichmäßig in $\mathfrak{G}$:

$$(14) \qquad \frac{(\Sigma \alpha_\nu |e^{\lambda_\nu s}|)^m}{m!} = \sum_{\substack{(\mu_1 \dots \mu_N) \\ \Sigma \mu_\nu = m;\ \mu_N \neq 0}} \frac{\alpha_1^{\mu_1} \dots \alpha_N^{\mu_N}}{\mu_1! \dots \mu_N!} e^{\sum_{\nu=1}^{N} \Re(\lambda_\nu \mu_\nu s)},$$

wobei rechts über alle N-tupel zu summieren ist, für die $\Sigma \mu_\nu = m$ und $\mu_N \neq 0$ (vgl. Reihe (9)); dies zeigt man wie folgt: Falls $\sum_{\nu=1}^{\infty} \Pi_\nu$ absolut konvergiert, so ist

$$\Big(\sum_{\nu=1}^{\infty} \Pi_\nu\Big)^m = \sum_{\substack{(\mu_1 \dots \mu_N) \\ \Sigma \mu_\nu = m;\ \mu_N \neq 0}} \gamma_{1 \dots N}^{(\mu_1 \dots \mu_N)} \cdot \Pi_1^{\mu_1} \dots \Pi_N^{\mu_N},$$

und die Reihe rechts konvergiert absolut. Für die Berechnung der γ kann man bei festem N alle Π_ν mit $\nu > N$ gleich Null setzen; daraus folgt nach dem polynomischen Satze:

$$\gamma_{1 \dots \gamma_N}^{(\mu_1 \dots \mu_N)} = \frac{m!}{\mu_1! \dots \mu_N!}.$$

Nach (14) konvergiert gleichmäßig in $\mathfrak{G}$ (vgl. wieder (9)):

$$\Gamma \cdot e^{\gamma \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu |e^{\lambda_\nu s}|} = \Gamma \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\gamma \cdot \Sigma \alpha_\nu e^{\Re(\lambda_\nu s)})^m}{m!}$$

$$= \Gamma \cdot \sum_{(\mu_1 \dots \mu_N)} \frac{\alpha_1^{\mu_1} \dots \alpha_N^{\mu_N} \cdot \gamma^{\sum_1^N \mu_\nu} \cdot |e^{\sum_1^N \mu_\nu \lambda_\nu}|}{\mu_1! \dots \mu_N!}.$$

Nach (13) stellt diese Reihe eine *Majorante* für unsere Lösung dar. Die Reihe der Beträge

$$\sum_{(\mu_1 \dots \mu_N)} |c_{ik}^{\mu_1 \dots \mu_N} e^{\Sigma \mu_\nu \lambda_\nu s}| \qquad (i, k = 1 \dots n)$$

konvergiert daher gleichmäßig in $\mathfrak{G}$. Nach dem Weierstraßschen Doppelreihensatz konvergiert also auch

$$\sum_{(\mu_1 \dots \mu_N)} C_{\mu_1 \dots \mu_N} (\Sigma \mu_\nu \lambda_\nu) e^{\Sigma \mu_\nu \lambda_\nu s}.$$

X kann also gliedweise differenziert werden und erfüllt die Differentialgleichung (8).

Man kann schreiben $X = \sum C'_\nu e^{\Lambda_\nu s}$ mit $0 < \Re(\Lambda_1) \leqq \Re(\Lambda_2) \leqq \ldots$. Nach der Vorbemerkung enthält $\mathfrak{G}$ eine Halbgerade $s = \sigma + it_0$; $\sigma < \sigma_1$. Es wird also $X \to C_0$ für $s = \sigma + it_0$; $\sigma \to -\infty$. Also wird

$$\Delta(X) = \Delta(c^0_{ik} + o(1)) = \Delta(C_0) + o(1).$$

Es gibt also eine Zahl σ_0 so, daß für $\sigma \leqq \sigma_0$; $s = \sigma + it_0$

$$\Delta(X) \neq 0. \tag{15}$$

Daher ist $\Delta(Y(\sigma_0 + it_0)) = \Delta(e^{A_0^*(\sigma_0 + it_0)})\,\Delta(X(\sigma_0 + it_0)) \neq 0$. Daraus folgt aber auch die letzte Behauptung.

§ 2.

Abschluß des Beweises.

Wir behandeln nun den Fall, daß die einschränkende Voraussetzung (5) *nicht erfüllt ist.*

Es gibt also mindestens ein i und ein ν, so daß

$$\Delta(A_0 - (r_i + \Lambda_\nu)) = 0.$$

Die Gleichung $\Delta(A_0 - r) = 0$ heißt charakteristische Gleichung der Differentialgleichung (2). Wir schreiben (2) in der Form

$$\frac{d}{ds} Y = Y\left(A_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \bar{A}_\nu e^{\Lambda_\nu s}\right)$$

und setzen $Y = Y_1 S$, wobei S eine konstante Matrix nach (7) ist. Es folgt

$$\frac{d}{ds} Y_1 = Y_1\left(A_0^* + \sum_{\nu=1}^{\infty} \bar{\bar{A}}_\nu e^{\Lambda_\nu s}\right) \tag{16}$$

mit

$$\bar{\bar{A}}_\nu = S \bar{A}_\nu S^{-1}.$$

Wir nehmen zunächst an, daß entweder alle Λ_ν oder alle r_i reell sind.

S kann nun so bestimmt werden, daß in

$$A_0^* = \begin{pmatrix} A_{11}^* & 0 \\ 0 & A_{22}^* \end{pmatrix}$$

die Teilmatrix

$$A_{11}^* = \begin{pmatrix} \mathsf{A}_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \mathsf{A}_{q'} \end{pmatrix}$$

diejenigen $\mathsf{A}_1 \ldots \mathsf{A}_{q'}$ enthält, die zu einer Nullstelle r_0 gehören, für die es ein ν gibt, daß

$$\Delta(A_0 - (r_0 - \Lambda_\nu)) = 0,$$

während A_{22}^* die übrigen Nullstellen enthalte.

Wir können (16) auch in der folgenden Form schreiben:

$$(17)\quad \frac{d}{ds}\,Y_m = Y_m\left\{\begin{pmatrix} A_{11}^* - \Lambda_{m-1}E_{11} & 0 \\ B_{21}^{m-1} & A_{12}^* \end{pmatrix} + \sum_{\nu=m}^{\infty}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_{21}^{\nu} & 0 \end{pmatrix} e^{(\Lambda_\nu - \Lambda_{m-1})s}\right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=1}^{\infty}\begin{pmatrix} B_{11}^{\nu} & 0 \\ 0 & B_{22}^{\nu} \end{pmatrix} e^{\Lambda_\nu s} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\begin{pmatrix} 0 & B_{12}^{\nu} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{(\Lambda_\nu + \Lambda_{m-1})s}\right\}.$$

Dabei wäre $m = 1$, $B_{21}^0 = 0$ und

$$\begin{pmatrix} B_{11}^{\nu} & B_{12}^{\nu} \\ B_{21}^{\nu} & B_{22}^{\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\bar{A}}_{11}^{\nu} & A_{12}^{\nu} \\ \bar{\bar{A}}_{21}^{\nu} & \bar{\bar{A}}_{22}^{\nu} \end{pmatrix} = \bar{\bar{A}}_\nu; \quad E = \begin{pmatrix} E_{11} & 0 \\ 0 & E_{22} \end{pmatrix},$$

wobei $\bar{\bar{A}}_\nu$ und E entsprechend zu unterteilen sind wie A_0^*. Wir werden nun (17) umformen, indem wir mit $m = 1$ beginnen und dann schrittweise fortfahren.

Um unsere Umformung zu schildern und um ihre Anwendbarkeit induktiv zu beweisen, nehmen wir an, daß nach m — 1-maliger Anwendung des Umformungsverfahrens die Gleichung (17) erreicht ist. Es gibt dann, wie wir zeigen wollen, eine Matrix S_m, so daß bei entsprechender Unterteilung

$$S_m = \begin{pmatrix} E_{11} & 0 \\ U_{21}^m & E_{22} \end{pmatrix}$$

und

$$S_m \begin{pmatrix} A_{11}^* - \Lambda_{m-1} & 0 \\ B_{21}^{m-1} & A_{22}^* \end{pmatrix} S_m^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^* - \Lambda_{m-1} & 0 \\ 0 & A_{22}^* \end{pmatrix},$$

sofern $r_0 - \Lambda_{m-1} = \bar{r}_0$ von den in A_{22}^* auftretenden r_i verschieden ist.

Für U_{21}^m besteht die einzige Bedingung

$$(18)\qquad U_{21}^m\,(A_{11}^* - \Lambda_{m-1}) + B_{21}^{m-1} = A_{22}^*\,U_{21}^m.$$

Hat A_{11}^* p Zeilen und Spalten, ist also

$$r_i \neq r_0 \quad \text{für} \quad i \leqq p \quad \text{und} \quad r_i \neq r_0 \quad \text{für} \quad i > p,$$

so lautet (18), falls $U_{21}^m = (u_{ij})$,

$$\sum_{j=1}^{p}(u_{ij}\,\delta_k^j\,\bar{r}_0 + u_{ij}\,\delta_k^{j-1}\,\delta_j^*) + b_{ik}^{m-1}$$

$$= \sum_{j=p+1}^{m}(\delta_j^i\,r_i\,u_{jk} + \delta_j^{i-1}\,\delta_i^*\,u_{jk}); \qquad (i > p;\ k \leqq p).$$

Oder, indem man $\delta_{p+1}^*\,u_{pk}$ und $u_{in+1}\,\delta_{n+1}^*$ gleich Null setzt,

$$u_{ik}\,(\bar{r}_0 - r_i) + u_{ik+1}\,\delta_{k+1}^* = \delta_i^*\,u_{i-1k} - b_{ik}^{m-1} \qquad (i > p \geqq k).$$

Ist $\bar{r}_0 - r_i \neq 0$, so ist dies Gleichungssystem auflösbar. Man setze dazu zunächst $i = p + 1$. Es entsteht ein inhomogenes System linearer Glei-

chungen in den Unbekannten $u_{p+11} \dots u_{p+1\,p}$ mit nicht verschwindender Determinante der Koeffizienten. Sodann löst man das System für $i = p+2$ usw.

Setzen wir nun $Y_m = \overline{Y}_m S_m$, so geht (17) über in

$$(19)\quad \frac{d}{ds}\overline{Y}_m = \overline{Y}_m \left\{ \begin{pmatrix} A^*_{11} - \Lambda_{m-1} & 0 \\ 0 & A^*_{22} \end{pmatrix} + \sum_{\nu=m}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B^\nu_{21} & 0 \end{pmatrix} e^{(\Lambda_\nu - \Lambda_{m-1})s} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \begin{pmatrix} B^\nu_{11} & 0 \\ B^\nu_{21} & B^\nu_{22} \end{pmatrix} e^{\Lambda_\nu s} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \bar{B}^\nu_{11} & B^\nu_{12} \\ B^\nu_{21} & B^\nu_{22} \end{pmatrix} e^{(\Lambda_\nu + \Lambda_{m-1})s} \right\}.$$

(19) kann auch geschrieben werden:

$$\frac{d}{ds}\overline{Y}_m = \overline{Y}_m \left\{ \begin{pmatrix} A^*_{11} - \Lambda_{m-1} & 0 \\ 0 & A^*_{22} \end{pmatrix} + \sum_{\nu=m}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{\bar{B}}^\nu_{21} & 0 \end{pmatrix} e^{(\Lambda_\nu - \Lambda_{m-1})s} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \bar{\bar{B}}^\nu_{11} & 0 \\ 0 & \bar{\bar{B}}^\nu_{22} \end{pmatrix} e^{\Lambda_\nu s} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\bar{B}}^\nu_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{(\Lambda_\nu + \Lambda_{m-1})s} \right\}.$$

Denn es ist $\{\Lambda_\nu - \Lambda_{m-1}\} \supseteq \{\Lambda_\nu\} \supseteq \{\Lambda_\nu + \Lambda_{m-1}\}$. Wir setzen nun

$$\overline{Y}_m = Y_{m+1} V_m \quad \text{mit} \quad V_m = \begin{pmatrix} E_{11}\, e^{(\Lambda_m - \Lambda_{m-1})s} & 0 \\ 0 & E_{22} \end{pmatrix}.$$

Für Y_{m+1} folgt

$$\frac{d}{ds}Y_{m+1} = Y_{m+1} \left\{ \begin{pmatrix} A^*_{11} - \Lambda_m & 0 \\ \bar{\bar{B}}^m_{21} & A^*_{22} \end{pmatrix} + \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{\bar{B}}^\nu_{21} & 0 \end{pmatrix} e^{(\Lambda_\nu - \Lambda_m)s} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \bar{\bar{B}}^\nu_{11} & 0 \\ 0 & \bar{\bar{B}}^\nu_{22} \end{pmatrix} e^{\Lambda_\nu s} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\bar{B}}^\nu_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{(\Lambda_\nu + \Lambda_m)s} \right\}.$$

Diese Gleichung ist wieder vom Typus (17).

Damit ist die Anwendbarkeit des Verfahrens gezeigt, solange

$$\bar{r}_0 = r_0 - \Lambda_{m-1} \neq r_i, \qquad i > p.$$

Es sei nun m^* die erste Zahl, für die es ein i^* gibt, so daß

$$\Lambda_{m^*} = r_0 - r_{i^*}.$$

Dabei wird also gelten

$$(20)\qquad \Lambda_m \neq r_0 - r_i \quad \text{für} \quad i > p; \quad m < m^*.$$

Weiter sei im Falle komplexer Λ_ν die Zählung so durchgeführt, daß

$$(21)\qquad \Re(\Lambda_\nu) \neq \Re(\Lambda_{m^*}) \quad \text{für} \quad \nu > m^*.$$

Das widerspricht weder der Festsetzung $\Re(\Lambda_\nu) \leqq \Re(\Lambda_{\nu+1})$ noch der Gleichung (20), denn für komplexe Λ_ν sind die r_i und damit die $r_0 - r_i$ zunächst noch reell angenommen, so daß, falls $\Lambda_{m^{**}} = r_0 - r_{i^{**}}$, mit $m^{**} > m^*$ folgt $\Lambda_{m^{**}} > \Lambda_{m^*}$.

Wendet man also unsere Umformung an, so wird man für Y_{m^*} eine Differentialgleichung erhalten, deren charakteristische Gleichung lautet:

$$\Delta\left(\begin{pmatrix} A_{11}^* - \Lambda_{m^*} & 0 \\ B_{21}^{m^*} & A_{22}^* \end{pmatrix} - r\right) = 0.$$

Die Wurzeln sind

$$(r_1 - \Lambda_{m^*}) = \ldots = (r_p - \Lambda_{m^*}); \quad r_{p+1} \ldots r_n.$$

Dabei gibt es ein $i^* > p$, so daß

$$r_1 - \Lambda_{m^*} = r_2 - \Lambda_{m^*} = \ldots = r_p - \Lambda_{m^*} = r_{i^*}.$$

Wegen (21) treten in der Gleichung für Y_{m^*} außer $\Lambda_0 = 0$ keine Exponentenpunkte auf, deren Realteile nicht positiv sind. Es sind daher alle Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Ist die einschränkende Voraussetzung (5) wieder nicht erfüllt, so wird die Gleichung für Y_{m^*} von neuem umgeformt usw. Indem man nun nötigenfalls alle Wurzeln gleichmacht, kommt man in endlich vielen Schritten zu einer Gleichung, die die Einschränkung erfüllt.

Sind aber in der Ausgangsgleichung (16) *sowohl die* Λ_ν *als auch die* r_i *komplex*, so können die Λ_ν unter Umständen nicht so angeordnet werden, daß (20) und (21) bestehen. Dann muß in (16) gesetzt werden

$$Y_1 = Y_0 T,$$

wobei

$$T = \begin{pmatrix} \mathsf{T}_1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & \ldots & \mathsf{T}_q \end{pmatrix}$$

entsprechend eingeteilt ist wie A_0^* und wobei

$$\mathsf{T}_1 = e^{\mathfrak{Z}(r_1)s} E_1; \quad \mathsf{T}_2 = e^{\mathfrak{Z}(r_{p_1+1})s} E_2$$

usw. Es gilt dann für Y_0 die Gleichung

$$(22) \qquad \frac{d}{ds} Y_0 = Y_0 \left\{ \left(A_0^* - \left(\frac{d}{ds} T\right) T^{-1} \right) + \sum_{\nu=1}^{\infty} T A_\nu T^{-1} e^{\Lambda_\nu s} \right.$$

$$\left. = Y_0 \left\{ A_0^{*'} + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu' e^{\Lambda_\nu' s} \right\} \right.$$

Die Wurzeln der neuen charakteristischen Gleichung sind reell.

Kapitel II.

Formale Lösungen linearer, homogener Differentialgleichungen n-ter Ordnung, deren Koeffizienten Dirichletsche Reihen mit endlich vielen negativen Exponentenpunkten sind.

§ 1.

Eine notwendige Bedingung.

Wir wollen eine notwendige Bedingung dafür aufstellen, daß die Differentialgleichung

$$\sum_{i=0}^{n} y^{(i)} a_i = 0, \tag{1}$$

wobei

$$a_i = e^{\eta_i s}(a_{i0} + \ldots) \tag{2}$$

eine *formale* Lösung

$$y = e^{\varrho s}(c_0 + \ldots)$$

besitzt. Unter den Abkürzungen $c_0 + \ldots$ und $a_{i0} + \ldots$ sollen Dirichletsche Reihen mit reellen, monoton gegen $+\infty$ wachsenden Exponenten verstanden sein, für die

$$a_{i0} \neq 0 \quad \text{und} \quad c_0 \neq 0.$$

Die Zahlen η_i seien reell, ϱ beliebig komplex.

Setzt man die Lösung ein, so müßte formal gelten

$$\sum_{i=0}^{n} (\varrho^i e^{\varrho s} c_0 a_{i0} e^{\eta_i s} + \ldots) = 0, \tag{3}$$

d. h. die Koeffizienten der links entstehenden Dirichletschen Reihe sollen alle verschwinden. Statt (3) kann auch geschrieben werden

$$\sum_{i=0}^{n} (\varrho^i c_0 a_{i0} e^{\eta_i s} + \ldots) = 0.$$

Als notwendige Bedingung für die Existenz formaler Lösungen folgt daher

$$\sum_{i=0}^{n} \varrho^i a_{i0} \delta_{\underset{j}{\mathrm{Min}}\,(\eta_j)}^{\eta_i} = 0. \tag{4}$$

Das Symbol $\delta_q^p = \begin{cases} 0 & \text{für } p \neq q \\ 1 & p = q \end{cases}$ verwenden wir hinfort auch für beliebige komplexe Zahlen p und q. Ist $\varkappa$ die größte Zahl i für die $\eta_i = \underset{j=0\ldots n}{\mathrm{Min}}\,(\eta_j)$, so ist (4) eine Gleichung $\varkappa$-ten Grades für ϱ. Für die Existenz formaler Lösungen ist also notwendig, daß $\varkappa > 0$.

§ 2.

Reduktion der linearen Differentialgleichung auf eine Form, die formale Lösungen zuläßt.

In der Differentialgleichung

$$\sum_{i=0}^{n} y^{(i)} a_i = 0 \tag{5}$$

sollen die a_i Dirichletsche Reihen mit reellen, monoton gegen $+\infty$ strebenden Exponentenpunkten sein, von denen nur endlich viele negativ sein mögen. Ist p ein Exponentialpolynom, dessen Exponentenpunkte negativ sind, so wollen wir zeigen, daß bei geeigneter Wahl von p die Gleichung (5) durch die Transformation

$$y = y_1 e^{\int p\,ds}$$

so umgeformt werden kann, daß die transformierte Gleichung die notwendige Bedingung des vorigen Paragraphen erfüllt. Dazu sind jedoch einige Vorbereitungen nötig.

A. In

$$\sum_{i=0}^{n} y^{(i)} a_i = 0$$

setzen wir $y = y_1 v$, somit

$$y^{(i)} = \sum_{k=0}^{i} y_1^{(k)}\, v^{(i-k)} \binom{i}{k}.$$

Es folgt

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\, y^{(i)} = \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{k=0}^{i} y_1^{(k)}\, v^{(i-k)} \binom{i}{k}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} y_1^{(j)} \sum_{l=j}^{n} a_l\, v^{(l-j)} \binom{l}{j}$$

oder

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\, y^{(i)} = \sum_{i=0}^{n} y_1^{(i)} \sum_{l=i}^{n} a_l\, v^{(l-i)} \binom{l}{i}. \tag{6}$$

B. Es sei

$$v = e^{\int p\,ds},$$

dann ist

$$v^{(j)} = \{p^j + P_j(p\,p' \ldots p^{(j-1)})\}\, v, \tag{7}$$

wobei P_j ein Polynom höchstens $(j-1)$-ten Grades in den Argumenten $p\,p' \ldots p^{(j-1)}$ ist. Denn diese Formel ist richtig für $j = 1$ wegen $P_0 \equiv P_1 \equiv 0$, und für $j + 1$ folgt aus der Formel für j

$$v^{(j+1)} = \{j\,p^{j-1}p' + \frac{d}{ds} P(p\,p' \ldots p^{(j-1)}) + p^{j+1} + p\,P_j(p\,p' \ldots p^{(j-1)})\}\, v$$

$$= \{p^{j+1} + P_{j+1}(p\,p' \ldots p^{(j)})\} \cdot v.$$

Vollständige Induktion ergibt daher die Behauptung (7).

C. Setzt man $y = y_1 e^{\int p\,ds}$ in $\sum y^{(i)} a_i = 0$, so folgt also nach (6) und (7)

$$\sum_{i=0}^{n} y_1^{(i)} \sum_{l=i}^{n} a_l \{p^{l-i} + P_{l-i}(p\,p' \ldots p^{(l-i-1)})\} \binom{l}{i} = \sum_{i=0}^{n} y_1^{(i)} b_i = 0.$$

Für b_i folgt daraus

$$b_i = \sum_{l=i}^{n} a_l \{p^{l-i} + P_{l-i}(p\,p' \ldots p^{(l-i-1)})\} \binom{l}{i}.$$

D. Wir führen nun eine *Exponentenbewertung*[9]) für unsere Dirichletschen Reihen ein.

Ist

$$D = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu e^{\lambda_\nu s}; \quad d_0 \neq 0; \quad \lambda_\nu \uparrow + \infty,$$

so sei

$$\Omega(D) = \lambda_0.$$

Es gilt

(8) $$\Omega(D_1 + D_2) \geqq \operatorname{Min}(\Omega(D_1);\ \Omega(D_2)),$$

insbesondere

(9) $$\Omega(D_1 + D_2) = \operatorname{Min}(\Omega(D_1); \Omega(D_2)), \quad \text{falls} \quad \Omega(D_1) \neq \Omega(D_2).$$

Weiter

(10) $$\Omega(D_1 D_2) = \Omega(D_1) + \Omega(D_2)$$

und

(11) $$\Omega(0) = + \infty.$$

E. Für $\sum y^{(i)} a_i = 0$ möge es eine Zahl $\omega < 0$ so geben, daß

$$\Omega(a_i) \geqq \Omega(a_{n_1}) - (i - n_1)\,\omega \quad \text{für ein } n_1\text{:} \quad 0 \leqq n_1 \leqq n.$$

Setzt man dann $y = y_1 e^{\int p\,ds}$ mit $0 > \Omega(p) \geqq \omega$, so gilt für die entstehende Gleichung $\sum_{i=0}^{n} y_1^{(i)} b_i = 0$

(12) $$\Omega(b_i) \geqq \Omega(a_{n_1}) - (i - n_1)\,\omega$$

und

(13) $$\Omega(b_{n_1}) = \Omega(a_{n_1}), \quad \text{sofern} \quad \Omega(p) > \omega.$$

Beweis. Es ist

$$b_i = \sum_{l=i}^{n} a_l \{p^{l-i} + P_{l-i}(p\,p' \ldots p^{(l-i-1)})\} \binom{l}{i}.$$

Wegen

$$\Omega(p^{l-i} + P_{l-i}) = (l - i)\,\Omega(p)$$

folgt

$$\Omega(b_i) \geqq \operatorname*{Min}_{l=i,\,i+1\ldots n} \{\Omega(a_{n_1}) - (l-n_1)\,\omega + (b-i)\,\Omega(p)\}$$
$$\geqq \operatorname*{Min}_{l=i,\,i+1\ldots n} \{\Omega(a_{n_1}) - (i-n_1)\,\omega + (l-i)\,(\Omega(p) - \omega)\}.$$

Daraus folgt aber (12) unter Beachtung von (8) und weiter (13) vermöge (9).

F. Wir zeichnen nun ein *Newton-Diagramm* [9]) für unsere Differentialgleichung $\sum_{i=0}^{n} y^{(i)} a_i = 0$. D. h. wir zeichnen in ein rechtwinkliges Koordinatensystem die Punkte $(i; \Omega(a_i))$ sowie den Punkt $\left(0; \operatorname*{Min}_{i=0\ldots n} (\Omega(a_i))\right)$ und umschließen dieselben mit einem Polygonzug derart, daß auf jeder Seite des Polygons mindestens zwei Punkte liegen, und daß keine Punkte „unterhalb" einer Polygonseite oder ihrer Verlängerung liegen. Wir ziehen also die unteren „Stützsehnen". [Der Punkt $(0; \operatorname{Min} \Omega(a_i))$ soll nur bewirken, daß keine Seite von links nach rechts fällt.]

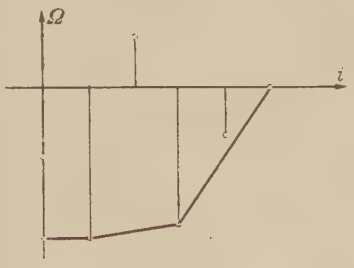


Fig. 1.

Die Figur zeigt das Newton-Diagramm einer Differentialgleichung fünfter Ordnung, wobei $a_5 = 1$ angenommen wurde.

Geht eine Seite durch die Punkte $(n_1\,\Omega(a_{n_1}))$ und $(n_2\,\Omega(a_{n_2}))$, so steigt sie unter einem Winkel φ an, für den

$$\operatorname{tg}\varphi = -\omega = \frac{\Omega(a_{n_2}) - \Omega(a_{n_1})}{n_2 - n_1}.$$

Transformieren wir also nun die Gleichung

$$\sum y^{(i)} a_i = 0$$

durch $y = y_1 e^{\int p\,ds}$, wobei $0 > \Omega(p) > \omega$, so liegen nach E. (13) auch die Punkte

$$(n_1\,\Omega(b_{n_1})) \quad \text{und} \quad (n_2\,\Omega(b_{n_2}))$$

der neuen Gleichung

$$\sum y_1^{(i)} b_i = 0$$

wegen $\Omega(b_{n_1}) = \Omega(a_{n_1})$ und $\Omega(b_{n_2}) = \Omega(a_{n_2})$ auf einer Polygonseite, die unter dem Winkel φ ansteigt. Denn es liegen nach (12) alle übrigen Punkte nicht unterhalb dieser Seite oder ihrer Verlängerungen.

G. *Es sei* $(n_1\,\Omega(a_{n_1}))$ *ein Eckpunkt des Polygons für* (5), *d. h. es gebe zwei Zahlen* $\omega_1 < \omega_2 < 0$, *so daß*

$$\Omega(a_i) \geqq \Omega(a_{n_1}) - (i-n_1)\,\omega_k \quad \textit{für} \quad i = 0 \ldots n;\ k = 1, 2.$$

Wir wollen zeigen, daß es eine Transformation

$$y = y_1 e^{\int p\,ds},$$

wobei

$$(14) \qquad p = \sum_{\nu=0}^{N-1} p_\nu e^{\lambda_{p\nu} s} \cdot e^{\omega_2 s}; \quad 0 \leqq \lambda_{p\nu} < -\omega_2; \quad \Omega(p) > \omega_1,$$

so gibt, daß

$$\Omega(b_{n_1-1}) \geqq \Omega(a_{n_1}).$$

Zum Beweis können wir unsere Reihen schreiben:

$$a_l = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{l\nu} e^{\lambda_\nu s} e^{\{\eta_{n_1} - (l-n_1)\omega_2\} s} \quad \text{mit} \quad \lambda_\nu \geqq 0; \quad c_{n_1 0} \neq 0.$$

Dabei denken wir uns die Zahlen λ_ν zu einem „Halbmodul" ergänzt, der auch $-\omega_2$ enthalten soll. Im Halbmodul $\{\lambda_\nu\}$ soll mit $\lambda_{\nu'}$ und $\lambda_{\nu''}$ auch $\lambda_{\nu'''} = (\lambda_{\nu'} + \lambda_{\nu''})$ enthalten sein. Die Zählung der λ_ν kann und soll so durchgeführt werden, daß die λ_ν monoton gegen $+\infty$ wachsen, und daß $\lambda_0 = 0$ sowie $\lambda_N = -\omega_2$. In (14) setzen wir nun $\lambda_{p\nu} = \lambda_\nu$ für $\nu = 0, 1, \ldots, N-1$.

Damit wird nach C.

$$\begin{aligned}(15) \quad b_{n_1-1} = {} & \Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n_1-1\,\nu} e^{\lambda_\nu s}\Big)\Big\{\sum_{\nu=0}^{N-1} p_\nu e^{\lambda_\nu s}\Big\}^0 \binom{n_1-1}{n_1-1} e^{(\eta_{n_1}+\omega_2) s} + Q_{n_1-1} \\ & + \Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n_1\nu} e^{\lambda_\nu s}\Big)\Big\{\sum_{\nu=0}^{N-1} p_\nu e^{\lambda_\nu s}\Big\}^1 \binom{n_1}{n_1-1} e^{(\eta_{n_1}+\omega_2) s} + \binom{n_1}{n_1-1} Q_{n_1} \\ & + \sum_{l=n_1+1}^{n} \Big(\sum_{\nu=1}^{\infty} c_{l\nu} e^{\lambda_\nu s}\Big)\Big\{\sum_{\nu=0}^{N-1} p_\nu e^{\lambda_\nu s}\Big\}^{l-n_1+1} \binom{l}{n_1-1} e^{(\eta_{n_1}+\omega_2) s} \\ & + \sum_{l=n_1+1}^{n} \binom{l}{n_1-1} Q_l.\end{aligned}$$

Die Reihen $\sum_{\nu=1}^{\infty} c_{l\nu} e^{\lambda_\nu s}$ in der dritten Summe beginnen erst mit $\nu = 1$, denn es ist doch für $j \geqq 1$

$$\Omega(a_{n_1+j}) \geqq \eta_{n_1} - j\omega_1 > \eta_{n_1} - j\omega_2.$$

Weiter ist mit der in B. angegebenen Bezeichnung

$$Q_l = a_l \cdot P_{l-n_1+1},$$

also auch

$$\Omega(Q_l) = \Omega(a_l \cdot P_{l-n_1+1}).$$

Im einzelnen ist

$$Q_{n_1-1} = a_{n_1-1} \cdot P_0 = 0,$$

$$Q_{n_1} = a_{n_1} \cdot P_1 = 0,$$

$$Q_{n_1+j} = a_{n_1+j} \cdot P_{j+1}.$$

Weiter

$$\Omega(Q_{n_1+j}) = \Omega(a_{n_1+j}) + \Omega(P_{j+1}) \geqq \Omega(a_{n_1}) - j\omega_1 + j\omega_2.$$

Denn $\Omega(P_{j+1}) \geqq j\omega_2$, daher für $j \geqq 1$

$$\Omega(Q_{n_1+j}) \geqq \Omega(a_{n_1}) + j(\omega_2 - \omega_1) > \Omega(a_{n_1}).$$

Bei der Berechnung von p braucht man sich also um die Q_l nicht zu kümmern.

Der Koeffizient von $e^{\lambda_\nu s} \cdot e^{(\eta_{n_1}+\omega_2)s}$ in (15) lautet

$$c_{n_1-1\,0} + c_{n_1\,0}\, p_\nu \binom{n_1}{n_1-1} + R_\nu.$$

R_ν ist dabei ein Polynom in $p_0 \ldots p_{\nu-1}$, während $c_{n_1\,0} \neq 0$ ist.

Die Zahlen $p_0 \ldots p_{N-1}$ sind daher aus der Gleichung

$$c_{n_1-1\,\nu} + c_{n_1\,0}\, p_\nu \binom{n_1}{n_1-1} + R_\nu = 0$$

der Reihe nach berechenbar.

Diese Transformation G. stellt in gewisser Beziehung eine Erweiterung der üblichen „Beseitigung des zweithöchsten Gliedes" dar [9]).

H. Zur beabsichtigten Reduktion der Gleichung (5) auf eine formal lösbare Form brauchen wir noch eine andere Transformation.

Zunächst wollen wir die Transformation

$$y = y_1 e^{\int p\,ds} \quad \text{mit} \quad p = p_0 e^{\omega s} + \ldots$$

im allgemeinen noch etwas näher untersuchen.

Wir wollen sehen, welchen notwendigen Bedingungen ω und p_0 genügen müssen, damit die entstehende Gleichung

$$\sum_{i=0}^{n} y_1^{(i)} b_i = 0$$

die notwendige Bedingung des § 1 *erfüllt, damit also*

$$\Omega(b_0) \geqq \operatorname*{Min}_{j=1\ldots n} \Omega(b_j). \tag{16}$$

Es wird (zur Bezeichnung vgl. § 1):

$$\begin{aligned}\Omega(b_i) &= \Omega\Big(\sum_{l=i}^{n} a_l \{p^{l-i} + P_{l-i}\}\binom{l}{i}\Big)\\ &= \Omega\Big(\sum_{l=i}^{n} \{a_{l0}\, e^{\eta_l s} + \ldots\}\{p_0^{l-i} e^{(l-i)\omega s} + \ldots\}\binom{l}{i}\Big)\\ &= \operatorname*{Min}_{l=0\ldots n} (\eta_l + (l-i)\omega).\end{aligned}$$

Damit (16) gelten kann, ist wegen $\omega < 0$ notwendig, daß

$$\Omega(b_0) > \operatorname*{Min}_{l=0\ldots n} (\eta_l + l\omega).$$

Nun ist (vgl. C.)

$$(17)\quad b_i = \Big(\sum_{l=i}^{n} a_{l0}\, p_0^{l-i} \binom{l}{i} \delta^{\eta_l + (l-i)\omega}_{\substack{\text{Min} \\ j}\,(\eta_j + (j-i)\omega)}\Big) e^{\{\substack{\text{Min} \\ j=0\ldots n}\,(\eta_j + (j-i)\omega)\}\, s} + \ldots.$$

Damit also $\Omega(b) > \underset{l=0\ldots n}{\text{Min}}\,(\eta_l + l\,\omega)$ wird, ist notwendig, daß

$$(18)\qquad \sum_{l=0}^{n} a_{l0}\, p_0^{l}\, \delta^{\eta_l + l\omega}_{\substack{\text{Min} \\ j}\,(\eta_j + j\omega)} = f(p_0) = 0.$$

Da nun $a_{l0} \neq 0$ ist, so kann die Gleichung (18) nur bestehen, wenn

$$\underset{j=0\ldots n}{\text{Min}}\,(\eta_j + j\,\omega)$$

für mindestens zwei j angenommen wird, falls nicht $p_0 = 0$ ist. Es muß also eine Seite des Newton-Polygons für $\sum_{i=0}^{n} y^{(i)} a_i = 0$ unter einem Winkel φ ansteigen, so daß

$$\text{tg}\,\varphi = -\omega.$$

Weiter muß aber auch p_0 der Gleichung (18) genügen. Diese Gleichung wird n_1-ten Grades sein, sofern n_1 die größte Zahl l ist, für die

$$\eta_l + l\omega = \underset{j=0\ldots n}{\text{Min}}\,(\eta_j + j\omega).$$

Bis zu n_1 braucht man also auch nur in (18) zu summieren. Zu jeder Seite des Newton-Polygons gehört somit eine algebraische Gleichung. Die zur letzten, steilsten Seite gehörende Gleichung heißt „charakteristische Gleichung". Im folgenden spielt sie jedoch gegenüber den Gleichungen der anderen Seiten keine ausgezeichnete Rolle. Viel wichtiger ist die in § 1 (4) aufgestellte Gleichung der horizontalen Seite. Sie tritt an die Stelle der charakteristischen Gleichung des ersten Kapitels.

Ist nun p_0 eine μ-fache Nullstelle der Gleichung (18), so wird der Koeffizient von $e^{\{\substack{\text{Min} \\ j}\,(\eta_j + (j-i)\omega)\}\, s}$ in b_i lauten:

$$(19)\quad \sum_{l=i}^{n_1} a_{l0}\, p_0^{l-i} \binom{l}{i} \delta^{\eta_l + (l-i)\omega}_{\substack{\text{Min} \\ j}\,(\eta_j + (j-i)\omega)} = \frac{1}{i!} f^{(i)}(p_0) = 0 \text{ für } i = 0, 1, \ldots, \mu - 1,$$

$$(20)\quad \sum_{l=i}^{n_1} a_{l0}\, p_0^{l-i} \binom{l}{i} \delta^{\eta_l + (l-i)\omega}_{\substack{\text{Min} \\ j}\,(\eta_j + (j-i)\omega)} = \frac{1}{i!} f^{(i)}(p_0) \neq 0 \text{ für } i = \mu,$$

$$(21)\quad \sum_{l=i}^{n_1} a_{l0}\, p_0^{l-i} \binom{l}{i} \delta^{\eta_l + (l-i)\omega}_{\substack{\text{Min} \\ j}\,(\eta_j + (j-i)\omega)} = \frac{1}{i!} f^{(i)}(p_0) \text{ für } i \geqq \mu + 1.$$

Die neue Gleichung der zu $\text{tg}\,\varphi = -\omega$ gehörenden Seite in $\Sigma y_1^{(i)} b_i = 0$ heißt also

$$(22)\qquad \bar{f}(\bar{p}_0) = \sum_{i=0}^{n_1} \bar{p}_0^{\,i}\, \frac{1}{i!} f^{(i)}(p_0) = f(p_0 + \bar{p}_0) = 0.$$

Daraus wollen wir noch eine besondere Folgerung ziehen. Ist nämlich $p_0 = 0$, so folgt nach (22), daß die Gleichung der zu $\operatorname{tg} \varphi = -\omega$ gehörenden Seite unverändert bleibt. Daraus folgt aber weiter, daß die Gleichungen der Seiten, für die

$$\operatorname{tg} \varphi > -\omega$$

auch für $p_0 \neq 0$ ungeändert bleiben, denn man kann eine Transformation, die durch $p = p_0 e^{\omega s} + \ldots$ gegeben ist, auffassen als durch

$$p = p_0^* e^{\omega^* s} + p_0 e^{\omega s} + \ldots$$

gegeben, wobei $p_0^* = 0$ und $\omega^* = -\operatorname{tg} \varphi$.

I. Jetzt können wir als Anwendung von H. noch eine spezielle Transformation untersuchen.

Für $\sum y^{(i)} a_i = 0$ *gelte für ein* n_1

$$\Omega(a_{n_1 - 1}) \geqq \Omega(a_{n_1}). \tag{23}$$

Weiter gebe es eine Zahl $\omega < 0$, *so daß*

$$\Omega(a_i) \geqq \Omega(a_{n_1}) + (n_1 - i)\,\omega \quad \text{für} \quad i \leqq n_1. \tag{24}$$

Schließlich gebe es mindestens ein $n_2 < n_1$, *so daß*

$$\Omega(a_{n_2}) = \Omega(a_{n_1}) + (n_1 - n_2)\,\omega. \tag{25}$$

Endlich sei

$$\Omega(a_i) > \Omega(a_{n_1}) + (n_1 - i)\,\omega \quad \text{für} \quad i > n_1. \tag{26}$$

Das folgende Diagramm möge die Verhältnisse veranschaulichen.

Wir setzen wieder $y = y_1 e^{\int p\,ds}$ mit $p = p_0 e^{\omega s}$, so daß $\sum y_1^{(i)} b_i = 0$. Wir werden zeigen: *Fordert man*

$$\Omega(b_0) > \Omega(a_{n_1}) + n_1 \omega,$$

so gilt für p_0 *eine Gleichung* n_1-*ten Grades, die mindestens zwei verschiedene Nullstellen hat; wählt man für* p_0 *eine* μ-fache *Nullstelle, so folgt*

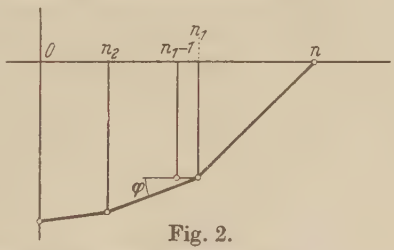


Fig. 2.

$$\Omega(b_i) > \Omega(a_{n_1}) + (n_1 - i)\,\omega, \quad i = 0, 1, \ldots, \mu - 1,$$

$$\Omega(b_\mu) = \Omega(a_{n_1}) + (n_1 - \mu)\,\omega.$$

Beweis. Es ist wegen (24) und (26)

$$\eta_{n_1} + n_1 \omega = \operatorname*{Min}_j (\eta_j + j\,\omega).$$

Für b_i gilt (17). p_0 muß daher die Gleichung (18), d. h.

$$\sum_{l=0}^{n} a_{l0} p_0^l \delta_{\eta_l + l\omega}^{\eta_{n_1} + n_1 \omega} = f(p_0) = 0 \tag{27}$$

erfüllen. Da aber (23) bedeutet, daß

$$\delta_{\eta_{n_1} + n_1 \omega}^{\eta_{n_1} - 1 + (n_1 - 1)\omega} = 0,$$

während (25) bedeutet, daß

$$\delta_{\eta_{n_1} + n_1 \omega}^{\eta_{n_2} + n_2 \omega} = 1,$$

so hat (27) mehr als eine Nullstelle. Ist p_0 eine μ-fache Nullstelle, so gilt wie in H. wieder (19) und (20). Daraus folgt aber

$$\Omega(b_0) > \Omega(a_{n_1}) + (n_1 - 0)\,\omega,$$
$$\Omega(b_i) > \Omega(a_{n_1}) + (n_1 - i)\,\omega \quad \text{für} \quad i = 1 \ldots \mu - 1,$$
$$\Omega(b_i) = \Omega(a_{n_1}) + (n_1 - \mu)\,\omega \quad \text{für} \quad i = \mu.$$

K. Sowohl für die Transformationen H.: $y = y_1 e^{\int p_0 e^{\omega s} + \ldots ds}$, wie für die Transformationen I.: $y = y_1 e^{\int p_0 e^{\omega s} ds}$ gilt der folgende Zusatz:

Sind $p_{01}; p_{02}; \ldots; p_{0m}$ die Nullstellen von (19) oder (27) und ist $\mu_1; \mu_2; \ldots; \mu_m$ die Vielfachheit derselben, so gilt

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_j = n_1.$$

§ 3.

Durchführung der Reduktion.

Wir können nun daran gehen, unsere beabsichtigte Reduktion durchzuführen. Auf die Gleichung (5) wenden wir zunächst die in G. angegebene Transformation an, indem wir $n_1 = n$ setzen. Zur Veranschaulichung zeichnen wir das Newton-Diagramm einer Differentialgleichung am Beginn der Reduktion.

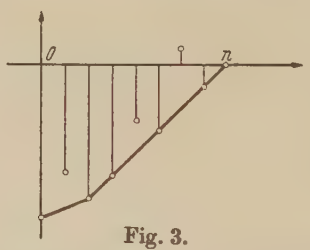


Fig. 3.

Nach Anwendung der Transformation G. wird das Diagramm etwa die folgende Gestalt annehmen.

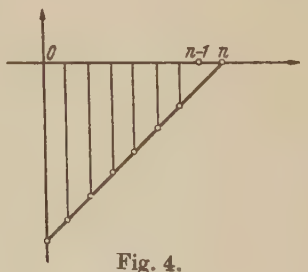


Fig. 4.

Die neue Gleichung gestattet jetzt die Anwendung des Verfahrens I., wenn man wieder $n_1 = n$ setzt. Wir wählen unter den zwei oder mehr zur Verfügung stehenden Nullstellen der Gleichung (27) ein p_0 mit der Vielfachheit μ. Für die Gesamtheit der Nullstellen gilt dabei K. Das Diagramm unseres Beispiels möge dabei übergehen in:

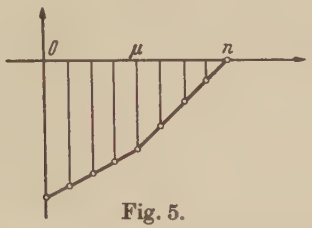


Fig. 5.

Nun können wir wieder G. anwenden, indem wir $n_1 = \mu$ setzen. Dabei ist der Anfangsexponent des neuen Polynoms G. größer als der Exponent der vorher angewandten Reduktion I. Das Diagramm des Beispiels sei:

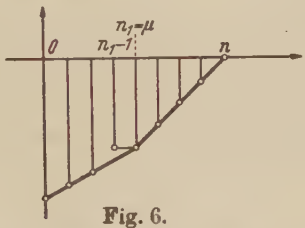


Fig. 6.

Es kann nun wieder I. angewendet werden, wobei $n_1 = \mu$, während für die Gesamtheit der Möglichkeiten der Zusatz K. erneut gilt. Das Diagramm des Beispiels erhalte die Gestalt:

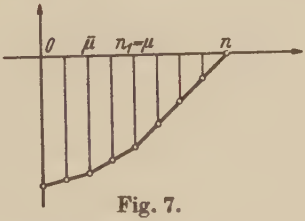


Fig. 7.

Es soll nun immer abwechselnd nach G. *und* I. *verfahren werden, wobei immer das neue* n_1 *dem letzten* μ *gleichgesetzt werden muß.*

Das Verfahren läßt sich offenbar solange fortführen, bis sich nach einer Reduktion G. ergibt, daß

$$\Omega(a_{n_1}) \leqq \Omega(a_i) \quad \text{für} \quad i \leqq n_1. \tag{28}$$

Das ist sicher dann der Fall, wenn $n_1 = 1$ geworden ist. Ergibt sich (28) nicht früher, so wird aber spätestens nach n — 1-maliger Anwendung von G. und I. $n_1 = 1$ zu setzen sein.

Am Ende des so durchgeführten Verfahrens ergibt sich nun eine Gleichung, für die es eine größte Zahl

$$\varkappa > 0$$

gibt, so daß

$$\Omega(b_\varkappa) \leqq \Omega(b_i) \quad \text{für} \quad i \leqq \varkappa.$$

Die notwendige Bedingung des § 1 ist also erfüllt. $\varkappa$ ist dabei durch das n_1 der letzten, abschließenden Reduktion G. gegeben. Berücksichtigt man nun bei jeder Reduktion I. alle Nullstellen, so erhält man eine Reihe von Polynomen, die die Reduktion leisten, und die voneinander *verschieden* sind, da die folgenden Schritte die bei einer Reduktion I. bestimmten Glieder nicht mehr ändern. Jedes der Polynome liefert eine Gleichung mit einem

$$\varkappa_j > 0,$$

und aus der Anwendung von K. bei jedem Schritte I. folgt

$$\sum_j \varkappa_j = n.$$

Die Reduktion der Gleichung

$$\sum y^{(i)} a_i = 0 \tag{29}$$

durch $y = y_1 e^{\int p\,ds}$, wobei p ein Exponentialpolynom ist, auf eine Gleichung $\sum y_1^{(i)} b_i = 0$, für die

$$\Omega(b_0) \geqq \operatorname*{Min}_{i=1\ldots n} \Omega(b_i),$$

läßt sich auch einfacher ausführen, nachdem einmal gezeigt ist, daß sie mit endlich vielen Schritten ausführbar ist.

Es gibt also ein Polynom

$$p = \sum_{\nu=0}^{N-1} p_\nu e^{\lambda_{p\nu} s} \quad \text{mit} \quad \lambda_{p\nu} < 0,$$

das unsere Reduktion leistet. Wir können annehmen, daß

$$\lambda_{p\nu} > \lambda_{p\nu-1}.$$

Ist in

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -\omega_1$$

φ_1 der Winkel, unter dem die steilste Seite des Newton-Polygons für (29) ansteigt, so kann man nach H.

$$\lambda_{p_0} = \omega_1$$

setzen.

Für p_0 gilt dann eine Gleichung n-ten Grades, die eine oder mehrere Nullstellen besitzt, die auch Null sein können. Ist μ_i die Vielfachheit der Nullstelle p_{0i}, so gilt nach K. $\sum \mu_i = n$. Transformiert man nun (29) mit $y = y_1 e^{\int p_{01} e^{\omega_1 s}\,ds}$, wobei p_{01} eine der Nullstellen ist, so ergibt sich die

Möglichkeit λ_{p1} zu bestimmen. Man kann nämlich $\lambda_{p1} = \omega_2 = -\operatorname{tg}\varphi_2$ setzen, sofern φ_2 im Newton-Polygon der durch $p_{01}e^{\omega_1 s}$ transformierten Gleichung zur steilsten der Seiten gehört, für die $\omega_2 > \omega_1$. Es gilt nach H. somit für p_1 eine Gleichung μ_1-ten Grades. Die Summe der Vielfachheiten der Nullstellen ist μ_1. *So fortfahrend kann man der Reihe nach alle* $\lambda_{p\nu}$ *und dazu nach* H. *die* p_ν *bestimmen*, indem man für $\lambda_{p\nu}$ immer das $\omega = -\operatorname{tg}\varphi$ der steilsten der Seiten, für die $\omega > \lambda_{p\nu-1}$, im Newton-Diagramm der mit $e^{\int \sum_{m=0}^{\nu-1} p_m e^{\lambda_{pm} s} ds}$ transformierten Gleichung (29) wählt.

Da H. nur notwendige Bedingungen zur Bestimmung von p liefert, so steht von vornherein nicht fest, ob alle der sich ergebenden Möglichkeiten zu einer der gewünschten Reduktionen führen. Wäre das der Fall, so erhielte man eine Reihe von Gleichungen, für die es eine größte Zahl $\bar{\varkappa}_i$ gibt, so daß

$$\Omega(b_{\bar{\varkappa}_i}) \leqq \Omega(b_i) \quad \text{für} \quad i \leqq \bar{\varkappa}_i$$

und es müßte wieder

$$\sum \bar{\varkappa}_i = n.$$

Für die Gleichungen, die auf diesem zweiten Wege (nach H.) wirklich, d. h. mit endlich vielen Schritten, erreichbar sind, gilt also

$$\sum \bar{\varkappa}_i \leqq n.$$

Für die Gleichungen, die auf dem ersten Wege (nach G. und I.) gewonnen werden können, hatten wir aber gefunden

$$\sum \varkappa_i = n.$$

Nun müssen die Gleichungen des ersten Weges aber den notwendigen Bedingungen von H. genügen, und daher unter denen des zweiten Weges enthalten sein. Es muß somit gelten

$$\sum \varkappa_i \leqq \sum \bar{\varkappa}_i.$$

Es folgt

$$\sum \bar{\varkappa}_i = \sum \varkappa_i = n. \tag{30}$$

Man kann also auf dem zweiten Wege weder solche Gleichungen gewinnen, die auf dem ersten Wege nicht erreichbar sind, denn sonst müßte gelten

$$\sum \bar{\varkappa}_i > \sum \varkappa_i,$$

noch kann es sein, daß eine der Möglichkeiten des zweiten Weges nicht zu einem endlichen Polynom führt, denn sonst wäre

$$\sum \bar{\varkappa}_i < n.$$

§ 4.

Anhang zum II. Kapitel. Formale Lösungen.

Im folgenden wird der Nachweis erbracht, daß die in § 1 aufgestellte notwendige Bedingung auch hinreichend ist für die Existenz von $\varkappa$ formalen Lösungen, falls $\varkappa$ die in § 1 angegebene Bedeutung hat und sofern man den Begriff der formalen Lösungen geeignet erweitert.

Für die folgenden Kapitel wird der Inhalt dieses Anhangs nicht gebraucht.

Es gilt der folgende Satz:

In der Differentialgleichung

$$\sum_{k=0}^{n} y^{(k)} a_k = 0 \tag{31}$$

sei

$$a_k = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_k^{\nu} e^{(\eta + \lambda_\nu) x}.$$

Es sei dabei

$$\begin{aligned} &\Omega(a_k) \geqq \eta \quad \text{oder} \quad a_k^0 \text{ beliebig} \quad \text{für} \quad k = 0, 1, \ldots, \varkappa - 1, \\ &\Omega(a_k) = \eta \quad \text{oder} \quad a_k^0 \neq 0 \quad \text{für} \quad k = \varkappa \leqq n, \\ &\Omega(a_k) > \eta \quad \text{oder} \quad a_k^0 = 0 \quad \text{für} \quad k = \varkappa + 1 \ldots n. \end{aligned}$$

Weiter sei

$$\eta \leqq 0.$$

Die Zahlen $\{\lambda_\nu\}$ *mögen komplexe Zahlen sein. Dabei sei* $\lambda_0 = 0$ *und* $\Re(\lambda_\nu) > 0$ *für* $\nu > 0$. *Weiter*

$$\Re(\lambda_{\nu+1}) \geqq \Re(\lambda_\nu). \tag{32}$$

Steht hierbei das Gleichheitszeichen, so soll gelten

$$\Im(\lambda_{\nu+1}) > \Im(\lambda_\nu). \tag{33}$$

(*Die Beschränkung auf reelle* $\{\lambda_\nu\}$ *bildet keine wesentliche Vereinfachung.*) *Ist* $a_n = 1$, *so ist offenbar* $-\eta$ *unter die Zahlen* $\{\lambda_\nu\}$ *aufzunehmen. Weiter sei mit* $\lambda_{\nu'}$ *und* $\lambda_{\nu''}$ *auch* $\lambda_{\nu'''} = \lambda_{\nu'} + \lambda_{\nu''}$ *unter den* $\{\lambda_\lambda\}$ *enthalten. Schließlich sei*

$$\lim(\Re(\lambda_\nu)) = +\infty.$$

Es gibt sodann eine formale Lösung

$$\mathfrak{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_\varkappa \end{pmatrix} = e^{\Gamma x}\, \mathfrak{c}; \tag{34}$$

dabei ist Γ *eine konstante* $\varkappa$*-zeilige quadratische Matrix, und*

$$\mathfrak{c} = \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{\Lambda_\nu x} \mathfrak{c}_\nu; \qquad \mathfrak{c}_\nu = \begin{pmatrix} c_1^\nu \\ \vdots \\ c_\varkappa^\nu \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Die Menge $\{\Lambda_\nu\}$ *ist gegeben durch die Vereinigungsmenge*

$$\{\Lambda_\nu\} = \{(\varrho_1 + \lambda_\nu)\} + \{(\varrho_2 + \lambda_\nu)\} + \ldots + \{(\varrho_{\varkappa'} + \lambda_\nu)\},$$

sofern die $\varkappa' \leqq \varkappa$ *Zahlen* $\varrho_1 \ldots \varrho_{\varkappa'}$ *die Nullstellen der Gleichung*

$$\sum_{k=0}^{\varkappa} \varrho^k a_k^0 = 0 \tag{36}$$

bedeuten. (Das ist die Gleichung der horizontalen Seite im Newton-Diagramm für (31).) *Die* Λ_ν *sind dabei so anzuordnen, daß* (32) *und* (33) *auch für die* Λ_ν *gelten.*

Zusatz. *Die* $\varkappa$ *Lösungen* (34) *sind im formalen Sinne linear unabhängig, sofern der Begriff der linearen Abhängigkeit sinngemäß übertragen wird* [13]).

Aus diesem Satz folgt in Verbindung mit der Reduktion des § 3, daß jede Differentialgleichung

$$\sum a_i y^{(i)} = 0 \tag{37}$$

mit den Koeffizienten

$$a_i = e^{\eta_i s}(a_{i0} + \ldots)$$

n formale Lösungen der Gestalt

$$y = e^{\int p\, ds}\, \psi \tag{38}$$

besitzt. Dabei ist ψ ein Polynom in s, dessen Koeffizienten Summen von Dirichletschen Reihen der Gestalt $d = e^{\varrho s}(d_0 + \ldots)$ sind. Am Ende dieses Anhangs wollen wir noch zeigen, daß diese n Lösungen im formalen Sinne linear unabhängig sind.

Unter $(a_{i0} + \ldots)$ und $(d_0 + \ldots)$ sind dabei wie in § 1 Dirichletsche Reihen mit *reellen* monoton gegen $+\infty$ wachsenden Exponenten zu verstehen. η_i ist reell, ϱ komplex.

Zum Beweis unseres Satzes gehen wir mit dem formalen Ansatz (34) und (35) in die Gleichung (31) hinein. Wir erhalten, indem wir von links mit $e^{-(\Gamma+\eta)s}$ multiplizieren:

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\Gamma + \Lambda_\nu)^k c_\nu e^{\Lambda_\nu s} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} a_k^\nu e^{\lambda_\nu s} = 0$$

oder

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \Big\{ \sum_{\nu'=0}^{\nu} \sum_{\nu''=0}^{\infty} \Big\{ \delta_{\Lambda_\nu}^{\Lambda_{\nu'} + \lambda_{\nu''}} \Big\{ \sum_{k=0}^{n} (\Gamma + \Lambda_{\nu'})^k a_k^{\nu''} \Big\} c_{\nu'} \Big\} \Big\} e^{\Lambda_\nu s} = 0.$$

Denn es ist in $\{\Lambda_\nu\}$ mit $\Lambda_{\nu'}$ auch $\Lambda_{\nu'''} = \lambda_{\nu''} + \Lambda_{\nu'}$ bei beliebigen $\lambda_{\nu''}$ enthalten. Ist nun

$$F_\nu(\varrho) = \sum_{k=0}^{n} a_k^\nu \varrho^k, \tag{39}$$

[13]) Vgl. F. T. Cope, Formal solutions of irregular linear differential equations. Part I. Amer. Journ. of Math. **56** (1934), S. 411.

insbesondere

$$F_0(\varrho) = \sum_{k=0}^{\varkappa} a_k^0 \varrho^k, \tag{40}$$

so folgt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \sum_{\nu'=0}^{\nu} \sum_{\nu''=0}^{\infty} \delta_{\Lambda_\nu}^{\Lambda_{\nu'} + \lambda_{\nu''}} F_{\nu''}(\Gamma + \Lambda_{\nu'})\, \mathfrak{c}_{\nu'} \right\} e^{\Lambda_\nu s} = 0.$$

Das ergibt die folgende Rekursionsformel

$$F_0(\Gamma + \Lambda_\nu)\, \mathfrak{c}_\nu = \mathfrak{r}_\nu \tag{41}$$

mit

$$\mathfrak{r}_\nu = -\sum_{\nu'=0}^{\nu-1} \sum_{\nu''=1}^{\infty} \delta_{\Lambda_\nu}^{\Lambda_{\nu'} + \lambda_{\nu''}} F_{\nu''}(\Gamma + \Lambda_{\nu'})\, \mathfrak{c}_{\nu'}.$$

Wir haben also eine $\varkappa$-zeilige quadratische Matrix Γ zu bestimmen, die es uns ermöglicht, das Gleichungssystem (41) *für alle $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ aufzulösen.* Weiter ist Γ auch so zu wählen, daß unser Zusatz bewiesen werden kann. Wir machen für Γ den folgenden Ansatz: Die $\varkappa'$ Nullstellen der Gleichung (36)

$$\varrho_1\ \varrho_2 \ldots \varrho_{\varkappa'}$$

mögen die Vielfachheit $\mu_1\ \mu_2 \ldots \mu_{\varkappa'}$ haben. Weiter seien die ϱ so angeordnet, daß auch für sie die Bedingungen (32) und (33) erfüllt seien. Dann geben wir Γ die folgende Gestalt:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ \Gamma_{\varkappa' 1} & \Gamma_{\varkappa' 2} & \Gamma_{\varkappa' 3} & \ldots & \Gamma_{\varkappa' \varkappa'} \end{pmatrix}.$$

Γ_{ii} habe dabei $\mu_{\varkappa'+1-i}$ Zeilen und Spalten, und es sei

$$\Gamma_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{42}$$

Es hat also $\Gamma_{\varkappa' \varkappa'}$ so viel Zeilen und Spalten, wie die Vielfachheit von ϱ_1 angibt, und $\Gamma_{\varkappa'-1\,\varkappa'-1}$ hat so viel Zeilen und Spalten, wie die Vielfachheit von ϱ_2 angibt, usw. Für $i > k$ behalten wir uns die Wahl der Γ_{ik} noch vor. Ihre Zeilen- und Spaltenzahl ist durch die in der Diagonale stehenden Teilmatrizen bestimmt.

Wir beginnen damit die Vektoren $\mathfrak{c}_\nu$ *zu berechnen.* Es muß gelten

$$\{F_0(\Gamma + \Lambda_0)\}\,\mathfrak{c}_0 = 0. \tag{43}$$

Nun gilt aber für die Polynome (39) und (40)

$$F_\nu(\Gamma + \varrho) = \sum_{k=0}^{\varkappa-1} \frac{\Gamma^k F^k(\varrho)}{k!},$$

denn $\Gamma^k = 0$ für $k \geqq \varkappa$.

Ist $\varrho_1 = \Lambda_0$ eine μ_1-fache Nullstelle, so wird

$$F_0(\Gamma + \Lambda_0) = \sum_{k=\mu_1}^{\varkappa-1} \Gamma^k \cdot F^{(k)}(\varrho_1)\frac{1}{k!}.$$

Nun sei

$$(\Gamma)^k = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^{*k} & 0 & . & 0 \\ \Gamma_{21}^{*k} & \Gamma_{22}^{*k} & . & 0 \\ . & . & . & . \\ \Gamma_{\varkappa' 1}^{*k} & \Gamma_{\varkappa' 2}^{*k} & . & \Gamma_{\varkappa'\varkappa'}^{*k} \end{pmatrix}.$$

Damit wird, falls $\mathfrak{c}_0$ entsprechend Γ unterteilt wird,

$$\{F(\Gamma + \Lambda_0)\}\mathfrak{c}_0 \tag{44}$$

$$= \sum_{k=\mu_1}^{\varkappa-1} \frac{F^{(k)}(\Lambda_0)}{k!} \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^{*k} & 0 & . & 0 & 0 \\ . & & . & . & . \\ \Gamma_{\varkappa'-1\,1}^{*k} & \Gamma_{\varkappa'-1\,2}^{*k} & . & \Gamma_{\varkappa'-1\,\varkappa'-1}^{*k} & 0 \\ \Gamma_{\varkappa' 1}^{*k} & \Gamma_{\varkappa' 2}^{*k} & . & \Gamma_{\varkappa'\varkappa'-1}^{*k} & \Gamma_{\varkappa'\varkappa'}^{*k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ 0 \\ \mathfrak{c}_{\varkappa'}^0 \end{pmatrix} = 0.$$

für beliebiges $\mathfrak{c}_{\varkappa'}^0$, denn $\Gamma_{\varkappa'\varkappa'}^{*k} = 0$ für $k \geqq \mu_1$. Wir setzen

$$\mathfrak{c}_{\varkappa'}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir gehen nun zur Berechnung von $\mathfrak{c}_1$ über. Es muß gelten

$$\{F(\Gamma + \Lambda_1)\}\,\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{r}_1 = -\sum_{\nu'=0}^{0} \sum_{\nu''=0}^{\infty} \delta_{\Lambda_\nu}^{\Lambda_{\nu'} + \lambda_{\nu''}} F_{\nu''}(\Gamma + \Lambda_{\nu'})\,\mathfrak{c}_{\nu'}.$$

Die Tatsache, daß die Matrizen $(\Gamma + \Lambda_\nu)$ rechts oberhalb der Diagonale nur Nullen stehen haben, bringt nun nach (41) mit sich, daß, sofern alle Vektoren $\mathfrak{c}_\nu$ für $\nu < \nu'$ von der Form

$$\mathfrak{c}_\nu = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathfrak{c}_{i_{\nu'}}^\nu \\ \vdots \\ \mathfrak{c}_{\varkappa'}^\nu \end{pmatrix} \tag{45}$$

sind, auch

$$\mathfrak{r}_{\nu'} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathfrak{r}_{i_{\nu'}}^{\nu'} \\ \vdots \\ \mathfrak{r}_{\varkappa'}^{\nu'} \end{pmatrix} \tag{46}$$

ist. Daher ist

$$\mathfrak{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathfrak{r}_{\varkappa'}^{1} \end{pmatrix}.$$

Ist nun

$$\Delta\left(F\left(\Gamma + \Lambda_1\right)\right) = \left\{F\left(\Lambda_1\right)\right\}^{\varkappa} \neq 0,$$

so ist unser Gleichungssystem (41) ohne weiteres auflösbar, und wir finden

$$\mathfrak{c}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathfrak{c}_{\varkappa'}^{1} \end{pmatrix}$$

mit eindeutig bestimmter Teilmatrix

$$\mathfrak{c}_{\varkappa'}^{1} = \begin{pmatrix} c_{\varkappa - u_1 + 1}^{1} \\ \vdots \\ c_{\varkappa - 1}^{1} \\ c_{\varkappa}^{1} \end{pmatrix}.$$

Wir können nun die Vektoren

$$\mathfrak{c}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathfrak{c}_{\varkappa'}^{\nu} \end{pmatrix}$$

solange bestimmen, wie

$$F\left(\Lambda_\nu\right) \neq 0$$

ist. Ist $\varkappa' > 1$, so wird es eine Zahl ν' geben, für die $\Lambda_{\nu'} = \varrho_2$, so daß unser Gleichungssystem im allgemeinen nicht mehr auflösbar ist. Wir setzen dann

$$\mathfrak{c}_{\nu'} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathfrak{c}_{\varkappa'-1}^{\nu'} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{c}_{\varkappa'-1}^{\nu'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{47}$$

Damit aber unsere Rekursionsformel für ν' befriedigt ist, wählen wir die Teilmatrix $\Gamma_{\varkappa'\varkappa'-1}$, die ja bisher noch unbestimmt ist und die zur Berechnung der vorangehenden $\mathfrak{c}_\nu$ auch nicht benutzt wird, so aus, daß unsere Formel (41) für $\nu = \nu'$ befriedigt wird. Wir werden zeigen, daß das möglich ist. Nun lassen sich $\mathfrak{c}_{\nu'+1}; \mathfrak{c}_{\nu'+2}; \ldots$ wieder bestimmen, bis für ein ν'' gilt $\Lambda_{\nu''} = \varrho_3$. Wir setzen dann

$$\mathfrak{c}_{\nu''} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathfrak{c}^{\nu''}_{\varkappa'-2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{c}^{\nu''}_{\varkappa'-2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

und erzwingen die Befriedigung der Rekursionsformel durch geeignete Wahl der bisher noch unbestimmten und freien Teilmatrizen $\Gamma_{\varkappa'-1\,\varkappa'-2}$, $\Gamma_{\varkappa'\varkappa'-2}$. Entsprechend wird für $\Lambda_{\nu'''} = \varrho_4$ usw. verfahren, bis alle Teilmatrizen der Matrix Γ bestimmt sind. Das wird für $\Lambda_{\nu(\varkappa'-1)} = \varrho_{\varkappa'}$ der Fall sein. Hinfort ist unsere Rekursionsformel immer auflösbar, denn es wird

$$\Delta\,(F\,(\Gamma + \Lambda_\nu)) = \{F(\Lambda_\nu)\}^\varkappa \neq 0$$

bleiben.

Wir haben nun noch zu zeigen, daß das angegebene Verfahren auch durchführbar ist.

Es sei also $\Lambda_\nu = \varrho_{\varkappa'+1-i}$. Die Vielfachheit dieser Nullstelle sei $\mu = \mu_{\varkappa'+1-i}$. Wir wollen nun die Matrix Γ in der folgenden abkürzenden Form schreiben:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & 0 & 0 \\ \Gamma^1_{21} & \Gamma^1_{22} & 0 \\ \Gamma^1_{31} & \Gamma^1_{32} & \Gamma^1_{33} \end{pmatrix}, \tag{48}$$

wobei

$$\Gamma^1_{11} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & 0 & . & 0 \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & . & 0 \\ . & . & . & . \\ \Gamma_{i-11} & \Gamma_{i-12} & . & \Gamma_{i-1\,i-1} \end{pmatrix},$$

$$\Gamma^1_{21} = (\Gamma_{i1} \quad \Gamma_{i2} \quad . \quad \Gamma_{ii-1}), \quad \Gamma^1_{22} = \Gamma_{ii},$$

$$\Gamma^1_{31} = \begin{pmatrix} \Gamma_{i+11} & \Gamma_{i+12} & . & \Gamma_{i+1\,i-1} \\ . & . & . & . \\ \Gamma_{\varkappa'1} & \Gamma_{\varkappa'2} & . & \Gamma_{\varkappa'\,i-1} \end{pmatrix}, \Gamma^1_{32} = \begin{pmatrix} \Gamma_{i+1\,i} \\ . \\ \Gamma_{\varkappa'\,i} \end{pmatrix}, \Gamma^1_{32} = \begin{pmatrix} \Gamma_{i+1\,i+1} & . & 0 \\ . & . & . \\ \Gamma_{\varkappa'\,i+1} & . & \Gamma_{\varkappa'\varkappa'} \end{pmatrix}.$$

Unterteilen wir die Vektoren

$$\mathfrak{c}_\nu = \begin{pmatrix} \mathfrak{b}^\nu_1 \\ \mathfrak{b}^\nu_2 \\ \mathfrak{b}^\nu_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{r}_\nu = \begin{pmatrix} \mathfrak{q}^\nu_1 \\ \mathfrak{q}^\nu_2 \\ \mathfrak{q}^\nu_3 \end{pmatrix} \tag{49}$$

entsprechend. so lautet unsere Rekursionsformel (41) für $\bar{\nu}$

$$(50)\qquad \sum_{k=\mu}^{\varkappa} \frac{F^{(k)}(\Lambda_{\bar{\nu}})}{k!} \begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & 0 & 0 \\ \Gamma^1_{21} & \Gamma^1_{22} & 0 \\ \Gamma^1_{31} & \Gamma^1_{32} & \Gamma^1_{33} \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} \mathfrak{b}_1^{\bar{\nu}} \\ \mathfrak{b}_2^{\bar{\nu}} \\ \mathfrak{b}_3^{\bar{\nu}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{q}_1^{\bar{\nu}} \\ \mathfrak{q}_2^{\bar{\nu}} \\ \mathfrak{q}_3^{\bar{\nu}} \end{pmatrix}.$$

Wir dürfen nun die folgenden Voraussetzungen machen: Es ist

$$\mathfrak{c}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathfrak{b}_3^{\nu} \end{pmatrix} \text{ für } \nu < \bar{\nu}, \quad \text{also } \mathfrak{r}_{\bar{\nu}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathfrak{q}_3^{\bar{\nu}} \end{pmatrix}$$

und dabei sind die $\mathfrak{b}_3^{\nu}$ unabhängig von Γ^1_{21}; Γ^1_{31}; Γ^1_{32} bestimmt.

Wir zeigen nun: *Setzt man*

$$(51)\qquad \mathfrak{c}_{\bar{\nu}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathfrak{b}_2^{\bar{\nu}} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } \mathfrak{b}_2^{\bar{\nu}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

so läßt sich bei geeigneter Wahl von Γ^1_{32} die Rekursionsformel (50) *bei beliebigem Γ^1_{21} und Γ^1_{31} befriedigen. Daraus folgt dann, daß die $\mathfrak{c}_{\bar{\nu}+1}$; $\mathfrak{c}_{\bar{\nu}+2}$ ... bis $\mathfrak{c}_{\bar{\nu}-1}$, sofern $\Lambda_{\bar{\nu}} = \varrho_{\varkappa'-i}$ ist, die Form*

$$\mathfrak{c}_{\bar{\nu}+i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathfrak{b}_2^{\bar{\nu}+i} \\ \mathfrak{b}_3^{\bar{\nu}+i} \end{pmatrix}$$

besitzen. Diese $\mathfrak{c}_{\bar{\nu}+i}$ sind dabei unabhängig von Γ^1_{21} und Γ^1_{31}.

Zum Beweis beachten wir: Schreibt man die Matrix

$$(\Gamma)^k = \begin{pmatrix} \Gamma^k_{11} & 0 & 0 \\ \Gamma^k_{21} & \Gamma^k_{22} & 0 \\ \Gamma^k_{31} & \Gamma^k_{32} & \Gamma^k_{33} \end{pmatrix},$$

so folgt aus (50)

$$(52)\qquad \sum_{k=\mu}^{\varkappa-1} \frac{F^{(k)}(\Lambda_{\bar{\nu}})}{k!} \begin{pmatrix} \Gamma^k_{11} & 0 & 0 \\ \Gamma^k_{21} & 0 & 0 \\ \Gamma^k_{31} & \Gamma^k_{32} & \Gamma^k_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathfrak{b}_2^{\bar{\nu}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathfrak{q}_3^{\bar{\nu}} \end{pmatrix},$$

denn es ist

$$\Gamma^k_{22} = (\Gamma^1_{22})^k = 0 \quad \text{für} \quad k \geqq \mu.$$

Wir brauchen also nur zu zeigen, daß sich Γ^1_{32} so bestimmen läßt, daß

$$(53)\qquad \sum_{k=\mu}^{\varkappa-1} \frac{F^{(k)}(\Lambda_{\bar{\nu}})}{k!} \Gamma^k_{32}\, \mathfrak{b}_2^{\bar{\nu}} = \mathfrak{q}_3^{\bar{\nu}}.$$

Wegen (51) interessiert uns von der Matrix

$$\left\{ \sum_{k=\mu}^{\varkappa-1} \frac{F^{(k)}(\Lambda_{\bar{\nu}})}{k!} \Gamma^k_{32} \right\}$$

nur die erste Spalte, und diese erste Spalte muß $\mathfrak{q}_3^-$ werden. Nun ist aber für $k > 1$

$$(54)\quad \Gamma_{32}^k = (\Gamma_{33}^1)^{k-1}\Gamma_{32}^1 + (\Gamma_{33}^1)^{k-2}\Gamma_{32}^1\Gamma_{22}^1 + (\Gamma_{33}^1)^{k-3}\Gamma_{32}^1(\Gamma_{22}^1)^2 + \ldots + \Gamma_{32}^1(\Gamma_{22}^1)^{k-1}.$$

Γ_{32}^k ist also unabhängig von Γ_{11}^1, Γ_{21}^1 und Γ_{31}^1.

Wir machen für Γ_{32}^1 den Ansatz

$$(55)\quad \Gamma_{32}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \gamma_2 \\ . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \gamma_{\varkappa''} \end{pmatrix} = (0 \ldots 0\, \mathfrak{g}) \quad \text{mit} \quad \mathfrak{g} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_{\varkappa''} \end{pmatrix}.$$

Andererseits ist

$$\Gamma_{22}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 1 & 0 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Führt man in den Summanden von (54) zunächst die Multiplikationen mit Γ_{22}^1 aus, so findet man

$$(56)\quad \Gamma_{32}^1 = (0 \ldots 0\, 0\, \mathfrak{g});\ \Gamma_{32}^1\Gamma_{22}^1 = (0 \ldots 0\, \mathfrak{g}\, 0);\ \Gamma_{32}^1(\Gamma_{22}^1)^2 = (0 \ldots \mathfrak{g}\, 0\, 0) \text{ usw.}$$

Schließlich

$$(57)\quad \Gamma_{32}^1(\Gamma_{22}^1)^{\mu-1} = (\mathfrak{g}\, 0 \ldots 0);\ \Gamma_{32}^1(\Gamma_{22}^1)^{\mu} = 0;\ \Gamma_{32}^1(\Gamma_{22}^1)^{\mu+1} = 0 \text{ usw.}$$

Es wird also nach (57) die erste Spalte von Γ_{32}^k gleich der ersten Spalte von $\Gamma_{33}^{k-\mu}\,\Gamma_{32}^1\,\Gamma_{22}^{\mu-1}$ werden; denn nach (56) tragen alle anderen Produkte nichts zu dieser Spalte bei. Die erste Spalte von Γ_{32}^k lautet daher $\Gamma_{33}^{k-\mu}\cdot\mathfrak{g}$.

Somit geht (53) über in

$$(58)\quad \sum_{k=\mu}^{\varkappa-1} \frac{F^{(k)}(\Lambda_\nu^-)}{k!}\,\Gamma_{33}^{k-\mu}\,\mathfrak{g} = \mathfrak{q}_3^\nu.$$

Nun ist

$$\Delta\left\{\sum_{k=\mu}^{\varkappa-1}\frac{F^{(k)}(\Lambda_\nu^-)}{k!}\,\Gamma_{33}^{k-\mu}\right\} = \Delta\left\{\frac{F^{(k)}(\Lambda_\nu^-)}{\mu!}\Gamma_{33}^0\right\} = \Delta\left\{\frac{F^{(k)}(\Lambda_\nu^-)}{\mu!}E\right\} \neq 0.$$

Denn Γ_{33}^k hat in der Diagonale und rechts oberhalb von ihr nur Nullen stehen, sofern $k > 0$.

Durch geeignete Wahl von $\mathfrak{g}$ läßt sich daher unsere Rekursionsformel befriedigen. $\mathfrak{g}$ ist überdies unabhängig von Γ_{11}^1, Γ_{21}^1 und Γ_{31}^1. Nun können $\mathfrak{c}_{\nu+1}^-$; $\mathfrak{c}_{\nu+2}^-$ usw. berechnet werden, bis $\Lambda_\nu^- = \varrho_{\varkappa'-i}$ wird. W. z. b. w.

Für die $\mathfrak{c}_\nu$ gilt noch besonders, daß, falls für irgendein k gilt

$$\mathfrak{r}_\nu = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathfrak{r}_k^\nu \\ \vdots \\ \mathfrak{r}_{\varkappa'}^\nu \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F(\Lambda_\nu) \neq 0,$$

auch mit gleichem k gilt

$$\mathfrak{c}_\nu = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathfrak{c}_k^\nu \\ \vdots \\ \mathfrak{c}_{\varkappa'}^\nu \end{pmatrix}. \tag{59}$$

Denn in (41) stehen in $F_0(\Gamma + \Lambda_\nu)$ rechts oberhalb der Diagonale nur Nullen. (Zur Bezeichnung vgl. (45).)

Diese Bemerkung (59) *soll uns zum Beweis des Zusatzes dienen. Weiter brauchen wir noch eine Verschärfung unseres Verfahrens zur Bestimmung der Teilmatrizen von* Γ.

Es sei wieder $\Lambda_\nu^- = \varrho_{\varkappa'+1-i}$. Wir schreiben an Stelle von (48)

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{22}^1 & 0 & 0 \\ \overline{\Gamma}_{31}^1 & \overline{\Gamma}_{32}^1 & \overline{\Gamma}_{33}^1 & 0 \\ \overline{\Gamma}_{41}^1 & \overline{\Gamma}_{42}^1 & \overline{\Gamma}_{43}^1 & \overline{\Gamma}_{44}^1 \end{pmatrix}. \tag{60}$$

Dabei enthalte $\bar{\Gamma}_{33}^1$ diejenigen Teilmatrizen (42), die zu solchen Wurzeln ϱ_j gehören, für die

$$\Re(\varrho_j) = \Re(\varrho_{\varkappa'+1-i}) \quad \text{und} \quad \Im(\varrho_j) < \Im(\varrho_{\varkappa'+1-i}).$$

Nun wird in

$$\mathfrak{r}_\nu^- = -\sum_{\nu'=0}^{\nu-1} \sum_{\nu''=1}^{\infty} \delta_{\Lambda_\nu^-}^{\Lambda_{\nu'}+\lambda_{\nu''}} F_{\nu''}(\Gamma + \Lambda_{\nu'})\,\mathfrak{c}_{\nu'} \tag{61}$$

gelten

$$\delta_{\Lambda_\nu^-}^{\Lambda_{\nu'}+\lambda_{\nu''}} = 0, \quad \text{sofern} \quad \Re(\Lambda_{\nu'}) = \Re(\Lambda_\nu^-) \tag{62}$$

ist, denn es ist vorausgesetzt $\Re(\lambda_\nu) > 0$ für $\nu > 0$. Daher wird

$$\bar{\mathfrak{r}}_\nu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{\mathfrak{q}}_4^\nu \end{pmatrix},$$

wobei entsprechend (60) zu unterteilen ist. Schreibt man an Stelle von (55)

$$\Gamma_{32}^{1} = \begin{pmatrix} \overline{\Gamma}_{32}^{1} \\ \overline{\Gamma}_{42}^{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \bar{g}_3 \\ 0 & \dots & 0 & \bar{g}_4 \end{pmatrix},$$

so geht (58) über in

$$\left\{ \sum_{k=\mu}^{\varkappa-1} \frac{1}{k!} F^{(k)}(\Lambda_{\bar{\nu}}) \begin{pmatrix} \overline{\Gamma}_{33}^{1} & 0 \\ \overline{\Gamma}_{43}^{1} & \overline{\Gamma}_{44}^{1} \end{pmatrix}^{k-\mu} \right\} \begin{pmatrix} \bar{g}_3 \\ \bar{g}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{q}_4^{\bar{\nu}} \end{pmatrix}.$$

Es folgt also

$$\bar{g}_3 = 0. \tag{63}$$

Denn

$$\Delta \left\{ \sum_{l=\mu}^{\varkappa-1} F^{(k)}(\Lambda_{\bar{\nu}}) \left(\overline{\Gamma}_{33}^{1}\right)^{k-\mu} \right\} = \Delta \left\{ \frac{1}{\mu!} F^{(\mu)}(\Lambda_{\bar{\nu}}) \cdot E \right\} \neq 0.$$

Wir können nun den Zusatz beweisen.

Die $\varkappa$ Lösungen (34) sind von der Gestalt

$$\varphi(s) = \sum_{l=0}^{L} s^l \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{l\nu} e^{\Lambda_\nu s}. \tag{64}$$

Verstehen wir unter der formalen Gleichung

$$\varphi(s) = 0 \tag{65}$$

wie selbstverständlich die Gleichungen

$$c_{l\nu} = 0 \qquad l = 0 \dots L;\ \nu = 0 \dots \infty, \tag{66}$$

so sollen $\varkappa$ formale Ausdrücke φ_i dann und nur dann linear abhängig heißen, wenn es $\varkappa$ Zahlen α_i, die nicht alle verschwinden, so gibt, daß

$$\sum_{i=1}^{\varkappa} \varphi_i \alpha_i = 0.$$

Besteht eine derartige Beziehung nicht, so sollen die φ_i linear unabhängig heißen[13]).

Wir nehmen nun an, unsere $\varkappa$ Lösungen

$$\mathfrak{y} = e^{\Gamma s}\, \mathfrak{c}$$

wären linear abhängig, d. h. es gebe $\varkappa$ Zahlen $\alpha_1 \dots \alpha_\varkappa$, so daß

$$\mathfrak{A}\mathfrak{y} = 0 \quad \textit{mit} \quad \mathfrak{A} = (\alpha_1 \dots \alpha_\varkappa). \tag{67}$$

Wir haben zu zeigen, daß diese Annahme zu einem Widerspruch führt.

Wir dürfen (67) formal differenzieren, denn aus (65) folgt wegen (66)

$$\frac{d}{ds}\varphi = \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} (c_{0\nu} \Lambda_\nu + c_{1\nu}) e^{\Lambda_\nu s} + \dots + s^L \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} (c_{L\nu} \Lambda_\nu) e^{\Lambda_\nu s} \right\} = 0.$$

Ist W daher die Wronskische Matrix der durch $\mathfrak{y}$ gegebenen $\varkappa$ formalen Lösungen, so gilt nach (67)

$$\mathfrak{A}W = 0. \tag{68}$$

Nun ist

$$W = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_1^{(\varkappa-1)} \\ . & \dots & . \\ y_\varkappa & \dots & y_\varkappa^{(\varkappa-1)} \end{pmatrix} = (\mathfrak{y} \ \dots \ \mathfrak{y}^{(\varkappa-1)}) \tag{69}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \{e^{(\Gamma+\Lambda_\nu)s}(\mathfrak{c}_\nu; \ (\Gamma+\Lambda_\nu)^1 \mathfrak{c}_\nu; \ \dots; (\Gamma+\Lambda_\nu)^{\varkappa-1}\mathfrak{c}_\nu)\}$$

$$= e^{\Gamma s} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \{(e^{\Lambda_\nu s}\,\mathfrak{c}_\nu; \ \dots; \ (\Gamma+\Lambda_\nu)^{\varkappa-1} e^{\Lambda_\nu s}\,\mathfrak{c}_\nu)\}$$

$$= e^{\Gamma s} \cdot W_1.$$

Weiter ist (zur Bezeichnung vgl. z. B. (45))

$$e^{\Lambda_\nu s}\,\mathfrak{c}_\nu = \begin{pmatrix} c_1^\nu e^{\Lambda_\nu s} \\ c_2^\nu e^{\Lambda_\nu s} \\ \vdots \\ c_{\varkappa'}^\nu e^{\Lambda_\nu s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\varrho_{\varkappa'} s} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\varrho_{\varkappa'-1} s} & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & e^{\varrho_1 s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1^\nu e^{(\Lambda_\nu - \varrho_{\varkappa'})s} \\ c_2^\nu e^{(\Lambda_\nu - \varrho_{\varkappa'-1})s} \\ . \\ . \\ c_{\varkappa'}^\nu e^{(\Lambda_\nu - \varrho_{\varkappa_1})s} \end{pmatrix} \tag{70}$$

$$= W_2\,\mathfrak{d}_\nu \quad \text{mit} \quad \Delta(W_2) \neq 0.$$

Es wird also

$$W_1 = W_2 \cdot \sum_\nu \{W_2^{-1}((\Gamma+\Lambda_\nu)^0 W_2\,\mathfrak{d}_\nu; \dots; (\Gamma+\Lambda_\nu)^{\varkappa-1} W_2\,\mathfrak{d}_\nu)\} \tag{71}$$

$$= W_2 \cdot \sum_\nu (W_2^{-1}(\Gamma+\Lambda_\nu)^0 W_2\,\mathfrak{d}_\nu; \dots; W_2^{-1}(\Gamma+\Lambda_\nu)^{\varkappa-1} W_2\,\mathfrak{d}_\nu)$$

$$= W_2 \cdot W_3.$$

Dabei ist in

$$W_3 = \sum_\nu (\mathfrak{w}_1^\nu; \dots; \mathfrak{w}_\varkappa^\nu) = (\mathfrak{w}_1 \dots \mathfrak{w}_\varkappa)$$

$\mathfrak{w}_k$ gegeben durch

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{w}_k^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \begin{pmatrix} \Gamma_{11}+\Lambda_\nu & 0 & \dots & 0 \\ \Gamma_{21} e^{(\varrho_{\varkappa'}-\varrho_{\varkappa'-1})s} & \Gamma_{22}+\Lambda_\nu & \dots & 0 \\ \Gamma_{31} e^{(\varrho_{\varkappa'}-\varrho_{\varkappa'-2})s} & \Gamma_{32} e^{(\varrho_{\varkappa'-1}-\varrho_{\varkappa'-2})s} & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ \Gamma_{\varkappa' 1} e^{(\varrho_{\varkappa'}-\varrho_1)s} & \Gamma_{\varkappa' 2} e^{(\varrho_{\varkappa'-1}-\varrho_1)s} & \dots & \Gamma_{\varkappa'\varkappa'}+\Lambda_\nu \end{pmatrix}^{k-1} \right. \tag{72}$$

$$\left. \cdot \begin{pmatrix} c_1^\nu e^{(\Lambda_\nu - \varrho_{\varkappa'})s} \\ c_2^\nu e^{(\Lambda_\nu - \varrho_{\varkappa'-1})s} \\ c_3^\nu e^{(\Lambda_\nu - \varrho_{\varkappa'-2})s} \\ . \\ . \\ c_{\varkappa'}^\nu e^{(\Lambda_\nu - \varrho_1)s} \end{pmatrix} \right\}.$$

Nach (63) wissen wir nun, wenn hier bei einem Γ_{ik} eine Exponentialfunktion mit rein imaginärem $(\varrho_{\varkappa'+1-k} - \varrho_{\varkappa'+1-i})$ steht, daß dann $\Gamma_{ik} = 0$ ist. Weiter sind auch die $\mathfrak{c}_k^\nu = 0$, für die in dem dabeistehenden Exponentialausdruck $\Re(\Lambda_\nu - \varrho_{\varkappa'+1-k}) < 0$ ist. Andererseits verschwinden aber auch diejenigen $\mathfrak{c}_k^\nu$, für die

$$\Lambda_\nu - \varrho_{\varkappa'+1-k} \neq 0, \quad \text{aber} \quad \Re(\Lambda_\nu - \varrho_{\varkappa'+1-k}) = 0.$$

Denn entweder ist $\Lambda_\nu = \varrho_{\varkappa'+1-i}$, wobei $i \neq k$, dann ist $\mathfrak{c}_k^\nu = 0$ nach Definition (vgl. (51)). Oder aber es ist $\Lambda_\nu \neq \varrho_{\varkappa'+1-i}$ für $i = 1 \ldots \varkappa'$, dann ist aber nach (61) und (62)

$$\mathfrak{r}_\nu = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathfrak{r}_{k+1}^\nu \\ \vdots \\ \mathfrak{r}_{\varkappa'}^\nu \end{pmatrix},$$

also folgt nach (59) wieder $\mathfrak{c}_k^\nu = 0$.

Es ist daher

$$(73)\quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{w}_k^\nu = \left\{ \begin{pmatrix} \Gamma_{11} + \varrho_{\varkappa'} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \Gamma_{22} + \varrho_{\varkappa'-1} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \Gamma_{\varkappa'\varkappa'} + \varrho_{1'} \end{pmatrix}^{k-1} \begin{pmatrix} \bar{\mathfrak{d}}_1 \\ \bar{\mathfrak{d}}_2 \\ \cdot \\ \bar{\mathfrak{d}}_{\varkappa'} \end{pmatrix} \right\} + \ldots$$

wobei die $\bar{\mathfrak{d}}_i$ diejenigen $\mathfrak{c}_i^\nu$ sind, für die $\Lambda_\nu = \varrho_{\varkappa'+1-i}$ ist. Es ist also nach (51)

$$(74)\qquad \bar{\mathfrak{d}}_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Punkte in (73) vertreten die höheren Glieder einer Reihe mit komplexen Exponenten Λ_ν', die aus den Λ_ν durch Addition und Subtraktion der ϱ_i entstanden sind, und wobei diejenigen nicht auftreten, für die $\Re(\Lambda_\nu') \leqq 0$ außer für $\Lambda_0' = 0$; die Folge $\Re(\Lambda_\nu')$ besitzt im endlichen keinen Häufungswert.

Aus (73) folgt wegen (42) und (74):

$$W_3 = \sum_{\nu} (\mathfrak{w}_1^{\nu} \dots \mathfrak{w}_{\varkappa}^{\nu})$$

$$(75) \quad = \begin{vmatrix} 1 & \varrho_{\varkappa'} & \varrho_{\varkappa'}^2 & \varrho_{\varkappa'}^3 & \dots & \varrho_{\varkappa'}^{\varkappa-1} \\ 0 & 1 & 2\varrho_{\varkappa'} & 3\varrho_{\varkappa'}^2 & \dots & (\varkappa-1)\varrho_{\varkappa'}^{\varkappa-2} \\ 0 & 0 & 1 & 3\varrho_{\varkappa'} & \dots & \binom{\varkappa-1}{2}\varrho_{\varkappa'}^{\varkappa-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{\varkappa-1}{\mu_{\varkappa'}-1}\varrho_{\varkappa'}^{\varkappa-\mu_{\varkappa'}} \\ 1 & \varrho_{\varkappa'-1} & \varrho_{\varkappa'-1}^2 & \varrho_{\varkappa'-1}^3 & \dots & \varrho_{\varkappa'-1}^{\varkappa-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{\varkappa-1}{\mu_{\varkappa'-1}-1}\varrho_{\varkappa'-1}^{\varkappa-\mu_{\varkappa'-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & \varrho_1 & \varrho_1^2 & \varrho_1^3 & \dots & \varrho_1^{\varkappa-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{\varkappa-1}{\mu_1-1}\varrho_1^{\varkappa-\mu_1} \end{vmatrix} + \dots.$$

Wir bilden nun $\Delta(W_3)$. Es wird

$$(76) \qquad \Delta(W_3) = \sum_{\nu=0} d_\nu e^{\Lambda_\nu'' s}.$$

Dabei ist $d_0 \neq 0$, denn d_0 berechnet sich als Determinante des Anfangsgliedes von W_3. Nach (75) handelt es sich aber um eine „*Vandermonde*sche" Determinante, die von Null verschieden ist. Die Λ_ν'' erfüllen wieder die Voraussetzungen $\Re(\Lambda_\nu'') > 0$ für $\nu \neq 0$; kein endlicher Häufungswert der Folge $\Re(\Lambda_\nu'')$. Weiter können wir annehmen, daß die $\{\Lambda_\nu''\}$ mit $\Lambda_{\nu'}''$ und $\Lambda_{\nu''}''$ auch $\Lambda_{\nu'}'' + \Lambda_{\nu''}'' = \Lambda_{\nu'''}''$ enthalten.

Nach der Vorbemerkung können wir also die formale Reihe

$$\frac{1}{\Delta(W_3)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} e_\nu e^{\Lambda_\nu'' s}$$

bilden. Daher existiert auch die formale Reihe

$$W_3^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} E_\nu e^{\Lambda_\nu'' s}.$$

Multiplizieren wir mit dieser Reihe die Gleichung (68) von rechts, so wird

$$\mathfrak{A} W \cdot W_3^{-1} = \mathfrak{A} \cdot e^{\Gamma s} \cdot W_2 = 0.$$

Ist wie angenommen $\mathfrak{A} \neq 0$, so kann diese Gleichung nicht bestehen, denn es ist $\Delta(e^{r_i s}) \neq 0$ und nach (70) auch $\Delta(W_2) \neq 0$. Daher sind die $y_1 \ldots y_n$ linear unabhängig.

Wir haben nun unseren Satz in allen Stücken bewiesen, und wollen nun nur noch zeigen, *daß die n formalen Lösungen* (38) *der Differentialgleichung* (37)

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = 0 \tag{77}$$

auch linear unabhängig sind. (Man erhält die n Lösungen (38), indem man (77) nach § 3 reduziert: man gelangt zu einer Reihe von Polynomen p, die voneinander verschieden sind, und zu dazugehörigen Differentialgleichungen. Zu jedem p gehört eine Zahl $\varkappa$, die die Anzahl der dazugehörigen formalen Lösungen angibt. Für diese $\varkappa$ gilt aber nach (30): $\sum \varkappa_i = n$.)

Wir definieren: Es soll die formale Gleichung

$$\Phi(s) = 0 \quad \text{mit} \quad \Phi(s) = \sum_{m=1}^{M} e^{\int p_m ds} \varphi_m, \tag{78}$$

wobei die φ_m von der Gestalt (64) sind, bedeuten, daß

$$\varphi_m = 0, \qquad m = 1 \ldots M, \tag{79}$$

sofern die p_m Exponentialpolynome mit reellen negativen Exponenten und voneinander verschieden sind. Es sollen weiter n formale Ausdrücke $\Phi_i(s)$ dann und nur dann linear abhängig heißen, wenn es n Zahlen α_i, die nicht alle verschwinden, so gibt, daß

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi_i \alpha_i = 0. \tag{80}$$

Angenommen, es gebe n Zahlen α_i, so daß für die n Lösungen (38) gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\int p_i ds} \psi_i(s) = 0.$$

Wir dürfen annehmen $\alpha_1 \neq 0$ und mit geeignetem $\varkappa$: $p_1 = p_2 = \ldots p_\varkappa \neq p_i$ für $i > \varkappa$. Wegen (78) und (79) muß dann gelten

$$\sum_{i=0}^{\varkappa} \alpha_i \psi_i = 0.$$

Nach dem Zusatz ist das unmöglich, also sind die n Lösungen nicht linear abhängig.

Kapitel III.

Asymptotische Darstellung einer Lösung der Differentialgleichung n-ter Ordnung.

§ 1.

Aufstellung einer Vergleichsdifferentialgleichung.

Wir betrachten Differentialgleichungen der Gestalt

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} y^{(i)} a_{i+1} = 0. \tag{1}$$

Dabei seien die a_i Dirichletsche Reihen mit monoton gegen $+\infty$ wachsenden reellen Exponenten, von denen nur endlich viele negativ sein mögen. Die Gleichung der horizontalen Seite sei vom Grade $\varkappa > 0$ und habe lauter verschiedene Nullstellen, von denen eine Null sei, während die anderen keinen positiven Realteil besitzen mögen. Schließlich mögen die Nullstellen der Gleichungen der anderen Seiten, soweit sie nicht Null sind, einfach sein und negativen Realteil besitzen. Die Reihen a_i mögen eine Halbebene absoluter Konvergenz besitzen.

Wir werden in diesem Kapitel zeigen, daß diese Gleichung eine Lösung besitzt, die sich durch eine Dirichletsche Reihe mit reellen Exponenten asymptotisch darstellen läßt, für $s \to -\infty$; s reell.

Einleitend zeigen wir, daß unsere Gleichung eine *formale* Lösung besitzt. Wir schreiben dazu (1) in der folgenden Form:

$$\sum_{i=0}^{n} y^{(i)} \left(e^{\eta s} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{i\nu} e^{\lambda_\nu s}\right) = 0. \tag{2}$$

Dabei ist zu setzen

$$\eta = \operatorname*{Min}_{i=0\ldots n} (\Omega(a_{i+1})),$$

während

$$a_{n+1} = 1 = e^{\eta s} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n0}\, e^{\lambda_\nu s} = e^{\eta s} e^{-\lambda_N s}.$$

Schließlich sollen die $\{\lambda_\nu\}$ wieder mit $\lambda_{\nu'}$ und $\lambda_{\nu''}$ auch $\lambda_{\nu'''} = \lambda_{\nu'} + \lambda_{\nu''}$ enthalten. Wir setzen

$$y = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu e^{\lambda_\nu s}. \tag{3}$$

Soll (3) eine formale Lösung sein, so muß gelten

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{(\eta+\lambda_\nu)s} \sum_{\nu'=0}^{\nu} \sum_{\nu''=0}^{\nu} \{c_{\nu'} (\lambda_{\nu'})^i a_{i\nu''}\} \delta_{\lambda_{\nu'}+\lambda_{\nu''}}^{\lambda_\nu} = 0.$$

D. h. es muß sein

$$c_0 \cdot \sum_{i=0}^{n} (\lambda_0)^i a_{i0} = 0$$

und

$$c_\nu \sum_{i=0}^{n} (\lambda_\nu)^i a_{i0} = -\sum_{i=0}^{n} \sum_{\nu'=0}^{\nu} \sum_{\nu''=1}^{\nu} c_{\nu'} (\lambda_{\nu'})^i a_{i\nu''} \delta_{\lambda_{\nu'}+\lambda_{\nu''}}^{\lambda_\nu} \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots.$$

Da nun die Gleichung der horizontalen Seite

$$\sum_{i=0}^{n} \varrho^i a_{i0} = \sum_{i=0}^{\varkappa} \varrho^i a_{i0} = 0 \tag{4}$$

für $\varrho = 0$ eine Nullstelle besitzt, so kann c_0 beliebig gewählt werden. Da weiter (4) nur Wurzeln besitzt, die keinen positiven Realteil haben, und da $\lambda_\nu > 0$ für $\nu > 0$, so können die c_ν der Reihe nach berechnet werden.

Wir werden zeigen, daß diese formale Reihe die asymptotische Darstellung einer Lösung ist für $s \to -\infty$. Im letzten Paragraphen dieses

Kapitels werden wir untersuchen, ob und wann mit Hilfe der Reduktionen des Kapitels II, § 2 und 3 eine Differentialgleichung so umgestaltet werden kann, daß unsere Voraussetzungen erfüllt sind.

Wir bemerken noch, daß der folgende Beweis auch gültig bleibt, wenn die a_i nicht durch absolut konvergente Reihen gegeben sind, sondern durch die Reihen nur *asymptotisch* für $s \to -\infty$ dargestellt werden.

Wir zeichnen nun das Newton-Diagramm für (1). Wir verwenden dazu die Zahlenpaare

$$(i; \Omega(a_i)) \quad i = 1 \ldots n; \quad (n+1; 0) \quad \text{und} \quad (1; \operatorname{Min}(0, \operatorname{Min} \Omega(a_i)))$$

und verfahren wie bisher. Durch die geänderte Zählung ist unser Polygon jedoch nach rechts verschoben.

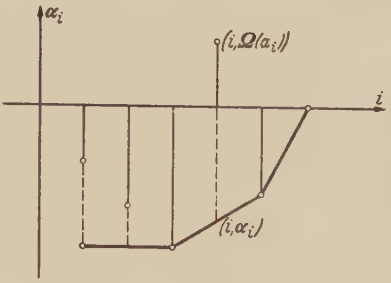


Fig. 8.

Die wahren Koordinaten für ganzzahliges $i = 1, \ldots, n+1$ dieses Polygonzuges nennen wir $(i; \alpha_i)$. Damit schreiben wir unsere Reihen in der Form (die λ_ν sind gegenüber (2) geändert):

$$a_i = e^{\omega_i s} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{i\nu} e^{\lambda_\nu s}. \tag{5}$$

Es ist somit

$$a_{i0} = 0$$

für alle i, für die

$$\Omega(a_i) > \alpha_i,$$

für die also $(i; \Omega(a_i))$ nicht auf dem Polygon liegt.

Wir wollen nun eine Vergleichsdifferentialgleichung aufstellen, die mit unserer Gleichung die Zahlen a_{i0} und α_i gemeinsam hat, im übrigen aber n bekannte einfachere Funktionen zur Lösung hat.

Wir wählen dazu die n Funktionen

$$z_i = e^{\eta_i s} \qquad \text{für } i = 1 \ldots \varkappa,$$

$$z_i = e^{\frac{p_i e^{\omega_i s}}{\omega_i}} \qquad \text{für } i = \varkappa + 1 \ldots n.$$

Dabei sollen die

$$\omega_i = \frac{\alpha_i - \alpha_{i+1}}{i+1-i} < 0$$

sein.

Wir wählen für die q_i die $\varkappa$ verschiedenen Nullstellen der Gleichung der horizontalen Seite

$$\sum_{i=0}^{\varkappa} a_{i+1\,0} \varrho^i = 0.$$

Insbesondere sei

$$q_1 = 0. \tag{6}$$

Für die p_i setzen wir die von Null verschiedenen Wurzeln der Gleichungen der anderen Seiten, so daß bei jedem ω_i gerade die dazugehörigen Wurzeln stehen. Gehören zu einer Seite z. B. die Zahlen

$$\omega_{i_1} = \alpha_{i_1} - \alpha_{i_1+1} = \cdots = \omega_{i_2} = \alpha_{i_2} - \alpha_{i_2+1}$$

und die Gleichung

$$\sum_{i=i_1-1}^{i_2} a_{i+1\,0}\,\varrho^i = 0$$

mit den Wurzeln

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \cdots = \varrho_{i_1-1} = 0;\ \varrho_{i_1};\ \varrho_{i_1+1} \cdots \varrho_{i_2},$$

so soll sein

$$p_{i_1} = \varrho_{i_1};\ p_{i_1+1} = \varrho_{i_1+1} \cdots p_{i_2} = \varrho_{i_2}.$$

Die so definierten n Funktionen sollen die Lösungen einer linearen Vergleichsdifferentialgleichung n-ter Ordnung werden. Wir können zusammenfassen

$$z_i = e^{\frac{1}{\omega_i}\, p_i\, e^{\omega_i s} + q_i s}, \qquad i = 1 \ldots n,$$

indem wir die nicht erklärten Zahlen ergänzen:

(7) $$q_i = 0 \quad \text{für} \quad i > \varkappa \quad \text{und} \quad \frac{p_i}{\omega_i} = 0 \quad \text{für} \quad i \leqq \varkappa.$$

Wir definieren die Matrix

(8) $$Z = (z_i^{(k-1)})$$

und bedienen uns der bequemeren Matrizenschreibweise. Ist

$$\Delta(Z) \neq 0,$$

so läßt sich die Matrixdifferentialgleichung

(9) $$Z' = ZB$$

aufstellen. Dazu muß also sein

$$B = Z^{-1} Z' = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & -b_1 \\ 1 & 0 & . & . & 0 & 0 & -b_2 \\ 0 & 1 & . & . & 0 & 0 & -b_3 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 1 & 0 & -b_{n-1} \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 1 & -b_n \end{Vmatrix}.$$

Nun ist

$$Z = \left(e^{\frac{p_i e^{\omega_i s}}{\omega_i} + q_i s}\, \delta_j^i\right)(v_{jk})$$

und

$$Z' = \left(e^{\frac{p_i e^{\omega_i s}}{\omega_i} + q_i s}\, \delta_j^i\right)(v_{jk+1}),$$

sofern die

$$v_{jk} \qquad (j = 1 \ldots n;\ k = 1 \ldots n+1)$$

geeignete Exponentialpolynome sind.

Es wird daher

$$B = (v_{jk})^{-1}\,(v_{jk+1}).$$

Am Schluß dieses Paragraphen werden wir beweisen, daß $\Delta\,(v_{ik})$ ein Exponentialpolynom mit nur reellen Exponenten ist, das nicht identisch verschwindet. Es gibt daher eine linke Halbebene, in der

$$\Delta\,(v_{ik}) = e^{s\cdot\Omega\,(\Delta\,(v_{ik}))}\cdot\sum_{\nu=0}^{N} d_\nu e^{\lambda_{\Delta\nu}\,s}$$

keine Nullstellen besitzt. Daher ist

$$\frac{1}{\Delta\,(v_{ik})} = e^{-s\,\Omega\,(\Delta\,(v_{ik}))}\cdot\sum e^{\lambda_{\Delta^{-1}\nu}\,s}\,d'_\nu$$

eine Dirichletsche Reihe mit einer Halbebene absoluter Konvergenz. Die $\lambda_{\Delta^{-1}\nu}$ sind dabei reell, positiv und wachsen monoton gegen $+\infty$.

Demnach sind die b_i Dirichletsche Reihen mit einer linken Halbebene absoluter Konvergenz und nur endlich vielen negativen Exponenten, und wir können entsprechend den Vorschriften für die a_i in (5) schreiben

$$b_i = e^{\beta_i\,s}\sum_{\nu=0}^{\infty} e^{\lambda_{b\nu}\,s}\,. \tag{10}$$

Die $\lambda_{b\nu}$ sind reell, positiv und wachsen monoton gegen $+\infty$. (9) ist gleichbedeutend mit

$$z^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} z^{(k)}\,b_{k+1} = 0. \tag{11}$$

Wir setzen nun, um (11) mit (1) zu vergleichen, mit einem der $\omega_i \neq 0$; $p_i;\ q_i = 0$ indem wir den Index i fortlassen

$$z = e^{\frac{p\,e^{\omega\,s}}{\omega}}\,x. \tag{12}$$

Es gilt dann

$$z^{(k)} = e^{\frac{p\,e^{\omega\,s}}{\omega}}\sum_{\nu=0}^{k} x^{(k-\nu)}\left\{p^\nu e^{\nu\,\omega\,s}\binom{k}{\nu} + \ldots\right\}.$$

Nach (12) und (11) gilt dann für x die Gleichung

$$x^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} x^{(i)}\,c_{i+1} = 0. \tag{13}$$

Dabei ist, sofern $b_{n+1} = 1$ gesetzt wird,

$$c_1 = \sum_{j=0}^{n} b_{j+1}\,\{p^j e^{j\omega s} + \ldots\}, \tag{14}$$

während für $i > 1$ gilt

(15) $$\Omega(c_i) > \underset{k=1\ldots n+1}{\text{Min}} (k\omega + \beta_k).$$

Nun soll aber $x = 1$ eine Lösung von (13) sein. Das ist nur dann möglich, wenn die Gleichung der horizontalen Seite für (13) höheren als nullten Grades ist. Wegen (15) muß daher gelten

$$\Omega(c_1) > \underset{k=1\ldots n+1}{\text{Min}} (k\omega + \beta_k).$$

Wenn aber das durch (14) gegebene c_1 dieser Bedingung genügen soll, so muß für mindestens zwei Zahlen i^* gelten

$$\Omega(p^{i^*} e^{i^*\omega s} b_{i^*+1}) = \underset{k=1\ldots n+1}{\text{Min}} k\omega + \beta_k.$$

Das heißt aber, eine Seite des Newton-Polygons für (11) steigt unter einem Winkel φ an, für den

$$\text{tg}\ \varphi = -\omega.$$

Sind weiter i^* diejenigen i, für die das Minimum erreicht wird, so gilt

$$\sum_{i^*} p^{i^*} b_{i^*0} = 0.$$

p ist daher eine Wurzel der Gleichung der zu ω gehörenden Seite im Newton-Polygon für (11).

Dasselbe gilt entsprechend für alle anderen $\omega_i \neq 0$ und p_i.

Da nun weiter (11) $\varkappa$ formale Lösungen $e^{q_i s}$; $i \leqq \varkappa$ besitzt, so muß die Gleichung der horizontalen Seite von (11) nach Kapitel II, § 1 (4) die Wurzeln q_i $(i = 1 \ldots \varkappa)$ haben.

Da nun die Anzahl der Wurzeln der Gleichung der horizontalen Seite, vermehrt um die Anzahl der von Null verschiedenen Wurzeln der Gleichungen der übrigen Seiten, die Zahl n ergeben muß, da andererseits diese n Wurzeln für (11) bekannt sind, so sind die Koeffizienten sämtlicher Gleichungen für (11) bekannt bis auf einen längs jeder Seite bekannten Faktor. Es wird

$$b_{i0} = g_i a_{i0},$$

wobei g_i längs jeder Seite konstant ist, denn der Grad einer der Seitengleichungen ist gleich der Anzahl der nicht von Null verschiedenen Wurzeln der nächststeileren Seite.

Beginnt man mit dem kleinsten ω_i, also mit der steilsten Seite, so ist längs dieser Seite $\alpha_i = \beta_i$ und $g_i = 1$, denn $b_{n+10} = a_{n+10} = 1$. Dadurch ist aber auch der höchste Koeffizient der nächsten Gleichung für (11) und (1) als übereinstimmend erkannt. Es wird wieder $g_i = 1$ usw. Es wird also für alle $i = 1 \ldots n+1$

(16) $$b_{i0} = a_{i0} \quad \text{und} \quad \alpha_i = \beta_i.$$

Als nächstes wollen wir den zurückgestellten Nachweis bezüglich $\Delta(v_{ik})$ *erbringen und dabei* $\Omega(\Delta(v_{ik}))$ *berechnen.* Es ist

$$Z = (z_i^{(k-1)}) = \left(\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} e^{\frac{p_i e^{\omega_i s}}{\omega_i} + q_i s}\right) = (z_i \cdot v_{ik}).$$

Es ergibt sich daher

für $i \leqq \varkappa$: $v_{i1} = 1$; $v_{i2} = q_i$; $v_{i3} = q_i^2$; ...

für $i > \varkappa$: $v_{i1} = 1$; $v_{i2} = p_i e^{\omega_i s}$; $v_{i3} = p_i^2 e^{2\omega_i s} + p_i e^{\omega_i s} \cdot \omega_i$; ....

$\Delta(v_{ik})$ ist also ein Exponentialpolynom mit reellen Exponenten.

Um zu zeigen, daß $\Delta(v_{ik})$ nicht identisch verschwindet, berechnen wir $\Omega(\Delta(v_{ik}))$. Es ist nun

$$v_{ik} = q_i^{k-1} \qquad \text{für } i \leqq \varkappa,$$

$$v_{ik} = p_i^{k-1} e^{(k-1)\omega_i s} + \ldots \qquad \text{für } i > \varkappa.$$

Für $i > \varkappa$ ist v_{ik} ein Polynom in $p_i e^{\omega_i s}$, dessen höchste Potenz den angegebenen Koeffizienten besitzt, und das der folgenden Rekursionsformel genügt (vgl. II., § 2, B.):

$$v_{ik} = \left(p_i e^{\omega_i s} + \frac{d}{ds}\right) v_{i\,k-1}.$$

Es ist nun $\Delta(v_{ik})$ gegeben durch eine Summe von Produkten

$$\Delta(v_{ik}) = \Sigma \pm \prod_{i=1}^{n} v_{i\,k_i},$$

wobei in $\prod_{i=1}^{n} v_{i\,k_i}$

$$k_i \neq k_{i'} \quad \text{für} \quad i \neq i'.$$

Es ist

$$\Omega(\Delta(v_{ik})) \geqq \operatorname{Min} \Omega\left(\prod_{i=1}^{n} v_{i\,k_i}\right). \tag{17}$$

Dabei steht das $>$-Zeichen nur dann, wenn dieses Minimum von mehreren Produkten erreicht wird, und die zu diesem Anfangsexponenten gehörenden Koeffizienten sich bei der Summierung zu Null ergänzen. Zur Bestimmung von $\operatorname{Min} \Omega\left(\prod_{i=1}^{n} v_{i\,k_i}\right)$ und zur Berechnung der Summe der Anfangskoeffizienten kann man sich aber auf die Determinante $\Delta(V^0)$ der Anfangsglieder der Matrix $V = (v_{ik})$ beschränken. V^0 ist gegeben durch

$$v_{ik}^0 = q_i^{k-1} \qquad \text{für} \quad i \leqq \varkappa,$$

$$v_{ik}^0 = p_i^{k-1} e^{\omega_i (k-1) s} \qquad \text{für} \quad i > \varkappa. \tag{18}$$

Wir zeigen zunächst

$$\Omega\left(\prod_{i} v_{i\,k_i}^0\right) \geqq \Omega\left(\prod_{i} v_{ii}^0\right).$$

Das bedeutet, daß das Minimum in der Hauptdiagonale erreicht wird.

Es möge in $\prod v^0_{i\,k_i}$

$$k_i = i \quad \text{für} \quad i > i_0; \quad i_0 \leqq n$$

und

$$k_i \neq i \quad \text{für} \quad i = i_0.$$

Es ist also $k_{i_0} < i_0$, weiter gibt es ein $i_1 < i_0$, für das $k_{i_1} = i_0$. Dann wird

$$\begin{aligned}
\Omega\Big(\prod v^0_{i\,k_i}\Big) &= \Omega\Big[\Big(\prod_{i=1}^{i_0} v^0_{i\,k_i}\Big)\cdot\Big\{\prod_{i=i_0+1}^{n} v^0_{i\,i}\Big\}\Big] \\
&= \sum_{i=1}^{i_1-1}\omega_i(k_i-1) + \omega_{i_1}(i_0-1) + \sum_{i=i_1+1}^{i_0}\omega_i(k_i-1) + \Big\{\sum_{i=i_0+1}^{n}\omega_i(i-1)\Big\} \\
&= \sum_{i=1}^{i_1-1}\omega_i(k_i-1) + \omega_{i_1}(k_{i_0}-1) + \sum_{i=i_1+1}^{i_0-1}\omega_i(k_i-1) + \Big\{\sum_{i=i_0}^{n}\omega_i(i-1)\Big\} \\
&\quad + (i_0-k_{i_0})(\omega_{i_1}-\omega_{i_0}) \\
&\geqq \sum_{i=1}^{i_1-1}\omega_i(k_i-1) + \omega_{i_1}(k_{i_0}-1) + \sum_{i=i_1+1}^{i_0-1}\omega_i(k_i-1) + \Big\{\sum_{i=i_0}^{n}\omega_i(i-1)\Big\} \\
&= \Omega\Big[\Big(\prod_{i=1}^{i_1-1} v^0_{i_1\,k_i}\Big)\cdot v^0_{i_1\,k_{i_0}}\cdot\Big(\prod_{i=i_1+1}^{i_0-1} v^0_{i\,k_i}\Big)\cdot\Big\{\prod_{i=i_0}^{n} v^0_{i\,i}\Big\}\Big].
\end{aligned}$$

Durch wiederholte Anwendung des Verfahrens läßt sich also zeigen

$$\Omega\Big(\prod_i v^0_{i\,k_i}\Big) \geqq \Omega\Big(\prod_i v^0_{i\,i}\Big).$$

Nun ist

$$\Omega\Big(\prod_i v^0_{i\,i}\Big) = \sum_{i=\varkappa+1}^{n}(i-1)\,\omega_i = \sum_{i=1}^{n}(i-1)\,\omega_i,$$

denn für $i \leqq \varkappa$ ist $v^0_{i\,i} = q_i^{i-1}$, also $\Omega(v^0_{i\,i}) = 0 = \omega_i(i-1)$, und für $i > \varkappa$ ist $v^0_{i\,i} = p_i^{i-1}\,e^{(i-1)\omega_i s}$, also $\Omega(v^0_{i\,i}) = \omega_i(i-1)$. Demnach

$$\operatorname{Min}\Big(\Omega\Big(\prod v_{i\,k_i}\Big)\Big) = \operatorname{Min}\Big(\Omega\Big(\prod v^0_{i\,k_i}\Big)\Big) = \sum_{i=1}^{n}\omega_i(i-1).$$

Andererseits ist

$$\Delta(V^0) = \prod_{j_1>j_2}\left(p_{j_1}e^{\omega_{j_1}s} + q_{j_1} - p_{j_2}e^{\omega_{j_2}s} - q_{j_2}\right). \tag{19}$$

Denn es ist

$$\Delta(V^0) = \Delta(v^0_{i\,k}) = \Delta\big((v^0_{i\,2})^{k-1}\big).$$

Eine Determinante $\Delta(\zeta_i^{k-1})$ hat aber den Wert $\prod_{j_1>j_2}(\zeta_{j_1} - \zeta_{j_2})$. Daher ist

$$\Delta(V^0) = \prod_{j_1>j_2}(v_{j_1 2} - v_{j_2 2}).$$

Nach (7) ergibt sich also die angegebene Formel (19). Es wird also

$$\Delta(V^0) = e^{s\sum_{i=\varkappa+1}^{n}\omega_i(i-1)}\Big\{\prod_{\varkappa\geqq j_1>j_2}(q_{j_1}-q_{j_2})\cdot\prod_{j>\varkappa}p_j^{\varkappa}\cdot\prod_{j_1>j_2>\varkappa}\left(p_{j_1}-p_{j_2}\,\delta^{\omega_{j_1}}_{\omega_{j_2}}\right)\Big\} + \ldots.$$

Nun ist

$$q_{j_1} - q_{j_2} \neq 0 \quad \text{für} \quad j_2 < j_1 \leqq \varkappa,$$
$$p_j \neq 0 \quad \text{für} \quad j > \varkappa,$$
$$p_{j_1} - p_{j_2}\, \delta^{(\omega)}_{\omega_{j_2}} \neq 0 \quad \text{für} \quad j_1 > j_2 > \varkappa.$$

Der Koeffizient von $e^{\left\{\operatorname{Min} \Omega\left(\prod_i v_{i\,k_i}\right)\right\} s}$ in $\Delta(V^0)$ ist also von Null verschieden.

Daher steht in (17) das $=$-Zeichen, und es ist

$$\Omega(\Delta(V)) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i (i-1). \tag{20}$$

Insbesondere folgt, daß

$$\Delta(V) \neq 0,$$

denn sonst wäre $\Omega(\Delta(V)) = +\infty$.

§ 2.

Asymptotische Darstellung.

Wir kehren zu der Differentialgleichung (1) des § 1 zurück.

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} y^{(i)} a_{i+1} = 0. \tag{21}$$

Wir wollen zeigen, daß die Reihe (3) *unter den am Anfang des* § 1 *angegebenen Voraussetzungen die asymptotische Darstellung einer Lösung ist für* $s \to -\infty$.

Wir dürfen dabei in (3) setzen: $c_0 = 1$. (21) kann geschrieben werden

$$\mathfrak{Y}' = \mathfrak{Y} A, \tag{22}$$

wobei

$$\mathfrak{Y} = (y\ y'\ \ldots\ y^{(n-1)})$$

und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & -a_1 \\ 1 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & 0 & 0 & -a_3 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 1 & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 1 & -a_n \end{pmatrix}.$$

Wir bilden die Vergleichsdifferentialgleichung des § 1

$$Z' = ZB.$$

Diese Differentialgleichung wird durch die im § 1 (8) angegebene Matrix Z gelöst. Insbesondere ist nach (6)

$$z_{11} = 1. \tag{23}$$

Wir stellen eine Folge $\mathfrak{Y}_\nu$ auf derart, daß

(24) 1. $\mathfrak{Y}_\nu \to (1\,0 \ldots 0)$ für $s \to -\infty$, $\nu \geqq 1$,

(25) 2. $\mathfrak{Y}_\nu' = \mathfrak{Y}_\nu B + \mathfrak{Y}_{\nu-1}(A - B)$,

(26) 3. $\mathfrak{Y}_0 = 0$.

Löst man die inhomogene Gleichung für $\mathfrak{Y}_\nu$ durch Variation der Konstanten, so findet man

$$(27)\quad \mathfrak{Y}_\nu = \Big\{ \int_{-\infty}^{s} \mathfrak{Y}_{\nu-1}(\sigma)\,(A(\sigma) - B(\sigma))\,Z^{-1}(\sigma)\,Z(s)\,d\sigma + \mathfrak{C}Z(s) \Big\}.$$

Dabei ist

$$\mathfrak{C} = (1\,0 \ldots 0)$$

zu setzen. Also wird nach (23)

$$\mathfrak{C}Z = \mathfrak{C}.$$

Es muß gezeigt werden, daß das Integral (27) existiert.

Wir wollen dazu und zugleich mit Rücksicht auf spätere Anwendungen die folgende Abschätzung durchführen.

Es sei

$$(28)\quad \mathfrak{U}^1(s) = \int_{-\infty}^{s} \mathfrak{U}(\sigma)\,R(\sigma)\,Z^{-1}(\sigma)\,Z(s)\,d\sigma.$$

Dabei sei in $\mathfrak{U} = (u_1 \ldots u_n)$

$$|u_k(s)| \leqq K_1 e^{(\eta + \sum_{\iota=1}^{k-1} \omega_\iota)\,s} \quad \text{mit} \quad \eta \geqq 0 \quad \text{für} \quad s \leqq s_1$$

$\sum_{\iota=1}^{0} \omega_\iota$ *soll hier und hinfort Null gesetzt werden. Weiter sei*

$$R(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & . & 0 & r_1(s) \\ 0 & 0 & . & . & 0 & r_2(s) \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 & r_{n-1}(s) \\ 0 & 0 & . & . & 0 & r_n(s) \end{pmatrix}$$

mit

$$|r_i(s)| \leqq K_2 e^{(\delta + \sum_{\iota=i}^{n} \omega_\iota)\,s} \quad \textit{für } s \leqq s, \quad \textit{wobei} \quad \delta > 0.$$

(N. B. $A - B$ erfüllt die Voraussetzungen für R, sofern s_1 und δ geeignet gewählt werden, denn nach (16) beginnen die Reihen für die $a_i - b_i$ mit einem höheren Exponenten als $\sum_{\iota=i}^{n} \omega_\iota = \alpha_i$.)

Wir wollen zeigen, daß das Integral für $\mathfrak{U}^1 = (u_1^1 \ldots u_n^1)$ *existiert, und daß*

$$(29)\quad |u_i^1| \leqq K_1 \cdot K_3 \cdot e^{(\eta + \delta + \sum_{\iota=1}^{i-1} \omega_\iota)\,s} \quad \textit{für} \quad s \leqq s_2 = \mathrm{Min}(s_1 s_3).$$

Dabei ist K_3 *und* s_3 *unabhängig von* $\mathfrak{U}$.

Es wird zunächst

$$|u_i \cdot r_i| \leqq K_1 K_2 e^{(\eta + \delta + \sum_{\iota=1}^{n} \omega_\iota) s} \quad \text{für} \quad s \leqq s_1.$$

Weiter

$$Z = W \cdot V$$

mit

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & e^{q_2 s} & . & 0 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & e^{q_\varkappa s} & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & e^{\frac{p_{\varkappa+1} e^{\omega_{n+1} s}}{\omega_{\varkappa+1}}} & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 & . & e^{\frac{p_n e^{\omega_n s}}{\omega_n}} \end{pmatrix}$$

und

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 1 & q_2 & q_2^2 & . & . & q_2^{n-1} \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & q_\varkappa & q_\varkappa^2 & . & . & q_\varkappa^{n-1} \\ 1 & p_{\varkappa+1} e^{\omega_{\varkappa+1} s} & (p_{\varkappa+1}^2 e^{2\omega_{\varkappa+1} s} + \ldots) & . & . & (p_{\varkappa+1}^{n-1} e^{(n-1)\omega_{\varkappa+1} s} + \ldots) \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & p_n e^{\omega_n s} & (p_n^2 e^{2\omega_n s} + \ldots) & . & . & (p_n^{n-1} e^{(n-1)\omega_n s} + \ldots) \end{pmatrix}.$$

Setzen wir $V^{-1} = Q$, so wird

$$\mathfrak{U}^1(s) = \int_{-\infty}^{s} \mathfrak{U}(\sigma) R(\sigma) Q(\sigma) W^{-1}(\sigma) W(s) V(s) d\sigma. \tag{30}$$

Hierbei ist W^{-1} leicht zu bestimmen. $Q = V^{-1}$ muß jedoch berechnet werden. Dabei können wir uns auf die letzte Zeile von Q beschränken, denn bei der Multiplikation $R \cdot Q$ werden nur die Elemente der letzten Zeile von Q gebraucht. Für $\Delta(V)$ haben wir bereits gefunden

$$\Omega(\Delta(V)) = \sum_{\iota=1}^{n} \omega_\iota (\iota - 1).$$

Weiter ist $\frac{1}{\Delta(V)}$ eine für $s \leqq s_3$ absolut konvergente Dirichletsche Reihe, sofern s_3 entsprechend gewählt wird. Zur Berechnung von $Q = (q_{ik})$ müssen wir also nur noch die zu den Elementen der letzten Spalte von $\Delta(V)$ adjungierten Unterdeterminanten Δ_{in} abschätzen. Diese $n-1$-reihigen Unterdeterminanten sind vom gleichen Typus wie $\Delta(V)$ selber. Sie lassen sich also genau wie $\Delta(V)$ berechnen, und es wird

$$\Omega(\Delta_{in}) = \sum_{\iota=1}^{i-1} \omega_\iota (\iota - 1) + \sum_{\iota=i+1}^{n} \omega_\iota (\iota - 2).$$

Also wird

$$\Omega(q_{ni}) = (1-i)\,\omega_i - \sum_{\iota=i+1}^{n} \omega_\iota .$$

Daher gibt es eine Zahl K_4, so daß für $s \leqq s_3$

$$|q_{ni}^{(s)}| \leqq K_4\, e^{\{(1-i)\,\omega_i - \sum_{\iota=i+1}^{n} \omega_\iota\}\, s} .$$

Schließlich wird noch mit geeignetem K_5

$$|v_{ik}| \leqq K_5\, e^{\omega_i (k-1)\, s} \qquad \text{für } s \leqq s_3 .$$

Es wird nun für $s \leqq s_2 = \operatorname{Min}(s_1; s_3)$ und $k \leqq n$

$$u_k^1 = \sum_{j=1}^{n} I_{jk} \tag{31}$$

mit

$$I_{jk} = \int_{-\infty}^{s} \{ \sum_{i=1}^{n} u_i(\sigma)\, r_i(\sigma)\, q_{nj}(\sigma)\, e^{\omega_j (s-\sigma)}\, v_{jk}(s)\, d\sigma \qquad \text{für } j \leqq \varkappa \tag{32}$$

und

$$I_{jk} = \int_{-\infty}^{s} \{ \sum_{i=1}^{n} u_i(\sigma)\, r_i(\sigma)\, q_{nj}(\sigma)\, e^{\omega_j} \frac{p_j}{(e^{\omega_j s} - e^{\omega_j \sigma})}\, v_{jk}(s)\, d\sigma \quad \text{für } j > \varkappa . \tag{33}$$

Für $j \leqq \varkappa$ wird für $s \leqq s_2$

$$|I_{jk}| \leqq \int_{-\infty}^{s} n \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot e^{(\eta + \delta + \sum_{\iota=1}^{n} \omega_\iota)\sigma} \cdot K_4 \cdot e^{\{(1-j)\,\omega_j - \sum_{\iota=j+1}^{n} \omega_\iota\}\,\sigma} \cdot e^{\Re(q_j)(s-\sigma)} \cdot K_5\, e^{\omega_j (k-1)\, s}\, d\sigma .$$

Nun hatten wir festgesetzt $\eta \geqq 0$ und $\delta > 0$. Nach unseren Voraussetzungen über die Wurzeln der Gleichung der horizontalen Seite ist $-\Re(q_j) \geqq 0$. Weiter ist $\omega_j = 0$ und

$$\sum_{\iota=1}^{n} \omega_\iota + (1-j)\,\omega_j - \sum_{\iota=j+1}^{n} \omega_\iota = 0$$

wegen $j \leqq \varkappa$. Endlich ist $e^{\Re(q_j)(s-\sigma)} \leqq 1$ für $\sigma \leqq s \leqq s_2$. I_{jk} existiert also, und es wird

$$\begin{aligned} |I_{jk}| &\leqq n \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot K_4 \cdot K_5 \cdot \int_{-\infty}^{s} e^{(\eta+\delta)\sigma}\, d\sigma \\ &\leqq \frac{n \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot K_4 \cdot K_5}{\eta + \delta}\, e^{(\eta+\delta)s} \\ &\leqq \frac{n}{\delta} \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot K_4 \cdot K_5 \cdot e^{(\eta+\delta)s} . \end{aligned} \tag{34}$$

Es sei jetzt $j > \varkappa$ und wieder $s \leqq s_2$. Es ist p_j für $j > \varkappa$ die Wurzel der Gleichung einer Seite, für die die Steigung $\omega_j\ (= -\operatorname{tg}\varphi) < 0$; daher ist nach unseren Voraussetzungen $\Re(p_j) < 0$. Also wird wegen

$$\frac{\Re(p_j)}{\omega_j} > 0 \qquad (j > \varkappa)$$

gelten

$$|I_{jk}| \leqq \int_{-\infty}^{s} n \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot e^{(\eta + \delta + \sum_{\iota=1}^{n} \omega_\iota)\sigma}$$

$$\cdot K_4 e^{\{(1-j)\omega_j - \sum_{\iota=j+1}^{n} \omega_\iota\}\sigma} \frac{(-\Re(p_j))\, e^{\omega_j \sigma}}{(-\Re(p_j))\, e^{\omega_j \sigma}} \cdot e^{\frac{\Re(p_j)}{\omega_j}\{e^{\omega_j s} - e^{\omega_j \sigma}\}} \cdot K_5 e^{\omega_j (k-1) s}\, d\sigma.$$

Nun ist

$$\{\sum_{\iota=1}^{n} \omega_\iota\} + (1-j)\omega_j - \{\sum_{\iota=j+1}^{n} \omega_\iota\} - \omega_j = \sum_{\iota=1}^{j-1} (\omega_\iota - \omega_j) \geqq 0,$$

denn $\omega_j \leqq \omega_\iota$ für $\iota < j$. Daher wird

$$|I_{jk}| \leqq e^{\{\eta + \delta + \sum_{\iota=1}^{j-1} (\omega_\iota - \omega_j)\} s + (k-1)\omega_j s} \cdot n \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot K_4 \cdot K_5 \left| \frac{1}{-\Re(p_j)} \right|$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{s} \frac{d}{d\sigma} e^{\frac{\Re(p_j)}{\omega_j}\{e^{\omega_j s} - e^{\omega_j \sigma}\}}\, d\sigma.$$

Das Integral hat den Wert 1. Man kann nun auch bestätigen, daß das Integral für I_{jk} existiert. Es wird weiter

$$|I_{jk}| \leqq n \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot K_4 \cdot K_5 \left| \frac{1}{-\Re(p_j)} \right| e^{\{\eta + \delta + \sum_{\iota=1}^{j-1} (\omega_\iota - \omega_j) + (k-1)\omega_j\} s}. \tag{35}$$

(34) und (35) lassen sich zusammenfassen zu

$$|I_{jk}| \leqq K_1 e^{\eta s} \cdot \frac{K_3}{n} \cdot e^{\{\delta + \sum_{\iota=1}^{j-1} (\omega_\iota - \omega_j) + (k-1)\omega_j\} s} \qquad (j = 1 \ldots n), \tag{36}$$

sofern

$$\frac{K_3}{n} \geqq \operatorname{Max}\left(\left\{ n \cdot K_2 \cdot K_4 \cdot K_5 \left| \frac{1}{-\Re(p_j)} \right| \right\}; \left\{ n \cdot K_4 \cdot K_2 \cdot K_5 \cdot \frac{1}{\delta} \right\} \right) \tag{37}$$

ist, denn für $j \leqq \varkappa$ ist

$$\sum_{\iota=1}^{j-1} (\omega_\iota - \omega_j) + (k-1)\omega_j = 0.$$

Nachdem wir die einzelnen Integrale (31) abgeschätzt haben, können wir daran gehen (29) zu beweisen. Es ist für $j < k$

$$\sum_{\iota=1}^{j-1} (\omega_\iota - \omega_j) + (k-1)\omega_j = \sum_{\iota=1}^{k-1} \omega_\iota - \sum_{\iota=j}^{k-1} \omega_\iota + (k-j)\omega_j \tag{38}$$

$$= \sum_{\iota=1}^{k-1} \omega_\iota + \sum_{\iota=j}^{k-1} (\omega_j - \omega_\iota) \geqq \sum_{\iota=1}^{k-1} \omega_\iota,$$

denn $\omega_j - \omega_\iota \geqq 0$ für $j \leqq \iota$, da die $(-\omega_i)$ ja Steigungen der Seiten unseres Newton-Polygons, also eines konvexen Polygonzuges sind.

Andererseits ist für $j \geqq k$

$$(39) \qquad \sum_{\iota=1}^{j-1}(\omega_\iota - \omega_j) + (k-1)\omega_j = \sum_{\iota=1}^{j}(\omega_\iota - \omega_j) + (k-1)\omega_j$$
$$= \sum_{\iota=1}^{k-1}\omega_\iota + \sum_{\iota=k}^{j}(\omega_\iota - \omega_j) \geqq \sum_{\iota=1}^{k-1}\omega_\iota,$$

denn $\omega_\iota - \omega_j \geqq 0$ für $j \geqq \iota$.

Also wird nach (31), (36), (38) und (39)

$$\left|u_k^1\right| \leqq \sum_{j=1}^{n}\left|I_{jk}\right| \leqq K_1 e^{(\eta + \sum_{\iota=1}^{k-1}\omega_\iota)s} \cdot K_3 e^{\vartheta s} \quad \text{für} \quad s \leqq s_2 = \operatorname{Min}(s_1 s_3).$$

Dabei ist s_3 dadurch gegeben, daß die Reihe für $\frac{1}{\Delta(V)}$ für $s \leqq s_3$ absolut konvergieren soll. Schließlich ist K_3 unabhängig von $\mathfrak{U}$ durch (37) gegeben. Es sind also alle Behauptungen bei (29) bezüglich (28) bewiesen.

Wir können jetzt *die Existenz der Integrale* (27) beweisen. Es wird trivial $\mathfrak{Y}_1 = \mathfrak{C}$, somit gilt sicher für $s \leqq s_3$ wegen $\mathfrak{Y}_1 = (y_1\, y_1' \ldots y_1^{(n-1)}) = (1\,0 \ldots 0)$

$$|y_1^{(k-1)}| \leqq e^{\sum_{\iota=1}^{k-1}\omega_\iota s}.$$

Gilt andererseits für irgendein $\nu > 1$ und $s \leqq s_3$

$$(40) \qquad |y_{\nu-1}^{(k-1)}| \leqq K_6\, e^{\left\{\sum_{\iota=1}^{k-1}\omega_\iota s + \eta_1 s\right\}} \qquad (\eta_1 \geqq 0),$$

so existiert das Integral (27), und es ist für $s \leqq s_3$

$$(41) \qquad |y_\nu^{(k-1)}| \leqq K_6 \cdot K_3 \cdot e^{\left\{\sum_{\iota=1}^{k-1}\omega_\iota + \eta_1 + \delta\right\}s} + \delta_1^k.$$

Denn es sind, vgl. (16), die b_i so bestimmt, daß die $a_i - b_i$ den Bedingungen für die r_i mit einem $\delta > 0$ genügen. Vollständige Induktion ergibt mittels (29), daß alle Integrale existieren und (41) erfüllen.

Als nächstes zeigen wir die *Konvergenz* von

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(\mathfrak{Y}_\nu - \mathfrak{Y}_{\nu-1}) = \lim_{\nu\to\infty}\mathfrak{Y}_\nu.$$

Es ist $\mathfrak{Y}_1 - \mathfrak{Y}_0 = \mathfrak{C}$, daher

$$|y_1^{(k-1)} - y_0^{(k-1)}| \leqq e^{\sum_{\iota=1}^{k-1}\omega_\iota s}.$$

Weiter ist

$$\mathfrak{Y}_\nu - \mathfrak{Y}_{\nu-1} = \int_{-\infty}^{s}(\mathfrak{Y}_{\nu-1}(\sigma) - \mathfrak{Y}_{\nu-2}(\sigma))(A(\sigma) - B(\sigma))Z^{-1}(\sigma)Z(s)\,d\sigma.$$

Gilt somit für irgendein $\nu > 1$ und $s \leqq s_3$

$$|y_{\nu-1}^{(k-1)} - y_{\nu-2}^{(k-1)}| \leqq e^{\sum_{\iota=1}^{k-1}\omega_\iota s} \cdot K_3^{\nu-2} \cdot e^{(\nu-2)\vartheta s},$$

so folgt für $s \leqq s_3$

$$|y_\nu^{(k-1)} - y_{\nu-1}^{(k-1)}| \leqq e^{\sum_{\iota=1}^{k-1} \omega_\iota s} \cdot K_3^{\nu-1} e^{(\nu-1)\delta s}. \tag{42}$$

Vollständige Induktion zeigt, daß (42) für alle ν gilt.

Die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} K_3^{\nu-1} e^{(\nu-1)\delta s}$$

ist daher Majorante für

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (y_\nu^{(k-1)} - y_{\nu-1}^{(k-1)}) e^{-\sum_{\iota=1}^{k-1} \omega_\iota s} = \lim_{\nu \to \infty} y_\nu^{(k-1)} e^{-\sum_{\iota=1}^{k-1} \omega_\iota s}. \tag{43}$$

Es gibt daher ein s_4 so, daß (43) gleichmäßig konvergiert für $s \leqq s_4$.

Ist darüber hinaus N bei beliebigem, aber dann festgehaltenem $\eta_2 > 0$ so bestimmt, daß

$$\tfrac{1}{2}(N-1)\,\delta > \eta_2,$$

so folgt für $\nu > N$ und $s \leqq s_5 = \mathrm{Min}\,(0, s_3)$ nach (42)

$$e^{\left(-\eta_2 - \sum_{\iota=1}^{k-1} \omega_\iota\right) s} \cdot |y_\nu^{(k-1)} - y_{\nu-1}^{(k-1)}| \leqq K_3^{\nu-1} e^{-\eta_2 s} e^{(\nu-1)\delta s} \leqq e^{\frac{\nu-1}{2}\delta s} \cdot K_3^{\nu-1}.$$

Die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} K_3^{\nu-1} e^{\frac{\nu-1}{2}\delta s}$$

ist daher Majorante für

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{\left\{-\eta_2 - \sum_{\iota=1}^{k-1} \omega_\iota\right\} s} (y_\nu^{(k-1)} - y_{\nu-1}^{(k-1)}) = \lim_{\nu \to \infty} e^{-\eta_2 s} \cdot e^{-\sum_{\iota=1}^{k-1} \omega_\iota s} y_\nu^{(k-1)}. \tag{44}$$

Es gibt daher ein $s_6 \leqq 0$, so daß für $s \leqq s_6$ (44) gleichmäßig konvergiert. s_6 hängt dabei von η_2 ab.

Aus der Konvergenz von (44) folgt zunächst, daß es ein N_ε gibt, das unabhängig von k bestimmt werden kann, so daß für $s \leqq s_6$ gilt, sofern $\mu \geqq \nu \geqq N_\varepsilon$

$$|y_\mu^{(k-1)}(s) - y_\nu^{(k-1)}(s)| \leqq \varepsilon e^{\left(\eta_2 + \sum_{\iota=1}^{k-1} \omega_\iota\right) s}$$

Ist hierbei

$$\eta_2 \geqq -\sum_{\iota=1}^{n-1} \omega_\iota,$$

so folgt für alle k, für $s \leqq s_6$, und für $\mu \geqq \nu \geqq N_\varepsilon$

$$|y_\mu^{(k-1)}(s) - y_\nu^{(k-1)}(s)| \leqq \varepsilon.$$

Es existiert also gleichmäßig

$$\lim_{\nu \to \infty} y_\nu^{(k-1)};\ k = 1 \ldots n \quad \text{und} \quad \lim_{\nu \to \infty} \mathfrak{Y}_\nu(s).$$

Es ist daher auch

$$\lim_{s\to-\infty}\lim_{\nu\to\infty}\mathfrak{Y}_\nu(s)=\lim_{\nu\to\infty}\lim_{s\to-\infty}\mathfrak{Y}_\nu(s)=\mathfrak{C}.$$

Aus der Konvergenz von (44) folgt weiter, daß es ein N_ε so gibt, daß für $\nu>N_\varepsilon$ und $s\leqq s_6$ gilt

$$|\lim_{\mu\to\infty}y_\mu^{(k-1)}-y_{\nu-1}^{(k-1)}|\leqq\varepsilon\,e^{\left(\eta_2+\sum_{\iota=1}^{k-1}\omega_\iota\right)s}. \tag{45}$$

N_ε kann dabei unabhängig von k bestimmt werden.

(45) *soll uns zum Nachweis dienen, daß* $\lim\mathfrak{Y}_\nu$ *die Differentialgleichung* (22) *erfüllt.*

Wir lösen dazu die inhomogene Differentialgleichung

$$\mathfrak{Y}'=\mathfrak{Y}B+(\lim\mathfrak{Y}_\nu)\,(A-B)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\lim_{s\to-\infty}\mathfrak{Y}=\mathfrak{C}.$$

Es wird

$$\mathfrak{Y}=\int_{-\infty}^{s}(\lim\mathfrak{Y}_\nu(\sigma))\,(A(\sigma)-B(\sigma))Z^{-1}(\sigma)Z(s)\,d\sigma+\mathfrak{C}.$$

Aus (45) und (40) folgt, daß dieses Integral existiert. Es ist also

$$(\mathfrak{Y}-\mathfrak{Y}_\nu)=\int_{-\infty}^{s}(\lim_{\mu\to\infty}\mathfrak{Y}_\mu(\sigma)-\mathfrak{Y}_{\nu-1}(\sigma))\,(A(\sigma)-B(\sigma))Z^{-1}(\sigma)Z(s)\,d\sigma.$$

Nun wird für $s\leqq s_6$ nach (45) für $\nu>N_\varepsilon$

$$|y^{(k-1)}-y_\nu^{(k-1)}|\leqq\varepsilon\cdot e^{\left(\eta_2+\sum_{\iota=1}^{k-1}\omega_\iota\right)s}\cdot K_3\cdot e^{\delta s}.$$

Ist hierbei $\eta_2\geqq-\sum_{\iota=1}^{k-1}\omega_\iota$, so folgt für alle k gleichmäßige Konvergenz für $s\leqq s_6$ von

$$\lim_{\nu\to\infty}y_\nu^{(k-1)}=y^{(k-1)},\quad\text{also ist}\quad\lim_{\nu\to\infty}\mathfrak{Y}_\nu=\mathfrak{Y}.$$

Wir können jetzt eine asymptotische Darstellung für $\mathfrak{Y}$ *gewinnen.* Es ist zunächst

$$y^{(k-1)}=\sum_{\nu=1}^{N}(y_\nu^{(k-1)}-y_{\nu-1}^{(k-1)})+o\left(e^{(N-1)\delta s}\cdot e^{\sum_{\iota=1}^{k-1}\omega_\iota s}\right) \tag{46}$$

$$=y_N^{(k-1)}+o\left(e^{(N-1)\delta s}\cdot e^{\sum_{\iota=1}^{k-1}\omega_\iota s}\right).$$

Denn für $s \leqq s_6$ gilt nach (42)

$$\left| \sum_{\nu=N+1}^{\infty} (y_\nu^{(k-1)} - y_{\nu-1}^{(k-1)}) e^{-\sum_{\iota=1}^{k-1} \omega_\iota s} \right|$$

$$\leqq K_3^N e^{N\delta s} \sum_{\nu=0}^{\infty} K_3^\nu e^{\nu \delta s} = o(e^{(N-1)\delta s}).$$

Zur Abkürzung führen wir die folgende Bezeichnungsweise ein: Eine Zeile aus für $k = 1 \ldots n$ erklärten Elementen, deren jedes mit seinem k

$$o(e^{(N-1)\delta s}) \cdot e^{\sum_{\iota=1}^{k-1} \omega_\iota s}$$

ist, werde kurz auch mit $\mathfrak{O}_N$ angedeutet. Also

$$\mathfrak{O}_N = \left(o(e^{(N-1)\delta s}) \cdot e^{\sum_{\iota=1}^{0} \omega_\iota s} \ldots o(e^{(N-1)\delta s}) e^{\sum_{\iota=1}^{n-1} \omega_\iota s} \right).$$

Damit wird (46)

$$\mathfrak{Y} = \sum_{\nu=1}^{N} (\mathfrak{Y}_\nu - \mathfrak{Y}_{\nu-1}) + \mathfrak{O}_N. \tag{47}$$

Wir wollen nun zeigen, es ist für $\nu \leqq N$ mit geeigneten Zahlen $\lambda_{\mu\nu}$ und $\mathfrak{C}_{\mu\nu}$:

$$\mathfrak{Y}_\nu - \mathfrak{Y}_{\nu-1} = \sum_{\mu=0}^{M_\nu} e^{\lambda_{\mu\nu} s} \mathfrak{C}_{\mu\nu} + \mathfrak{O}_N; \quad \lambda_{\mu\nu} \geqq 0. \tag{48}$$

Für $\nu = 1$ ist (48) wegen $\mathfrak{Y}_1 - \mathfrak{Y}_0 = \mathfrak{C}$ erfüllt. (48) soll durch vollständige Induktion bewiesen werden. Dazu muß also gezeigt werden, daß man (48) beweisen kann, wenn man die entsprechende Relation für $\mathfrak{Y}_{\nu-1} - \mathfrak{Y}_{\nu-2}$ voraussetzt.

Es wird dann

$$\mathfrak{Y}_\nu - \mathfrak{Y}_{\nu-1} = \int_{-\infty}^{s} (\mathfrak{Y}_{\nu-1}(\sigma) - \mathfrak{Y}_{\nu-2}(\sigma))(A(\sigma) - B(\sigma)) Z^{-1}(\sigma) Z(s)\, d\sigma$$

$$= \int_{-\infty}^{s} \left\{ \sum_{\mu=0}^{M_{\nu-1}} e^{\lambda_{\mu\nu-1}\sigma} \mathfrak{C}_{\mu\nu-1} + \mathfrak{O}_N \right\} (A(\sigma) - B(\sigma)) Z^{-1}(\sigma) Z(s)\, d\sigma.$$

Setzt man in (28) $\mathfrak{U} = \mathfrak{O}_N$, so folgt vermöge (29)

$$\mathfrak{Y}_\nu - \mathfrak{Y}_{\nu-1} = \int_{-\infty}^{s} \sum_{\mu=0}^{M_{\nu-1}} e^{\lambda_{\mu\nu-1}\sigma} \mathfrak{C}_{\mu\nu-1} (A(\sigma) - B(\sigma)) Z^{-1}(\sigma) Z(s)\, d\sigma + \mathfrak{O}_N.$$

Wir dürften rechts sogar $\mathfrak{O}_{N+1}$ schreiben. Im einzelnen wird

$$y_\nu^{(k-1)} - y_{\nu-1}^{(k-1)} = \sum_{j=1}^{n} J_{jk} + o(e^{(N-1)\delta s}) \cdot e^{\sum_{\iota=1}^{k-1} \omega_\iota s}.$$

Dabei ist für $j \leqq \varkappa$, falls $\mathfrak{C}_{\mu\nu-1} = (c_1^{\mu\nu-1} \ldots c_n^{\mu\nu-1})$,

$$J_{jk} = \int_{-\infty}^{s} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{\mu=0}^{M_{\nu-1}} e^{\lambda_{\mu\nu-1}\sigma} c_i^{\mu\nu-1} (b_i(\sigma) - a_i(\sigma)) \right\} q_{nj}(\sigma) \cdot e^{-q_j\sigma} d\sigma \cdot e^{q_j s}\, v_{jk}(s).$$

Unter dem Integral steht eine für $s \leqq s_3$ gleichmäßig konvergente Dirichletsche Reihe, die mit $e^{-q_j \sigma}$ multipliziert ist. Wir wollen jedoch nur annehmen, daß es für $b_i - a_i$ eine asymptotische Darstellung durch eine Dirichletsche Reihe gibt; dann ist der Integrand darstellbar durch eine mit $e^{-q_j \sigma}$ multiplizierte Dirichletsche Reihe mit reellen monoton gegen $+\infty$ strebenden Exponenten. Der Integrand ist überdies $O(e^{\delta \sigma})$. Die uneigentliche Integration kann gliedweise ausgeführt werden. Für J_{jk} findet man also eine Darstellung durch eine asymptotische Dirichletsche Reihe mit reellen monoton gegen $+\infty$ gehenden Exponenten. Die imaginären Anteile fallen bei der Multiplikation mit $e^{q_j s} \cdot v_{jk}$ weg.

Ähnliches ist für $j > \varkappa$ zu zeigen. Es ist

$$J_{jk} = \int_{-\infty}^{s} \sum_{\iota=1}^{n} \Big(\sum_{\mu=0}^{M_\nu - 1} e^{\lambda_{\mu\nu} - 1} c_i^{\mu\nu - 1} \{b_i - a_i\} \Big) q_{nj}(\sigma)\, e^{\frac{p_j}{\omega_j}(e^{\omega_j s} - e^{\omega_j \sigma})} v_{jk}(s)\, d\sigma.$$

Der Integrand wird durch eine Dirichletsche Reihe $\sum_{\mu=0}^{\infty} e^{\lambda_\mu L^\sigma} c_{\mu L}$ multipliziert mit $e^{\frac{p_j}{\omega_j}(e^{\omega_j s} - e^{\omega_j \sigma})} \cdot v_{jk}(s)$ asymptotisch dargestellt. Wir können zerlegen

$$\begin{aligned} J_{jk} &= \int_{-\infty}^{s} \sum_{\mu=0}^{L} e^{\lambda_\mu L^\sigma} c_{\mu L}\, e^{\frac{p_j}{\omega_j}(e^{\omega_j s} - e^{\omega_j \sigma})} v_{jk}(s)\, d\sigma \\ &\quad + \int_{-\infty}^{s} o(e^{\eta_L \sigma})\, e^{\frac{p_j}{\omega_j}(e^{\omega_j s} - e^{\omega_j \sigma})} v_{jk}(s)\, d\sigma \\ &= J_{jk1} + o(e^{\eta_L s})\, v_{jk}(s). \end{aligned}$$

η_L kann dabei beliebig gewählt werden. J_{jk1} kann partiell integriert werden

$$\begin{aligned} J_{jk1} &= v_{jk}(s) \int_{-\infty}^{s} \frac{d}{d\sigma} \Big(e^{\frac{p_j}{\omega_j}(e^{\omega_j s} - e^{\omega_j \sigma})} \Big) \Big(\frac{e^{-\omega_j \sigma}}{-p_j} \Big) \sum_{\mu=0}^{L} e^{\lambda_{\mu\nu} \sigma} c_{\mu L}\, d\sigma \\ &= v_{jk}(s) \frac{e^{-\omega_j s}}{-p_j} \sum_{\mu=0}^{L} e^{\lambda_\mu L^s} c_{\mu L} + J_{jk2}, \end{aligned}$$

wobei

$$J_{jk2} = v_{jk}(s) \cdot \int_{-\infty}^{s} \frac{d}{d\sigma} \Big[\frac{e^{-\omega_j \sigma}}{p_j} \sum_{\mu=0}^{L} e^{\lambda_\mu L^\sigma} c_{\mu L} \Big] e^{\frac{p_j}{\omega_j}(e^{\omega_j s} - e^{\omega_j \sigma})}\, d\sigma.$$

J_{jk2} ist vom gleichen Typus wie J_{jk1}, nur sind die Exponenten des Exponentialpolynoms um $-\omega_j$ verschoben. J_{jk2} kann nach dem gleichen Verfahren wie J_{jk1} behandelt werden. Durch wiederholte Anwendung der partiellen Integration kann man also mit endlich vielen Schritten erreichen, daß das Restintegral

$$R = v_{jk}(s) \cdot o(e^{\eta L s})$$

wird.

Es wird also

$$J_{jk} = v_{jk}(s)\,(P_L(s) + o(e^{\eta_L s})); \qquad j > \varkappa.$$

Dabei bedeutet $P_L(s)$ ein Exponentialpolynom, daß natürlich noch von dem ausgewählten η_L und von j und k abhängt.

Hierbei ist also η_L beliebig. Daher gilt hiernach und unter Beachtung des Resultats für $j \leqq \varkappa$

$$y_\nu^{(k-1)} - y_{\nu-1}^{(k-1)} = d_k + o\left(e^{(N-1)\delta s} \cdot e^{\sum_{i=1}^{k-1} \omega_i s}\right).$$

Dabei ist d_k durch ein Exponentialpolynom gegeben.

Nun ist nach (24)

$$\lim_{s \to -\infty} (y_\nu^{(k-1)} - y_{\nu-1}^{(k-1)}) = 0 \quad \text{für } \nu > 1,$$

daher sind alle Exponenten von d_k für $\nu > 1$ größer als Null.

Es folgt nun

$$\mathfrak{Y}_\nu - \mathfrak{Y}_{\nu-1} = \sum_{\mu=0}^{M_\nu} e^{\lambda_{\mu\nu} s}\, \mathfrak{C}_{\mu\nu} + \mathfrak{O}_N.$$

Weiter wird nach (47)

$$\mathfrak{Y} = \sum_{\mu=0}^{M'} e^{\lambda'_\mu s}\, \mathfrak{C}_\mu + \mathfrak{O}_N. \tag{49}$$

Es gibt somit zu jedem N und $N_1 > N$ eine Darstellung nach (49). Die Differenz beider Darstellungen muß $\mathfrak{O}_N$ sein. Demnach stimmen beide in den Anfangsgliedern überein.

Es gibt somit eine asymptotische Darstellung für $s \to -\infty$

$$\mathfrak{Y} \sim \sum_{\mu=0}^{\infty} \mathfrak{C}_\mu e^{\lambda_\mu s}. \tag{50}$$

Weiter gibt es auch für $\mathfrak{Y} \cdot A$ eine asymptotische Darstellung, die durch formale Multiplikation gewonnen werden kann. Es muß aber

$$\mathfrak{Y} A = \mathfrak{Y}' \sim \sum_{\mu=0}^{\infty} \mathfrak{C}_\mu \lambda_\mu e^{\lambda_\mu s}$$

sein, denn gliedweise Integration muß zu (50) führen. Es erfüllt also $\sum_{\mu=0}^{\infty} \mathfrak{C}_\mu e^{\lambda_\mu s}$ die Differentialgleichung $\mathfrak{Y}' = \mathfrak{Y} A$ formal.

Ist $\mathfrak{C}_\mu = (c_1^\mu \ldots c_n^\mu)$, so muß

$$y \sim \sum_{\mu=0}^{\infty} c_1^\mu e^{\lambda_\mu s} \tag{51}$$

die Gleichung (21) formal erfüllen, und es ist $\lim_{s \to -\infty} y = 1$. Daher ist (51) durch (3) mit $c_0 = 1$ gegeben.

§ 3.

Ergänzungen.

Wir haben in den beiden letzten Paragraphen eine asymptotische Darstellung für eine Lösung einer bestimmten linearen Differentialgleichung aufgestellt. Bei der zugrunde gelegten Gleichung (1) handelt es sich zunächst um einen Spezialfall.

Wir wollen nun sehen, inwieweit man eine Differentialgleichung

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} y^{(i)} a_i = 0 \tag{52}$$

auf den behandelten Fall zurückführen kann.

Die a_i mögen dabei durch Dirichletsche Reihen mit reellen Exponenten asymptotisch darstellbar sein. Die Exponenten sollen bis auf endlich viele positiv sein und monoton gegen $+\infty$ streben. Die formalen Reduktionen des Kapitels II, § 3 dürfen auf (52) angewendet werden, und ergeben mit $y = y_1 e^{\int p\, ds}$ eine Differentialgleichung

$$y_1^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} y_1^{(i)} b_i = 0. \tag{53}$$

Diese Gleichung genügt den in Kapitel II, § 1 angegebenen notwendigen Bedingungen. Die b_i sind durch asymptotische Reihen darstellbar, die analogen Bedingungen wie die Reihen für die a_i genügen. Der Übergang von (52) zu (53) soll auf dem zweiten Wege des § 3, Kapitel II erfolgen. d. h. unter Anwendung von Kapitel II, § 2, H.

Dazu müssen eine Reihe von algebraischen Gleichungen gelöst werden. Eine der Wurzeln kann ausgewählt werden und muß dann als Koeffizient im Reduktionspolynom p verwendet werden. Wir wählen jeweils diejenige Wurzel, die den größten Realteil unter den Wurzeln der betreffenden Gleichung besitzt. Gibt es mehrere Wurzeln mit dem gleichen größten Realteil. so ist unser Verfahren nicht anwendbar.

Tritt dieser Fall aber nicht ein, so werden nach Kapitel II, § 2, H. für (53) die Gleichungen der Seiten, die nicht unter dem Winkel Null ansteigen, außer der Wurzel Null nur solche Wurzeln haben, die einen negativen Realteil besitzen.

Verwendet man für die b_i die in § 1 dieses Kapitels unter (5) und (10) angegebene Schreibweise

$$b_i \sim e^{\beta_i s} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{i\nu} e^{\lambda_\nu s},$$

wobei zu beachten ist, daß wir die Zählung der b_i geändert haben, so lautet die Gleichung der horizontalen Seite für (53)

$$f_1(\varrho) = \sum_{i=0}^{\varkappa} \varrho^i b_{i0} = 0. \tag{54}$$

Sind $\varrho_1\ \varrho_2 \dots \varrho_\varkappa$ die Nullstellen dieser Gleichung, so sei

$$\Re(\varrho_1) \geqq \operatorname*{Max}_{i=2\dots\varkappa'} \Re(\varrho_i).$$

Setzt man

(55) $$y_1 = y_2 e^{\varrho_1 s},$$

so wird für y_2 gelten

(56) $$y_2^{(n)} + \sum_{i=0}^{n} y_2^{(i)} c_i = 0.$$

Die c_i erfüllen wieder analoge Bedingungen wie die a_i. Die Gleichung der horizontalen Seite für (56) lautet

(57) $$f_2(\varrho) = \sum_{i=0}^{\varkappa} \varrho^i \Big(\sum_{l=i}^{\varkappa} b_{l0}\, \varrho_1^{(l-i)} \binom{l}{i} \Big)$$

$$= \sum_{i=0}^{\varkappa} \varrho^i \frac{f_1^{(i)}(\varrho_i)}{i!} = f_1(\varrho_1 + \varrho) = 0.$$

Die Gleichungen der übrigen Seiten bleiben bei der Transformation $y_1 = e^{\varrho_1 s} y_2$ ungeändert (vgl. Kapitel II, § 2).

Nach (57) hat die Gleichung der horizontalen Seite für (56) außer der Nullstelle Null nur Nullstellen, die keinen positiven Realteil besitzen, während die Gleichung der übrigen Seiten außer der Nullstelle Null nur solche Wurzeln besitzen, die einen negativen Realteil haben.

Damit haben wir fast alle Bedingungen erfüllt, die wir in § 1 an die Nullstellen der Gleichungen der Seiten gestellt haben. Die Forderung, daß gewisse Wurzeln nur einfach sein sollen, ist wohl nur durch die Unvollkommenheit unseres Beweisverfahrens bedingt.

Ist diese Forderung auch erfüllt, und tritt der obenerwähnte Ausnahmefall nicht ein, so besitzt (52) eine Lösung, die die folgende asymptotische Darstellung zuläßt:

$$y \sim e^{\int p\, d s} \cdot e^{\varrho_1 s} \Big(\sum_{r=0}^{\infty} d_r e^{\lambda_r' s} \Big)$$

s reell; $s \to -\infty$; $\lambda_0' = 0$; $d_0 \neq 0$; $\lim \lambda_r' = \infty$.

Kapitel IV.

Die Differentialgleichung $y'' + ya = 0$.

§ 1.

Asymptotische Darstellung einer Lösung.

Wir wollen die Differentialgleichung

(1) $$y'' + ya = 0$$

betrachten. Dabei sei

(2) $$a = e^{2\omega s} \sum_{r=0}^{\infty} a_r e^{\lambda_r s}.$$

Es sei $\omega < 0$ also reell. Dagegen dürfen die λ_ν komplexe Zahlen sein, die die folgenden Bedingungen erfüllen

a) $0 = \lambda_0 < \Re(\lambda_1) \leqq \Re(\lambda_2) \ldots \leqq \Re(\lambda_{N-1}) \leqq \lambda_N = -\omega < \Re(\lambda_{N+1}) \leqq \ldots$.

b) *Die Folge der $\{\Re(\lambda_\nu)\}$ habe keinen endlichen Häufungswert. Insbesondere sollen nur endlich viele λ_ν den gleichen Realteil besitzen.*

c) *Mit $\lambda_{\nu'}$ und $\lambda_{\nu''}$ sei auch $\lambda_{\nu'''} = \lambda_{\nu'} + \lambda_{\nu''}$ unter den λ_ν enthalten.*

Schließlich sei

$$a_0 < 0. \tag{3}$$

Die Reihe für a konvergiere absolut und gleichmäßig in einem Halbstreifen.

Ist $s = \sigma + it$, so sei Konvergenz gegeben für

$$\sigma \leqq \sigma_0 \quad \text{und} \quad |t| \leqq \frac{T}{|\omega|}, \quad \text{wobei} \quad T > 2\pi.$$

Die Bedingung $a_0 < 0$ bedeutet keinen Verlust an Allgemeinheit, sofern $a_0 \neq 0$ ist, und der Konvergenzhalbstreifen genügend breit ist. Setzt man nämlich für den Fall, daß (3) nicht gilt, $s = s^* - i\frac{\arg(-a_0)}{2\omega}$, so wird in der neuen Gleichung für s^* (3) erfüllt sein.

Wir wollen weiter annehmen, daß

$$\omega = -\lambda_N = -1. \tag{4}$$

Setzt man $s = \frac{s^*}{-\omega}$, falls $\omega \neq -1$, so folgt eine Differentialgleichung, in der diese Annahme erfüllt ist.

Wir wollen nun unsere Gleichung so reduzieren, daß sie eine formale Lösung zuläßt. Obwohl die Reduktionen des Kapitels III für komplexe Exponentenpunkte im allgemeinen nicht anwendbar sind, so können wir doch in unserem Spezialfall ähnlich verfahren.

Wir setzen

$$y = y_1 e^{\int e^{-s} \sum_{\nu=0}^{N} p_\nu e^{\lambda_\nu s}\, ds} = y_1 e^{\int p\, ds}.$$

Es wird

$$y'' = \Big[y_1 \Big\{ e^{-2s} \Big(\sum_{\nu=0}^{N} p_\nu e^{\lambda_\nu s} \Big)^2 + e^{-s} \sum_{\nu=0}^{N} p_\nu (\lambda_\nu - 1) \Big\} + y_1' 2 e^{-s} \sum_{\nu=0}^{N} p_\nu e^{\lambda_\nu s} + y_1'' \Big] e^{\int p\, ds}.$$

Also geht (1) über in

$$y_1'' + y_1' 2 e^{-s} \sum_{\nu=0}^{N} p_\nu e^{\lambda_\nu s} \tag{5}$$

$$+ y_1 e^{-2s} \Big\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{\lambda_\nu s} \Big(a_\nu + \sum_{\nu', \nu'' \leqq N} \delta_{\lambda_\nu}^{\lambda_{\nu'} + \lambda_{\nu''}} p_{\nu'} p_{\nu''} + \sum_{\nu' \leqq N} \delta_{\lambda_\nu}^{\lambda_{\nu'} + \lambda_N} p_{\nu'} (\lambda_{\nu'} - 1) \Big\} = 0.$$

Wir bestimmen nun die Zahlen p_ν so, daß für $\nu \leqq N$

$$a_\nu + \sum_{\nu', \nu'' \leqq N} \delta_{\lambda_\nu}^{\lambda_{\nu'} + \lambda_{\nu''}} p_{\nu'} p_{\nu''} + \sum_{\nu' \leqq N} \delta_{\lambda_\nu}^{\lambda_{\nu'} + \lambda_N} p_{\nu'} (\lambda_{\nu'} - 1) = 0.$$

Oder gleichbedeutend

$$a_\nu + \sum_{\nu', \nu'' \leqq N} \delta_{\lambda_\nu}^{\lambda_{\nu'} + \lambda_{\nu''}} p_{\nu'} p_{\nu''} - \delta_{\lambda_\nu}^{\lambda_N} p_0 = 0. \tag{6}$$

Zunächst bestimmen wir p_0 aus der Gleichung für $\nu = 0$

$$a_0 + p_0^2 = 0. \tag{7}$$

Es gibt für p_0 zwei Möglichkeiten

$$p_0 = \pm |\sqrt{-a_0}|. \tag{8}$$

Für $\nu > 0$ lauten die Gleichungen (6), da $\Re(\lambda_{\nu'}) > 0$ für $\nu' > 0$,

$$a_\nu + 2 p_\nu p_0 + \sum_{\substack{0 < \nu' < \nu \\ 0 < \nu'' < \nu}} \delta_{\lambda_\nu}^{\lambda_{\nu'} + \lambda_{\nu''}} p_{\nu'} p_{\nu''} - \delta_{\lambda_\nu}^{\lambda_N} p_0 = 0. \tag{9}$$

Man kann wegen $2 p_0 \neq 0$ daher der Reihe nach die Zahlen $p_1\ p_2 \ldots p_n$ bestimmen.

Unsere Gleichung lautet nach der Transformation

$$y_1'' + y_1' \cdot 2 e^{-s} \cdot \sum_{\nu=0}^{N} p_\nu e^{\lambda_\nu s} + y_1\, e^{-2s} \sum_{\nu = N+1}^{\infty} b_\nu e^{\lambda_\nu s} = 0. \tag{10}$$

Die Zahlen b_ν sind dabei aus (5) zu bestimmen. Für p_0 sind dabei noch die zwei Werte $p_0 = \pm |\sqrt{-a_0}|$ zugelassen, und so gibt es auch je zwei y_1, p_ν und b_ν.

Wir wählen zunächst

$$p_0 = + |\sqrt{-a_0}| \tag{11}$$

und behandeln diesen Fall zuerst allein weiter. Wir stellen nun die *Vergleichsdifferentialgleichung* des vorigen Kapitels auf, d. h. eine Differentialgleichung, die mit (10) die Anfangsglieder gemeinsam hat. Wären alle λ_ν reell, so hätten wir zu setzen

$$z_1 = 1 \quad \text{und} \quad z_2 = e^{2 p_0 e^{-s}}.$$

Die Vergleichsgleichung würde lauten

$$z'' + (2 p_0 e^{-s} + 1) z' = 0.$$

Diese Gleichung werden wir auch jetzt benutzen.

Wir stellen nun eine Folge x_ν auf, so daß

$$x_\nu \to 1 \quad \textit{sowie} \quad x_\nu' \to 0 \quad \textit{für} \quad s \to -\infty \qquad (\nu \geqq 1), \tag{12}$$

$$x_\nu'' + (2 p_0 e^{-s} + 1) x_\nu' = -x_{\nu-1}' \left(2 e^{-s} \sum_{\nu=1}^{N} p_\nu e^{\lambda_\nu s} - 1\right) - x_{\nu-1} e^{-2s} \sum_{\nu = N+1}^{\infty} b_\nu e^{\lambda_\nu s} \quad (\nu \geqq 1), \tag{13}$$

$$x_0 = 0. \tag{14}$$

Der Grenzübergang in (12) soll längs der reellen Achse ausgeführt werden. Im übrigen soll aber $s = \sigma + it$ dem folgenden Halbstreifen entnommen werden: Ist $s = \sigma + it$, so sei

$$\sigma \leqq \sigma_0, \quad |t| \leqq \pi - \varepsilon; \quad 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{4}.$$

Variation der Konstanten ergibt, sofern die Integrale existieren,

$$(15)\quad x_\nu = 1 + \int_{-\infty}^{s} \frac{z_2(\zeta) - z_2(s)}{z_2'(\zeta)} \Big\{ x_{\nu-1}'(\zeta) \Big(2\, e^{-\zeta} \sum_{\nu=1}^{N} p_\nu e^{\lambda_\nu \zeta} - 1 \Big) + x_{\nu-1}(\zeta) \sum_{\nu=N+1}^{\infty} b_\nu e^{\lambda_\nu \zeta} \cdot e^{-2\zeta} \Big\} d\zeta$$

und

$$(16)\quad x_\nu' = \int_{-\infty}^{s} \frac{-z_2'(s)}{z_2'(\zeta)} \Big\{ x_{\nu-1}'(\zeta) \Big(2\, e^{-\zeta} \sum_{\nu=1}^{N} p_\nu e^{\lambda_\nu \zeta} - 1 \Big) + x_{\nu-1}(\zeta)\, e^{-2\zeta} \sum_{\nu=N+1}^{\infty} b_\nu e^{\lambda_\nu \zeta} \Big\} d\zeta.$$

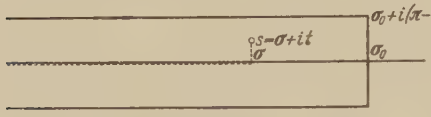


Fig. 9.

Für $s = \sigma + it$ sollen die Integrale erst von $-\infty$ bis σ längs der reellen Achse und dann von σ bis s geführt werden.

Wir führen Abkürzungen ein und schätzen ab (vgl. (4))

$$\frac{1}{-2\,p_0} \Big\{ 2 \sum_{\nu=1}^{N} p_\nu e^{\lambda_\nu \zeta} - e^{\lambda_N \zeta} \Big\} = \varphi(\zeta) = O(e^{\delta\zeta})$$

und

$$\frac{e^{-\zeta}}{-2\,p_0} \Big\{ \sum_{\nu=N+1}^{\infty} b_\nu e^{\lambda_\nu \zeta} \Big\} = \psi(\zeta) = O(e^{\delta\zeta}),$$

sofern

$$|\Im(\zeta)| \leqq \pi - \varepsilon$$

und

$$\delta = \operatorname{Min}(\Re(\lambda_1); \Re(\lambda_{N+1} - \lambda_n)).$$

δ ist sicher größer als Null. Damit wird (15)

$$(17)\quad x_\nu = 1 + \int_{-\infty}^{s} x_{\nu-1}'(\zeta)\, \varphi(\zeta) + x_{\nu-1}(\zeta)\, \psi(\zeta)\, d\zeta - \int_{-\infty}^{s} e^{2p_0(e^{-s} - e^{-\zeta})} \big(x_{\nu-1}'(\zeta)\, \varphi(\zeta) + x_{\nu-1}(\zeta)\, \psi(\zeta) \big) d\zeta.$$

(16) geht über in

$$(18)\quad x_\nu' = \int_{-\infty}^{s} e^{2p_0(e^{-s} - e^{-\zeta})} (2\,p_0\, e^{-s}) \big(x_{\nu-1}'(\zeta)\, \varphi(\zeta) + x_{\nu-1}(\zeta)\, \psi(\zeta) \big) d\zeta.$$

Die Existenz dieser Integrale ist nachzuweisen. *Wir wollen wieder etwas allgemeinere Integrale abschätzen.*

In dem Halbstreifen $\mathfrak{H}$

$$\sigma < \sigma_0;\ |t| < \pi - \varepsilon$$

sollen $u(s)$ und $\Phi(s)$ reguläre Funktionen sein. Im Halbstreifen $\mathfrak{H}_1$

$$\sigma \leqq \sigma_1 < \sigma_0;\ |t| \leqq \pi - \varepsilon$$

möge gelten

$$|u| \leqq K_1 e^{\eta \sigma};\ \eta \geqq 0$$

und

$$|\Phi| \leqq K_2 e^{\delta \sigma};\ \delta > 0.$$

Wir untersuchen nun das Integral

$$(19) \qquad I_1 = \int_{-\infty}^{\sigma} u(\zeta)\Phi(\zeta)\,d\zeta + \int_{\sigma}^{s} u(\zeta)\Phi(\zeta)\,d\zeta$$
$$= I_{11} + I_{12}.$$

I_1 existiert wegen der Abschätzungen für u und Φ in $\mathfrak{H}$. Weiter wird für s aus $\mathfrak{H}_1$

$$|I_{11}| \leqq \int_{-\infty}^{\sigma} K_1 K_2 e^{(\eta+\delta)\zeta} d\zeta \leqq \frac{K_1 K_2}{\eta+\delta} e^{(\eta+\delta)\zeta} \Big|_{-\infty}^{\sigma} \leqq \frac{K_1 K_2 e^{(\eta+\delta)\sigma}}{\delta}$$

und

$$|I_{12}| \leqq \int_{0}^{|t|} K_1 K_2 e^{(\eta+\delta)\sigma} d\tau \leqq e^{(\eta+\delta)\sigma} \cdot K_1 K_2 \cdot \pi,$$

also

$$(20) \qquad |I_1| \leqq K_1 K_2 \left(\frac{1}{\delta} + \pi\right) e^{(\eta+\delta)\sigma}.$$

Das uneigentliche Integral I_1 ist eine reguläre Funktion in $\mathfrak{H}$.

Nun untersuchen wir

$$(21) \qquad I_2 = \int_{-\infty}^{\sigma} e^{2p_0(e^{-s}-e^{-\zeta})} u(\zeta)\Phi(\zeta)\,d\zeta$$
$$+ \int_{\sigma}^{\sigma+it} e^{2p_0(e^{-s}-e^{-\zeta})} u(\zeta)\Phi(\zeta)\,d\zeta = I_{21} + I_{22}.$$

In I_{21} ist für s und ζ aus $\mathfrak{H}_1$ wegen (11)

$$|e^{2p_0(e^{-s}-e^{-\zeta})}| = e^{2p_0(e^{-\sigma}\cos t - e^{-\zeta})} \leqq 1.$$

In I_{22} ist für s und ζ aus $\mathfrak{H}_1$, falls $\Im(\zeta) = \tau$,

$$|e^{2p_0 e^{-\sigma}(e^{-it}-e^{-i\tau})}| = e^{2p_0 e^{-\sigma}(\cos t - \cos\tau)} \leqq 1.$$

Die Resultate für I_{11} und I_{12} sind anwendbar. Insbesondere existiert I_2 in $\mathfrak{H}$ und ist dort regulär. Weiter ist in $\mathfrak{H}_1$

$$|I_{21}| \leqq K_1 K_2 e^{(\eta+\delta)\sigma} \cdot \frac{1}{\delta}$$

und

$$|I_{22}| \leqq K_1 K_2 e^{(\eta+\delta)\sigma} \cdot \pi.$$

Für I_2 gilt für s aus $\mathfrak{H}_1$

$$|I_2| \leqq K_1 K_2 \cdot \left(\frac{1}{\delta} + \pi\right) e^{(\eta+\delta)\sigma}.$$

Wir bemerken ausdrücklich, daß die Abschätzungen für I_{12} und für I_{22} auch gültig bleiben, wenn $\eta < 0$ ist!

Wir untersuchen nun

$$(22)\qquad I_3 = e^{-s}\int_{-\infty}^{\sigma} e^{2p_0(e^{-s}-e^{-\zeta})}\cdot 2p_0\cdot u(\zeta)\Phi(\zeta)\,d\zeta + e^{-s}\int_{\sigma}^{\sigma+it} e^{2p_0(e^{-s}-e^{-\zeta})}\cdot 2p_0\cdot u(\zeta)\Phi(\zeta)\,d\zeta = I_{31}+I_{32}.$$

Das uneigentliche Integral in I_{31} existiert wieder (wie I_{21}) für s aus $\mathfrak{H}$. Ebenso existiert I_3 für s aus $\mathfrak{H}$ und ist dort regulär. Es wird weiter für s aus $\mathfrak{H}_1$

$$(23)\qquad |I_{31}| \leqq e^{-\sigma}\int_{-\infty}^{\sigma} 2p_0 e^{\Re(2p_0(e^{-s}-e^{-\zeta}))}\cdot K_1K_2 e^{(\eta+\delta)\zeta}\,d\zeta$$

$$\leqq \int_{-\infty}^{\sigma} 2p_0 e^{-\zeta} e^{2p_0(e^{-\sigma}\cos t - e^{-\zeta})}\,d\zeta\cdot e^{(\eta+\delta)\sigma}\cdot K_1\cdot K_2$$

$$= e^{2p_0(e^{-\sigma}\cos t - e^{-\zeta})}\Big|_{\zeta=-\infty}^{\sigma}\cdot K_1K_2 e^{(\eta+\delta)\sigma}$$

$$\leqq K_1\cdot K_2\cdot e^{(\eta+\delta)\sigma}.$$

Wir haben nun noch I_{32} abzuschätzen. Die direkte Anwendung des für I_{22} entwickelten Verfahrens ergibt für s aus $\mathfrak{H}_1$

$$(24)\qquad |I_{32}| \leqq K_1K_2\cdot\pi\cdot e^{(\eta+\delta-1)\sigma}\cdot 2p_0.$$

Diese Abschätzung gilt auch, wenn $\eta+\delta-1 \leqq 0$ ist. Wir wollen nun diese Abschätzung verschärfen. Wir beschränken dazu s zunächst auf den folgenden Halbstreifen $\mathfrak{H}_2$

$$\sigma \leqq \sigma_1,\quad \frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \pi-\varepsilon.$$

Es ist dann

$$I_{32} = e^{-s}\int_{0}^{\sigma+i\varepsilon} e^{2p_0(e^{-s}-e^{-\zeta})}\cdot 2p_0\cdot u(\zeta)\Phi(\zeta)\,d\zeta + e^{-s}\int_{\sigma+i\varepsilon}^{\sigma+it} e^{2p_0(e^{-s}-e^{-\zeta})}\cdot 2p_0\cdot u(\zeta)\Phi(\zeta)\,d\zeta = I_{321}+I_{322}.$$

Es wird

$$|I_{321}| \leqq e^{-\sigma}\int_{0}^{\varepsilon} e^{2p_0 e^{-\sigma}(\cos t-\cos\tau)}\cdot 2p_0K_1K_2e^{(\eta+\delta)\sigma}\,d\tau$$

$$\leqq e^{-\sigma}\int_{0}^{\varepsilon} e^{2p_0e^{-\sigma}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos\varepsilon\right)}\cdot 2p_0\cdot K_1\cdot K_2e^{(\eta+\delta)\sigma}\,d\tau$$

$$\leqq \varepsilon\cdot 2p_0\cdot K_1\cdot K_2\cdot e^{(\eta+\delta)\sigma}\cdot\left\{e^{-\sigma}\cdot e^{-2p_0e^{-\sigma}\cos\varepsilon}\right\}$$

$$\leqq K_3\cdot K_1\cdot K_2\cdot e^{(\eta+\delta)\sigma}.$$

Weiter wird

$$|I_{322}| \leqq e^{-\sigma}\int_{\varepsilon}^{t} e^{2p_0 e^{-\sigma}(\cos t-\cos\tau)}\, 2\,p_0 K_1 K_2\, e^{(\eta+\delta)\sigma}\, d\tau$$

$$= K_1 K_2\, e^{(\eta+\delta-1)\sigma}\int_{\varepsilon}^{t}\frac{d}{d\tau}\left\{e^{2p_0 e^{-\sigma}(\cos t-\cos\tau)}\right\}\frac{e^{\sigma}}{\sin\tau}\, d\tau$$

$$\leqq \frac{K_1 K_2}{\sin\varepsilon}\, e^{(\eta+\delta)\sigma}\int_{\varepsilon}^{t}\frac{d}{d\tau}\left\{e^{2p_0 e^{-\sigma}(\cos t-\cos\tau)}\right\} d\tau$$

$$\leqq \frac{K_1 K_2}{\sin\varepsilon}\, e^{(\eta+\delta)\sigma}\left(1 - e^{2p_0 e^{-\sigma}(\cos t-\cos\varepsilon)}\right)$$

$$\leqq \frac{K_1 K_2}{\sin\varepsilon}\, e^{(\eta+\delta)\sigma} \leqq K_1 K_2 K_4\, e^{(\eta+\delta)\sigma}.$$

Also gilt für s aus $\mathfrak{H}_2$

$$I_3 \leqq (K_4 + K_3 + 1)\, K_1 K_2\, e^{(\eta+\delta)\sigma}. \tag{25}$$

Dabei sind K_4 und K_3 von $u(s)$ unabhängig. Die gleiche Abschätzung gilt für $\sigma \leqq \sigma_1$; $\frac{\pi}{2} \leqq -t \leqq \pi - \varepsilon$.

Weiter gibt es ein K_5 unabhängig von $u(s)$, so daß für $\sigma = \sigma_1$ und $-\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq +\frac{\pi}{2}$ gilt

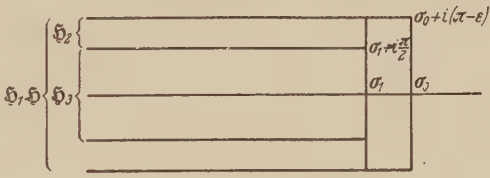


Fig. 10.

$$|I_{32}| \leqq K_1 \cdot K_2 \cdot \pi \cdot 2\,p_0\, e^{(\eta+\delta-1)\sigma} \leqq K_1 \cdot K_2 \cdot K_5\, e^{(\eta+\delta)\sigma}. \tag{26}$$

Schließlich ist I_3 regulär in $\mathfrak{H}$.

Es soll nun die Abschätzung (25) auch für den Halbstreifen $\mathfrak{H}_3$ gewonnen werden. $\mathfrak{H}_3$ ist gegeben durch

$$\sigma \leqq \sigma_1, \quad -\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq +\frac{\pi}{2}.$$

Für einen derartigen Halbstreifen gilt der *Satz von Phragmén und Lindelöf*[14]:

„Die Funktion $f(s)$ sei im Innern und auf dem Rande von $\mathfrak{H}_3$ regulär. (Eventuell mit Ausschluß des Unendlichen.) Weiter sei

$$|f(s)| \leqq 1$$

auf dem Rande von $\mathfrak{H}_3$, d. h. für $\sigma = \sigma_1$; $|t| \leqq \frac{\pi}{2}$ und für $|t| = \frac{\pi}{2}$; $\sigma \leqq \sigma_1$. Endlich gebe es zwei von σ unabhängige Konstanten C und γ, so daß

$$|f(s)| \leqq C\, e^{-\gamma\sigma}$$

[14]) Phragmén et Lindelöf, Sur une extension d'un principe classique de l'analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier, Acta math. 31 (1908), S. 381—406; vgl. z. B. Hurwitz-Courant, Funktionentheorie, 3. Aufl., Berlin 1929, S. 421/422.

im Innern von $\mathfrak{H}_3$. Dann gilt auch im Innern von $\mathfrak{H}_3$

$$|f(s)| \leqq 1.“$$

Wir wollen diesen Satz auf die Funktion

$$f(s) = \frac{I_3}{K_1 K_2 (K_6 + 1) e^{(\eta + \delta)s}}$$

anwenden, sofern $K_6 = \text{Max}\,(K_5; (K_4 + K_3))$. K_6 ist also wieder unabhängig von $u(s)$. Es ist dann $f(s)$ regulär für s aus $\mathfrak{H}$, also um so mehr im Innern und auf dem Rande von $\mathfrak{H}_3$. Weiter ist im Innern von $\mathfrak{H}_3$ nach (24) und (23)

$$|f(s)| \leqq \frac{e^{-\sigma}\pi \cdot 2 p_0 + 1}{K_6 + 1}.$$

Auf dem Rande von $\mathfrak{H}_3$ ist nach (25) sowie (26) und (23)

$$|f(s)| \leqq 1.$$

Der *Satz von Phragmén und Lindelöf* ist daher anwendbar und ergibt zusammen mit (25) für s aus $\mathfrak{H}_1$

$$I_3 \leqq K_1 \cdot K_2 \cdot (K_6 + 1)\, e^{(\eta + \delta)\sigma}.$$

Wir können zusammenfassen: *Unter unseren Annahmen für $u(s)$ und $\Phi(s)$ werden I_1, I_2 und I_3 in $\mathfrak{H}$ regulär sein, und es wird in $\mathfrak{H}_1$ gelten sowohl*

$$|I_1 + I_2| \leqq \tfrac{1}{2} K_7 e^{(\eta + \delta)\sigma} K_1 K_2 \tag{27}$$

als auch

$$|I_3| \leqq \tfrac{1}{2} K_7 e^{(\eta + \delta)\sigma} K_1 \cdot K_2, \tag{28}$$

sofern

$$\tfrac{1}{2} K_7 = \text{Max}\left((K_6 + 1);\ 2\left(\frac{1}{\delta} + \pi\right)\right). \tag{29}$$

K_7 ist dabei unabhängig von $u(s)$.

Wir können nun die Existenz der Integrale (17) *und* (18) *zeigen.* Es ist $x_1 = 1$. Daher ist für s aus $\mathfrak{H}_1$

$$|x_1| \leqq 1 \quad \text{und} \quad |x_1'| \leqq 1. \tag{30}$$

Durch vollständige Induktion soll gezeigt werden, daß alle Integrale existieren. Sind nämlich $x_{\nu-1}$ und $x'_{\nu-1}$ regulär in $\mathfrak{H}$ und gilt für s aus $\mathfrak{H}_1$

$$x_{\nu-1} \leqq K_8 \quad \text{und} \quad x'_{\nu-1} \leqq K_8; \quad \nu > 1,$$

so können wir unsere Abschätzungen anwenden, denn es gibt eine Zahl K_9, so daß für s aus $\mathfrak{H}_1$

$$|\varphi| \leqq K_9 e^{\delta\sigma} \quad \text{und} \quad |\psi(s)| \leqq K_9 e^{\delta\sigma}.$$

$\varphi(s)$ und $\psi(s)$ sind in $\mathfrak{H}$ reguläre Funktionen, denn es sind absolut und gleichmäßig konvergente Reihen.

Unsere Abschätzungen ergeben für s aus $\mathfrak{H}_1$

$$|x_\nu| \leqq K_8 \cdot K_9 \cdot K_7 e^{\delta\sigma} \quad \text{und} \quad |x'_\nu| \leqq K_8 \cdot K_9 \cdot K_7 e^{\delta\sigma}$$

x_ν und x'_ν sind wieder reguläre Funktionen in $\mathfrak{H}$. Daher existieren alle Integrale und sind regulär in $\mathfrak{H}$.

Nun zeigen wir die Konvergenz der Folge x_ν. Es ist $x_1 - x_0 = 1$ und $x_1' - x_0' = 0$, somit in $\mathfrak{H}_1$

$$|x_1 - x_0| \leqq 1 \quad \text{und} \quad |x_1' - x_0'| \leqq 1.$$

Gilt andererseits für irgendein $\nu > 1$ in $\mathfrak{H}_1$

$$|x_{\nu-1} - x_{\nu-2}| \leqq (K_9 K_7)^{\nu-2} e^{(\nu-2)\delta\sigma} \text{ und } |x_{\nu-2}' - x_{\nu-2}'| \leqq (K_9 \cdot K_7)^{\nu-2} e^{(\nu-2)\delta\sigma},$$

so folgt in $\mathfrak{H}_1$

$$\begin{aligned} |x_\nu - x_{\nu-1}| = \Big| & \int_{-\infty}^{s} (x_{\nu-1}' - x_{\nu-2}')\,\varphi + (x_{\nu-1} - x_{\nu-2})\,\psi\, d\zeta \\ & - \int_{-\infty}^{s} e^{2p_0(e^{-s} - e^{-\zeta})} \{(x_{\nu-1}' - x_{\nu-2}')\,\varphi + (x_{\nu-1} - x_{\nu-2})\,\psi\}\, d\zeta \Big| \\ & \leqq (K_9 K_7)^{\nu-1} e^{(\nu-1)\delta\sigma} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} |x_\nu' - x_{\nu-1}'| = \Big| & \int_{-\infty}^{s} e^{2p_0(e^{-s} - e^{-\zeta})}\, 2p_0 e^{-s} \{(x_{\nu-1}' - x_{\nu-2}')\varphi + (x_{\nu-1} - x_{\nu-2})\,\psi\}\, d\zeta \\ & \leqq (K_9 \cdot K_7)^{\nu-1} e^{(\nu-1)\delta\sigma}. \end{aligned}$$

Die Reihe $\sum_{\nu=1} (K_9 K_7)^{\nu-1} e^{(\nu-1)\delta\sigma}$ ist also eine Majorante für

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (x_\nu - x_{\nu-1}) = \lim x_\nu$$

und für

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (x_\nu' - x_{\nu-1}') = \lim x_\nu'.$$

Es gibt also einen Halbstreifen $\mathfrak{H}_4$

$$\sigma \leqq \sigma_2 \leqq \sigma_1;\ |t| \leqq \pi - \varepsilon,$$

so daß in $\mathfrak{H}_4$ beide Reihen gleichmäßig konvergieren.

Wir können jetzt zeigen, daß $\lim x_\nu$ *die Differentialgleichung* (10) *erfüllt.* Wir lösen dazu die Differentialgleichung

$$x'' + (2p_0 e^{-s} + 1)\, x' = -(\lim x_\nu')\Big(2e^{-s} \sum_{\nu=1}^{N} p_\nu e^{\lambda_\nu s} - 1\Big) - (\lim x_\nu) e^{-2s} \sum_{\nu=N+1}^{\infty} b_\nu e^{\lambda_\nu s}$$

mit der Anfangsbedingung

$$x(\sigma) \to 1;\ x'(\sigma) \to 0 \quad \text{für} \quad \sigma \to -\infty.$$

Variation der Konstanten ergibt

$$\begin{aligned} (31) \qquad x = 1 + & \int_{-\infty}^{s} (\lim x_\mu'(\zeta))\,\varphi(\zeta) + (\lim x_\mu(\zeta))\,\psi(\zeta)\, d\zeta \\ & - \int_{-\infty}^{s} e^{2p_0(e^{-s} - e^{-\zeta})} \{(\lim x_\mu'(\zeta))\varphi(\zeta) + (\lim x_\mu(\zeta))\,\psi(\zeta)\}\, d\zeta \end{aligned}$$

und

$$(32) \qquad x' = \int_{-\infty}^{s} e^{2p_0(e^{-s} - e^{-\zeta})}\,(2p_0 e^{-s})\,\{(\lim x_\mu'(\zeta))\,\varphi(\zeta) + (\lim x_\mu(\zeta))\,\psi(\zeta)\}\, d\zeta.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Folgen

$$\lim x_\mu \quad \text{und} \quad \lim x'_\mu$$

sind beide regulär im Innern von $\mathfrak{H}_4$ und es gibt einen Halbstreifen $\mathfrak{H}_5$

$$\sigma \leqq \sigma_3 < \sigma_2; \quad |t| \leqq \pi - \varepsilon,$$

so daß in $\mathfrak{H}_5$

$$|x_{\nu-1} - \lim_{\mu\to\infty} x_\mu| \leqq \varepsilon_1 \quad \text{und} \quad |x'_{\nu-1} - \lim_{\mu\to\infty} x_\mu| \leqq \varepsilon_1;\ \varepsilon_1 > 0;\ \nu > N_{\varepsilon_1}.$$

Die Integrale (31) und (32) existieren daher in $\mathfrak{H}_4$ und es wird in $\mathfrak{H}_5$

$$\begin{aligned} |x - x_\nu| = \Big| &\int_{-\infty}^{s} [\lim x'_\mu - x'_{\nu-1}]\,\varphi + [\lim x_\mu - x_{\nu-1}]\,\psi\, d\zeta \\ &- \int_{-\infty}^{s} e^{2p_0(e^{-s}-e^{-\zeta})}\{[\lim x' - x'_{\nu-1}]\,\varphi + [\lim x_\mu - x_{\nu-1}]\,\psi\}\, d\zeta \Big| \\ &\leqq \varepsilon_1 \cdot K_9 \cdot K_7 \cdot e^{\delta\sigma_3} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} |x' - x'_\nu| = \Big| &\int_{-\infty}^{s} e^{2p_0(e^{-s}-e^{-\zeta})}(2p_0 e^{-s})\{[\lim x'_\mu - x'_{\nu-1}]\,\varphi \\ &+ [\lim x_\mu - x_{\nu-1}]\,\psi\}\, d\zeta \Big| \leqq \varepsilon_1 \cdot K_9 \cdot K_7 \cdot e^{\delta\sigma_3}. \end{aligned}$$

Also ist $x = \lim x_\mu$ und $x' = \lim x'_\mu$. Die Differentialgleichung wird durch $x = \lim x_\nu$ erfüllt mit der Anfangsbedingung $\begin{cases} x(\sigma) \to 1 \\ x'(\sigma) \to 0 \end{cases}$ für $\sigma \to -\infty$.

Wir wollen jetzt eine asymptotische Darstellung für x und x' gewinnen. Es ist

$$x = \sum_{\mu=1}^{M} (x_\mu - x_{\mu-1}) + o\,(e^{(M-1)\delta s}), \tag{33}$$

denn in $\mathfrak{H}_4$ ist

$$\Big| \sum_{\mu=M+1}^{\infty} (x_\mu - x_{\mu-1}) \Big| \leqq \sum_{\mu=M+1}^{\infty} (K_9 \cdot K_7)^{\mu-1} e^{(\mu-1)\delta\sigma}.$$

Ebenso gilt

$$x' = \sum_{\mu=1}^{M} (x'_\mu - x'_{\mu-1}) + o\,(e^{(M-1)\delta\sigma}). \tag{34}$$

Wir müssen nun zeigen, es ist für $\nu \leqq M$

$$(x_\mu - x_{\mu-1}) = \sum_{\nu=0}^{M_\mu} e^{\lambda_{\mu\nu} s} c_{\mu\nu} + o\,(e^{(M-1)\delta s});\ \Re(\lambda_{\mu\nu}) \leqq 0 \quad \text{und}$$

$$(x'_\mu - x'_{\mu-1}) = \sum_{\nu=0}^{M'_\mu} e^{\lambda'_{\mu\nu} s} c'_{\mu\nu} + o\,(e^{(M-1)\delta s});\ \Re(\lambda'_{\mu\nu}) \leqq 0.$$

Für $\mu = 1$ ist das sicher richtig. Für $\mu > 1$ soll (35) durch vollständige Induktion gezeigt werden.

Wir setzen (35) als richtig voraus, falls μ durch $\mu - 1$ ersetzt wird. Dann wird (vgl. (17))

$$x_\mu - x_{\mu-1} = \int_{-\infty}^{s} \sum_{\nu=0}^{M'_\mu - 1} e^{\lambda'_{\mu-1,\nu}\zeta} c'_{\mu-1,\nu}\varphi(\zeta) + \sum_{\nu=0}^{M_\mu - 1} e^{\lambda_{\mu-1,\nu}\zeta} c_{\mu-1,\nu}\psi(\zeta)\, d\zeta$$

$$+ \int_{-\infty}^{s} o\left(e^{(M-1)\delta\zeta}\right)\{\varphi(\zeta) + \psi(\zeta)\}\, d\zeta$$

$$- \int_{-\infty}^{s} e^{2p_0(e^{-s} - e^{-\zeta})}\left\{\sum_{\nu=0}^{M'_\mu - 1} e^{\lambda'_{\mu-1,\nu}\zeta} c'_{\mu-1,\nu}\varphi(\zeta) + \sum_{\nu=0}^{M_\mu - 1} e^{\lambda_{\mu-1,\nu}\zeta} c_{\mu-1,\nu}\psi(\zeta)\right\} d\zeta$$

$$- \int_{-\infty}^{s} e^{2p_0(e^{-s} - e^{-\zeta})}\, o\left(e^{(M-1)\delta\zeta}\right)\{\varphi(\zeta) + \psi(\zeta)\}\, d\zeta.$$

Wendet man nun die Abschätzung (27) für (19) und (21) an, indem man $u = o\left(e^{(M-1)\delta\zeta}\right)$ setzt, so folgt

$$(36)\quad x_\mu - x_{\mu-1} = \int_{-\infty}^{s} \sum_{\nu=0}^{M'_\mu - 1} e^{\lambda'_{\mu-1,\nu}\zeta} c'_{\mu-1,\nu}\varphi(\zeta) + \sum_{\nu=0}^{M_\mu - 1} e^{\lambda_{\mu-1,\nu}\zeta} c_{\mu-1,\nu}\psi(\zeta)\, d\zeta$$

$$+ \int_{-\infty}^{s} e^{2p_0(e^{-s} - e^{-\zeta})}\left\{\sum_{\nu=0}^{M'_\mu - 1} e^{\lambda'_{\mu-1,\nu}\zeta} c'_{\mu-1,\nu}\varphi(\zeta) + \sum_{\nu=0}^{M_\mu - 1} e^{\lambda_{\mu-1,\nu}\zeta} c_{\mu-1,\nu}\psi(\zeta)\right\} d\zeta$$

$$+ o\left(e^{(M-1)\delta s}\right).$$

Weiter folgt aus (35) vermöge (18), falls wieder μ durch $\mu - 1$ ersetzt ist,

$$x'_\mu - x'_{\mu-1} = e^{-s} \int_{-\infty}^{s} e^{2p_0(e^{-s} - e^{-\zeta})} \cdot 2p_0$$

$$\cdot \left\{\sum_{\nu=0}^{M'_\mu - 1} e^{\lambda'_{\mu-1,\nu}\zeta} c'_{\mu-1,\nu}\varphi(\zeta) + \sum_{\nu=0}^{M_\mu - 1} e^{\lambda_{\mu-1,\nu}\zeta} c_{\mu-1,\nu}\psi(\zeta)\right\} d\zeta$$

$$+ e^{-s} \int_{-\infty}^{s} e^{2p_0(e^{-s} - e^{-\zeta})} \cdot 2p_0 \cdot o\left(e^{(M-1)\delta s}\right)\{\varphi(\zeta) + \psi(\zeta)\}\, d\zeta.$$

Die Abschätzung (28) für (22) ist mit $u = o\left(e^{(M-1)\delta s}\right)$ anwendbar, denn der Ausdruck $o\left(e^{(M-1)\delta s}\right)$ vertritt in (35) eine in $\mathfrak{H}$ reguläre Funktion, da er als Differenz zweier in $\mathfrak{H}$ regulärer Funktionen gegeben ist. Daher wird

$$(37)\quad (x'_\mu - x'_{\mu-1}) = e^{-s} \int_{-\infty}^{s} e^{2p_0(e^{-s} - e^{-\zeta})} \cdot 2p_0$$

$$\cdot \left\{\sum_{\nu=0}^{M'_\mu - 1} e^{\lambda'_{\mu-1,\nu}\zeta} c'_{\mu-1,\nu}\varphi(\xi) + \sum_{\nu=0}^{M_\mu - 1} e^{\lambda_{\mu-1,\nu}\zeta} c_{\mu-1,\nu}\psi(\zeta)\right\} d\zeta + o\left(e^{(M-1)\delta s}\right).$$

Dabei könnten wir wie auch in (36) $o\left(e^{M\delta s}\right)$ schreiben.

Für das erste Integral (36) erhält man durch gliedweise Integration eine gleichmäßig konvergente Dirichletsche Reihe. Das zweite Integral (36) sowie das Integral (37) sind vom Typus

$$(38)\qquad J = \int_{-\infty}^{s} e^{2p_0(e^{-s} - e^{-\zeta})}\, \Psi(\zeta)\, d\zeta.$$

Bezüglich des Integrals (37) verdient betont zu werden, daß es ebenso wie die Integrale (36) unseren allgemeinen Abschätzungen (27) bzw. (28) mit geeigneten Konstanten genügt. Daher sind auch in (35) alle $\Re(\lambda'_{\mu\nu}) \geqq 0$, falls (35) sich als richtig erweisen wird.

$\Psi(\zeta)$ ist in (38) durch eine gleichmäßig konvergente Dirichletsche Reihe gegeben. Wir können zerlegen

$$\begin{aligned} J &= \int_{-\infty}^{s} e^{2p_0(e^{-s}-e^{-\zeta})} \sum_{\nu=0}^{M_{J_1}} e^{\lambda_{J_1\nu}\zeta} c_{J_1}\, d\zeta \\ &\quad + \int_{-\infty}^{s} e^{2p_0(e^{-s}-e^{-\zeta})}\, o\left(e^{\{1+(M-1)\delta\}\zeta}\right) d\zeta \\ &= \int_{-\infty}^{s} e^{2p_0(e^{-s}-e^{-\zeta})} \sum_{\nu=0}^{M_{J_1}} e^{\lambda_{J_1\nu}\zeta} c_{J_1\nu}\, d\zeta + o\left(e^{\{1+(M-1)\delta\}s}\right) \\ &= J_1 + o\left(e^{\{1+(M-1)\delta\}s}\right). \end{aligned}$$

J_1 kann partiell ausgeführt werden und ergibt

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{-\infty}^{s} \frac{d}{d\zeta}\left(e^{2p_0(e^{-s}-e^{-\zeta})}\right) \cdot \frac{e^{\zeta}}{2p_0} \sum_{\nu=0}^{M_{J_1}} e^{\lambda_{J_1\nu}\zeta} c_{J_1\nu}\, d\zeta \\ &= \frac{e^{s}}{2p_0} \sum_{\nu=0}^{M_{J_1}} e^{\lambda_{J_1\nu}s} c_{J_1\nu} - \int_{-\infty}^{s} e^{2p_0(e^{-s}-e^{-\zeta})} \frac{d}{d\zeta}\left(\frac{e^{\zeta}}{2p_0} \sum_{\nu=0}^{M_{J_1}} e^{\lambda_{J_1\nu}\zeta} c_{J_1\nu}\right) d\zeta \\ &= \frac{e^{s}}{2p_0} \sum_{\nu=0}^{M_{J_1}} e^{\lambda_{J_1\nu}s} c_{J_1\nu} + J_2. \end{aligned}$$

J_2 ist vom gleichen Typus wie J_1, doch sind alle Exponentenpunkte des Polynoms um $+1$ verschoben. J_2 kann nach dem gleichen Verfahren wie J_1 behandelt werden. Durch wiederholte Anwendung des Verfahrens kann man also erreichen, daß

$$J = \sum_{\nu=0}^{M_J} e^{\lambda_{J\nu}s} c_{J\nu} + o\left(e^{\{1+(M-1)\delta\}s}\right).$$

Es wird also in der Tat

$$x_\mu - x_{\mu-1} = \sum_{\nu=0}^{M_\mu} e^{\lambda_{\mu\nu}s} c_{\mu\nu} + o\left(e^{(M-1)\delta s}\right). \tag{39}$$

und

$$x'_\mu - x'_{\mu-1} = \sum_{\nu=0}^{M'_\mu} e^{\lambda'_{\mu\nu}s} c'_{\mu\nu} + o\left(e^{(M-1)\delta s}\right). \tag{40}$$

Es wird daher nach (39) und (33)

$$x = \sum_{\mu=0}^{M^0} e^{\lambda^0_\mu s} c^0_\mu + o\left(e^{(M-1)\delta s}\right)$$

und

$$x' = \sum_{\mu=0}^{M'} e^{\lambda'_\mu s}\, c'_\mu + o\left(e^{(M-1)\delta s}\right).$$

Aus

$$x'' = -\left(x' 2\, e^{-s} \sum_{\nu=0}^{N} p_\nu\, e^{\lambda_\nu s} + x\, e^{-2s} \sum_{\nu=N+1}^{\infty} b_\nu\, e^{\lambda_\nu s}\right) \tag{41}$$

folgt daher

$$x'' = \sum_{\mu=0}^{M''} e^{\lambda''_\mu s}\, c''_\mu + o\left(e^{(M-1)\delta s}\right).$$

Alle diese Darstellungen können für jedes $M \geqq 1$ gewonnen werden. Ist $M_1 > M$, so dürfen sich die beiden dazugehörigen Darstellungen nur um $o\left(e^{(M-1)\delta s}\right)$ unterscheiden. Sie stimmen also in den Anfangsgliedern überein, und wir dürfen schreiben

$$x \sim \sum_{\mu=0}^{\infty} c^0_\mu\, e^{\lambda^0_\mu s}, \tag{42}$$

$$x' \sim \sum_{\mu=0}^{\infty} c'_\mu\, e^{\lambda'_\mu s}, \tag{43}$$

$$x'' \sim \sum_{\mu=0}^{\infty} c''_\mu\, e^{\lambda''_\mu s}. \tag{44}$$

Die durch gliedweise Integration aus (43) und (44) gewonnenen Reihen müssen mit (42) bzw. (43) übereinstimmen. Daher wird

$$x' \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu\, \lambda^0_\nu\, e^{\lambda^0_\nu s}$$

und

$$x'' \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu\, (\lambda^0_\nu)^2\, e^{\lambda^0_\nu s}.$$

Andererseits gilt (41). Daher erfüllt (42) die Differentialgleichung (10) formal.

§ 2.

Die zweite Lösung. Beispiele.

Um eine zweite Lösung unserer Differentialgleichung zu finden, erinnern wir uns, daß wir zur Bestimmung von p_0 nach (8) zwei Möglichkeiten hatten.

Wir wollen zunächst zeigen, daß zu jeder dieser beiden Zahlen

$$p_{0\,\mathrm{I}} > 0 \quad \text{und} \quad p_{0\,\mathrm{II}} < 0$$

eine formale Lösung leicht berechnet werden kann. Die Differentialgleichung (10) läßt sich schreiben für $p_{0\,\mathrm{I}}$

$$e^s\, y_1'' + y_1' \sum_{\nu=0}^{\infty} b^{\mathrm{I}}_{1\nu}\, e^{\lambda_\nu s} + y_1 \sum_{\nu=0}^{\infty} b^{\mathrm{I}}_{2\nu}\, e^{\lambda_\nu s} = 0, \tag{45}$$

für $p_{0\,\mathrm{II}}$

$$e^s\, y_1'' + y' \sum_{\nu=0}^{\infty} b^{\mathrm{II}}_{1\nu}\, e^{\lambda_\nu s} + y_1 \sum_{\nu=0}^{\infty} b^{\mathrm{II}}_{2\nu}\, e^{\lambda_\nu s} = 0. \tag{46}$$

Zu jedem der beiden p_0 gibt es also andere Zahlen $b_{t\nu}$. Die Λ_ν sind aber in (45) und (46) gleich. Dabei enthalte die Menge $\{\Lambda_\nu\}$ alle Zahlen $\{\lambda_\nu - \lambda_N\}$ für $\nu \geqq N$ sowie mit $\Lambda_{\nu'}$ und $\Lambda_{\nu''}$ auch $(\Lambda_{\nu'} + \Lambda_{\nu''})$. $\{\Lambda_\nu\}$ enthält also auch $\{\lambda_\nu\}$ und $\lambda_N = 1$. Endlich ist $\Re(\Lambda_\nu) > 0$ für $\nu > 0$.

Wir machen den Ansatz

$$y_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu\,\mathrm{I}}\, e^{\Lambda_\nu s} \quad \text{bzw.} \quad y_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu\,\mathrm{II}}\, e^{\Lambda_\nu s}.$$

Es muß dann für alle ν gelten, wenn die Gleichungen (45) bzw. (46) formal erfüllt werden sollen

$$(47)\qquad \sum_{0 \leqq \nu' \leqq \nu} (\Lambda_{\nu'})^2 c_{\nu'}\, \delta^{\Lambda_\nu}_{\Lambda_{\nu'}+1} + \sum_{\substack{0 \leqq \nu' \leqq \nu \\ 0 \leqq \nu'' \leqq \nu}} \Lambda_{\nu'} c_{\nu'} b_{1\nu''}\, \delta^{\Lambda_\nu}_{\Lambda_{\nu'}+\Lambda_{\nu''}} + \sum_{\substack{0 \leqq \nu' \leqq \nu \\ 0 \leqq \nu'' \leqq \nu}} c_{\nu'} b_{2\nu''}\, \delta^{\Lambda_\nu}_{\Lambda_{\nu'}+\Lambda_{\nu''}} = 0.$$

Die Indizes I oder II sind dabei weggelassen. Wegen $b_{10} \neq 0$ und $b_{20} = 0$ ist (47) gleichbedeutend mit

$$(48)\qquad \Lambda_\nu c_\nu b_{10} = -\sum_{0 \leqq \nu' < \nu} (\Lambda_{\nu'})^2 c_{\nu'}\, \delta^{\Lambda_\nu}_{\Lambda_{\nu'}+1} - \sum_{\substack{0 \leqq \nu' < \nu \\ 0 < \nu'' \leqq \nu}} \Lambda_{\nu'} c_{\nu'} b_{1\nu''}\, \delta^{\Lambda_\nu}_{\Lambda_{\nu'}+\Lambda_{\nu''}} - \sum_{\substack{0 \leqq \nu' < \nu \\ 0 < \nu'' \leqq \nu}} c_{\nu'} b_{2\nu''}\, \delta^{\Lambda_\nu}_{\Lambda_{\nu'}+\Lambda_{\nu''}}.$$

Wegen $\Lambda_0 = 0$ ist dieses Gleichungssystem auflösbar. c_0 ist beliebig. Nachdem c_0 ausgewählt ist, sind alle anderen Koeffizienten eindeutig bestimmt. Eine formale Lösung kann auch keine anderen Exponenten besitzen, denn für eine Zahl Λ_ν^*, die nicht unter den Λ_ν enthalten ist, müßte gelten

$$\Lambda_\nu^* c_\nu b_{10} = 0.$$

Die Differentialgleichung (1) *hat also in erweitertem Sinne die beiden formalen Lösungen*

$$(49)\qquad y_{\mathrm{I}} = e^{\int e^{-s} \sum_{\nu=0}^{N} p_{\nu\,\mathrm{I}} e^{\lambda_\nu s}\, ds} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu\,\mathrm{I}}\, e^{\Lambda_\nu s}$$

und

$$(50)\qquad y_{\mathrm{II}} = e^{\int e^{-s} \sum_{\nu=0}^{N} p_{\nu\,\mathrm{II}} e^{\lambda_\nu s}\, ds} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu\,\mathrm{II}}\, e^{\Lambda_\nu s}.$$

Die erste formale Lösung (49) *muß für* $c_{0\,\mathrm{I}} = 1$ *mit der durch* (42) *gegebenen übereinstimmen und ist daher asymptotische Darstellung für eine Lösung von* (1) *in* $\mathfrak{H}$.

Die andere Lösung ist aber asymptotische Darstellung für eine Lösung von (1) *in* $\mathfrak{H}^*$

$$\sigma < \sigma_0;\ \varepsilon < t < 2\pi - \varepsilon.$$

Denn wählt man in (10) für p_0 den anderen Wert

$$p_{0\,\mathrm{II}} = -|\sqrt{-a_0}|,$$

so kann diese Gleichung nach der Transformation

$$s = s_1 + i\pi$$

ebenso behandelt werden, wie im § 1 im Falle $p_{0\,\mathrm{I}}$ angegeben wurde. Nach dieser Transformation lautet nämlich der Koeffizient der ersten Anleitung in der entstehenden Gleichung

$$2e^{-s_1}\sum_{\nu=0}^{N} p_\nu^* e^{\lambda_\nu s_1} \quad \text{mit} \quad p_0^* = e^{-i\pi}\cdot 2\,p_{0\,\mathrm{II}} > 0.$$

Die beiden Lösungen der Differentialgleichung (1), die durch (49) und (50) asymptotisch dargestellt werden für $\varepsilon < t < \pi - \varepsilon$; $\sigma < \sigma_0$, bilden ein Hauptsystem. Um das zu zeigen, untersuchen wir ihr Verhalten für $s = \sigma + it$; $\sigma \to -\infty$; t fest. Wir wollen zunächst sehen, wie sich

$$\varphi_0 = \left| e^{-p_0 e^{-s} + \left(\sum_{\nu=1}^{N} e^{(\lambda_\nu - 1)s}\frac{p_\nu}{\lambda_\nu - 1}\right)} \right|; \quad p_0 \text{ reell},$$

bei diesem Grenzübergang verhält. Es wird

$$\varphi_0 = e^{-p_0 e^{-\sigma}\cos t}\cdot e^{\sum_{\nu=1}^{N} e^{\Re(\lambda_\nu - 1)\sigma - \Im(\lambda_\nu)t}\cdot\psi_\nu},$$

wobei

$$\psi_\nu = \left\{\Re\left(\frac{p_\nu}{\lambda_\nu - 1}\right)\cos\left(\Re(\lambda_\nu - 1)t + \Im(\lambda_\nu)\sigma\right) - \Im\left(\frac{p_\nu}{\lambda_\nu - 1}\right)\sin\left(\Re(\lambda_\nu - 1)t + \Im(\lambda_\nu)\sigma\right)\right\},$$

also

$$\varphi_0 = e^{p_0 e^{-\sigma}\cos t + o(e^{-\sigma})}.$$

Für $0 \leqq t < \frac{\pi}{2}$ und $p_0 > 0$ geht daher $\varphi_0 \to 0$, während φ_0 für $p_0 < 0$ und $0 \leqq t < \frac{\pi}{2}$ über alle Grenzen wächst. Daher ist bei unserem Grenzübergang für $\varepsilon < t < \frac{\pi}{2}$

$$\lim |y_{\mathrm{I}}| = 0$$

und

$$\lim |y_{\mathrm{II}}| = \infty.$$

Die Lösungen sind daher linear unabhängig.

Wir wollen nun noch zwei *Beispiele* betrachten. Es sei einmal in (1) a gegeben durch eine Dirichletsche Reihe mit nur reellen Exponenten. Die Reihe möge im übrigen unsere Voraussetzungen erfüllen. Dabei sei $\omega = -1$. Es ist jetzt

$$T = \infty.$$

Dann findet man nach § 1, indem man

$$s = s_1 + i\,h\,2\,\pi$$

mit ganzzahligen h setzt, asymptotische Darstellungen für Lösungen unserer Differentialgleichung in den Halbstreifen

$$\sigma < \sigma_0;\ (2\,h - 1)\,\pi + \varepsilon < t < (2\,h + 1)\,\pi - \varepsilon.$$

Setzt man aber mit ganzzahligem h

$$s = s_1 + i\,(2\,h + 1)\,\pi,$$

so findet man asymptotische Darstellungen in den Halbstreifen

$$\sigma < \sigma_0;\ 2\,\pi\,h + \varepsilon < t < 2\,(h + 1)\,\pi - \varepsilon.$$

Dabei sind die in den Halbstreifen (g ganzzahlig)

$$\sigma < \sigma_0;\ g\,\pi + \varepsilon < t < (g + 1)\,\pi - \varepsilon$$

dargestellten Funktionen linear unabhängig. Für dieses Beispiel war offenbar nur wesentlich, daß $T = \infty$. Ist dies der Fall, so kann man das Beispiel auch mit komplexen Exponenten durchführen.

Als zweites Beispiel sei vorgelegt die Gleichung

$$y'' + y \sum_{\nu=1}^{M} e^{\alpha_\mu s} a_\mu = 0, \tag{51}$$

wobei $a_\mu \neq 0$ und α_μ beliebige komplexe Zahlen sein mögen. Wir setzen für irgendein $\mu = \mu^*$ mit $\alpha_{\mu^*} \neq 0$

$$s = \frac{-2\,s_1}{\alpha_{\mu^*}}.$$

Dadurch geht (51) über in

$$\frac{d^2}{ds_1^2}\,y + \sum_{\mu=1}^{M} e^{-\frac{2\,\alpha_\mu}{\alpha_{\mu^*}}\,s_1} \cdot a_\mu \frac{4}{(\alpha_{\mu^*})^2}\,y = 0.$$

Ist nun

$$\Re\left(\frac{-2\,\alpha_\mu}{\alpha_{\mu^*}}\right) > \Re\left(\frac{-2\,\alpha_{\mu^*}}{\alpha_{\mu^*}}\right) = -2;\ \text{für } \mu \neq \mu^*, \tag{52}$$

so können wir unseren Satz anwenden. Geht man für $s_1 = \sigma + it$ in geeigneten Halbstreifen mit $\sigma \to -\infty$, so findet man in diesen Streifen asymptotische Darstellungen für ein Hauptsystem von Lösungen.

(52) ist z. B. für alle μ; μ^* erfüllt, wenn die α_μ als Wurzeln der Gleichung

$$\alpha^M = 1$$

gegeben sind.

(Eingegangen am 20. September 1939.)

Über positive harmonische Funktionen in einem Halbraum.

Von

Alexander Dinghas in Berlin.

1. In einer Arbeit aus dem vorigen Jahre[1]) begründete ich im Anschluß an R. Nevanlinna[2]) und mit Hilfe der Poissonschen Formel für den Halbkreis die Darstellung einer in der rechten Halbebene $x > 0$ positiven harmonischen Funktion $u(z)$ $(z = x + iy)$ durch ein Stieltjessches Integral

$$u(\zeta) = \frac{\xi}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Theta(y)}{|\zeta - iy|^2} + c\,\xi \qquad (\zeta = \xi + i\eta) \tag{1.1}$$

und wies zugleich auf eine Folgerung dieser Darstellung hin, nämlich auf einen neuen Beweis des Julia-Wolf-Carathéodoryschen Satzes[3]). Dabei bewies ich noch folgenden Zusatz:

Hat die in $x > 0$ reguläre analytische Funktion $w = u + iv$ dort einen positiven Realteil, so ist der Ausdruck

$$\frac{m(r)}{r} = \frac{1}{r} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} u(re^{i\varphi}) \cos\varphi\, d\varphi \qquad (z = re^{i\varphi}) \tag{1.2}$$

eine nicht zunehmende Funktion von r, es existiert also der endliche Grenzwert

$$\lim_{r \to \infty} \frac{m(r)}{r} = c. \tag{1.3}$$

Es war mir damals entgangen, daß Wolf[4]) den Julia-Wolf-Carathéodoryschen Satz (mit Ausnahme der Monotonität von $\frac{m(r)}{r}$ auf ähnlichem Wege bewiesen hatte.

---

[1]) Über das Phragmén-Lindelöfsche Prinzip und den Julia-Carathéodoryschen Satz, Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. Mathem. Phys. Kl. 1938.

[2]) Eindeutige analytische Funktionen, Berlin, Julius Springer, 1935.

[3]) Julia, Extension nouvelle d'un lemme de Schwarz, Acta Math. 42 (1920), S. Wolf. Sur une généralisation d'un théorème de Schwarz, C. R. acad. Sc. Paris 182 (1926), S. 918–920; Carathéodory, Über die Winkelderivierten von beschränkten analytischen Funktionen, Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. Math. Phys. Klasse 1929.

Nun bewies Tsuji[5]) in einer Arbeit aus diesem Jahre die Darstellung (1. 1) auf anderem Wege, von der gewöhnlichen Poissonschen Darstellung ausgehend und zeigte unter anderem, daß $\frac{m}{r}$ sogar eine konkave Funktion von $\frac{1}{r^2}$ ist.

Der Tsujische Weg ist kürzer als der meinige, benutzt aber tieferliegende Sätze der Lebesgueschen Integrationstheorie. Er ist aber insofern von Interesse, als er eine Verallgemeinerung von (1. 1) in mehrdimensionalen Räumen auf einfachem Wege gestattet.

In der vorliegenden Arbeit gebe ich zunächst eine Darstellung einer in $x_1 > 0$ positiven harmonischen Funktion $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ der reellen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ durch ein Stieltjes-Radonsches Integral und beweise das Analogon von (1. 3) nebst der Tsujischen Verschärfung. Darüber hinaus kann man sogar zeigen, daß $m(r)\, r^{n-1}$ eine konkave Funktion von r^n ist. Zum Schluß beweise ich noch ein Analogon des Julia-Wolf-Carathéodoryschen Satzes.

2. Die Poissonsche Formel in R_n und die Stieltjes-Radonsche Darstellung von u. Wir betrachten den n-dimensionalen Raum R_n ($n \geqq 2$) und bezeichnen die Koordinaten eines Punktes P von R_n in bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem O mit $x_1, \ldots, x_n$. Ferner führen wir Polarkoordinaten durch die bekannten Formeln

$$
\begin{aligned}
x_1 &= r \cos \vartheta_1 \\
x_2 &= r \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_{n-1} &= r \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \ldots \cos \vartheta_{n-1} \\
x_n &= r \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \ldots \sin \vartheta_{n-1}
\end{aligned}
\tag{2. 1}
$$

ein, wobei $0 \leqq \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-2} \leqq \pi$ und $0 \leqq \vartheta_{n-1} \leqq 2\pi$ ist. Dabei bedeutet r die Entfernung des Punktes P vom Nullpunkt.

Wir betrachten jetzt eine Kugel $\mathfrak{K}$ vom Radius R um den Nullpunkt und setzen voraus, daß $V(Q)$ eine innerhalb und auf dem Rande $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{K}$

---

[4]) Julius Wolf und F. de Kok, Les fonctions méromorphes à partie réelle positive et l'intégrale de Stieltjes, Bull. soc. math. 60 (1932), S. 221—227. Die Darstellung scheint übrigens von R. Nevanlinna herzurühren. Vgl. Asymptotische Entwicklungen beschränkter Funktionen und das Stieltjessche Momentenproblem, Annales Acad. Scient. Fennicae, Ser A., Bd. 18, No. 5.

[5]) Tsuji, On a positive harmonic function in a half-plane, Jap. Journ. of Math. Vol. 15 (1939).

reguläre, harmonische Funktion des Punktes Q ist. Ist dann P ein innerer Punkt von $\mathfrak{R}$, so gilt die Poissonsche Formel[6])

$$V(P) = \frac{1}{\omega_n R} \int_{\mathfrak{S}} V(Q) \frac{R^2 - \varrho^2}{r^n} do, \tag{2.2}$$

wobei ϱ die Entfernung des Punktes P vom Nullpunkt bedeutet, r die gegenseitige Entfernung von P und Q darstellt und $d\,0$ das Oberflächenelement von $\mathfrak{S}$ ist. ω_n ist ferner gleich der Gesamtoberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel.

Wir wenden jetzt (2. 2) auf unsere Funktion $u(x_1, \ldots, x_n) = u(P)$ an, und zwar auf eine um R verschobene Kugel vom Radius R

$$(x_1 - R)^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = R^2 \tag{2.3}$$

und setzen

$$x_1 = \bar{x}_1 + R, \quad x_i = \bar{x}_i \qquad (i = 2, 3, \ldots, n). \tag{2.4}$$

Dabei nehmen wir zuerst an, daß $u(P)$ noch im Nullpunkt regulär harmonisch ist. Der allgemeine Fall kann dann durch einen wohlbekannten Grenzübergang erledigt werden.

Indem wir (2. 2) in dem neuen System $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ anwenden, erhalten wir

$$u(P) = \frac{1}{\omega_n R} \int u(\bar{Q}) \frac{R^2 - \bar{\varrho}^2}{\bar{r}^n} do, \tag{2.5}$$

wobei die Integration über die Oberfläche $\bar{\mathfrak{S}}$ der Kugel $\bar{\mathfrak{R}}$

$$\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \ldots \quad + \bar{x}_n^2 = R^2 \tag{2.6}$$

erstreckt wird. Kehren wir teilweise zum ursprünglichen System O zurück, so finden wir, wenn $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ die Koordinaten von P sind

$$\bar{\varrho}^2 = R^2 - 2R\xi_1 + \sum_1^n \xi_i^2 = R^2 - 2R\xi_1 + \varrho^2, \tag{2.7}$$

und durch Einsetzen

$$u(P) = \frac{1}{\omega_n R} \int_{\bar{\mathfrak{S}}} u(Q) \frac{2R\xi_1 - \varrho^2}{\bar{r}_n} do. \tag{2.8}$$

Wir bezeichnen nun die Polarkoordinaten von $\bar{Q}$ in bezug auf das System $\bar{O}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ durch $R, \bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \ldots, \bar{\varphi}_{n-1}$ und haben zuerst

$$d\bar{o} = R^{n-1} \sin \bar{\varphi}_1^{n-2} \sin \bar{\varphi}_2^{n-3} \ldots \sin \bar{\varphi}_{n-1}. \tag{2.9}$$

---

[6]) Poincaré, Sur les propriétés du potentiel et sur les fonctions Abeliennes, Acta Math. 22 (1899), S. 89—178. Ferner Carathéodory, On Dirichlets Problem, Am. Journal of Math. 59 (1937), S. 709.

Wegen (2. 4) ist ferner

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 2R\cos^2\frac{\bar{\varphi}_1}{2},\\
x_2 &= R\sin\bar{\varphi}_1\cos\bar{\varphi}_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_{n-1} &= R\sin\bar{\varphi}_1\sin\bar{\varphi}_2\ldots\cos\bar{\varphi}_{n-1}\\
x_n &= R\sin\bar{\varphi}_1\sin\bar{\varphi}_2\ldots\sin\bar{\varphi}_{n-1}
\end{aligned}
\tag{2. 10}
$$

Wir schreiben nun

$$\bar{\varphi}_1 = 2\vartheta, \quad \bar{\varphi}_k = \varphi_k \qquad (k = 2, 3, \ldots n-1),$$

und haben als Koordinaten des Punktes $\bar{Q}$ in dem ursprünglichen System O

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 2R\cos^2\vartheta\\
x_2 &= R\sin 2\vartheta\cos\varphi_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_{n-1} &= R\sin 2\vartheta\sin\varphi_2\ldots\cos\varphi_{n-1}\\
x_n &= R\sin 2\vartheta\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-1}.
\end{aligned}
\tag{2. 11}
$$

Wir schreiben ferner

$$u(\bar{Q}) = u(Q) = u(x_k) = u(2R\cos^2\vartheta, R\sin 2\vartheta\cos\varphi_2, \ldots, R\sin 2\vartheta\ldots\sin\varphi_{n-1}),$$

und erhalten unter Berücksichtigung von (2. 9), (2. 11)

$$u(P) = (1+\varepsilon(R))\frac{2\xi_1}{\omega_n}\int u(Q)\frac{2R}{\bar{r}^n}(R\sin 2\vartheta)^{n-2}\,d\omega\,d\vartheta, \tag{2. 12}$$

wobei

$$\lim_{R\to\infty}\varepsilon(R) = 0$$

und

$$d\omega = \sin\varphi_2^{n-3}\ldots\sin\varphi_{n-2}\,d\varphi_2\,d\varphi_3\ldots d\varphi_{n-1}$$

ist.

Um den Grenzübergang $R\to\infty$ auszuführen, zerlegen wir das Integral

$$I(R) = \int u(Q)\frac{2R(R\sin 2\vartheta)^{n-2}}{\bar{r}^n}\,d\omega\,d\vartheta$$

in zwei Teile $I_1(R,L)$ und $I_2(R,L)$, und zwar durch Teilung des Integrationsintervalles von ϑ in

$$\mathfrak{S}_1\colon 0\leqq\vartheta\leqq\frac{\pi}{2}-\frac{L}{2R} \quad\text{und}\quad \mathfrak{S}_2\colon \frac{\pi}{2}-\frac{L}{2R}\leqq\vartheta\leqq\frac{\pi}{2},$$

wobei L $(L<\pi R)$ eine feste Zahl ist.

Wir beschäftigen uns zuerst mit dem Integral $I_2(R,L)$ und setzen dabei

$$s = R(\pi - 2\vartheta).$$

Damit werden die Punkte der sphärischen Kalotte S_2

$$\frac{\pi}{2} - \frac{L}{2R} \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{2} \tag{2.13}$$

eindeutig auf die Punkte der $(n-1)$-dimensionalen Kugel $\mathfrak{L}$

$$x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 \leqq L^2$$

abgebildet, dabei wird dem Punkt $Q(R, \vartheta, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$ der Punkt $Q^*(s, 0, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$ zugeordnet.

Wie man leicht nachrechnet, ist nun

$$R \sin 2\vartheta = s\,(1 + \varepsilon(R)) \tag{2.14}$$

und

$$\bar{r} = (s^2 - 2\,s\,\varrho\cos\lambda^* + \varrho^2)^{\frac{1}{2}}\,(1 + \varepsilon(R)) = r\,(1 + \varepsilon(R)) \tag{2.15}$$

mit

$$r = (s^2 - 2\,s\,\varrho\cos\lambda^* + \varrho^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Dabei ist λ^* der Winkel zwischen OP und OQ^*.

Wir setzen ferner

$$u(Q) = u_R(Q^*) = u\left(2R\sin^2\frac{s}{2R}, \ldots, R\sin\frac{s}{R}\sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-1}\right)$$

und berücksichtigen noch, daß das Volumenelement dv von $x_1 = 0$ gleich

$$dv = s^{n-2}\,ds\,d\omega = s^{n-1}\sin\varphi_2^{n-2} \ldots \sin\varphi_{n-2}\,ds\,d\varphi_2 \ldots d\varphi_{n-1} \tag{2.16}$$

ist. Es wird dann

$$I_2(R) = (1 + \varepsilon(R)) \int \frac{u_R(Q^*)}{r^n}\,dv, \tag{2.17}$$

wobei die Integration innerhalb der Kugel $\mathfrak{L}$

$$x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 = L^2$$

zu erstrecken ist.

3. Wir definieren jetzt in der Hyperkugel $\mathfrak{L}$ die totaladditive Mengenfunktion

$$\Phi_R(E) = \int_E u_R(Q^*)\,dv, \tag{3.1}$$

wobei E eine beliebige meßbare Menge von $\mathfrak{L}$ bedeutet, und schreiben

$$\int_{\mathfrak{L}} \frac{u_R(Q^*)}{\bar{r}^n}\,dv = \int_{\mathfrak{L}} \frac{d\Phi_R(Q^*)}{r^n}.$$

Für $I_2(R)$ gilt dann von einem R_0 ab

$$I_2(R) = \int_{\mathfrak{S}_2} \frac{d\Phi_R}{r^n} \leqq \frac{\omega_n u(P)}{\xi_1}. \tag{3.2}$$

Wählt man ferner den Punkt P auf der x_1-Achse in einer Entfernung $\xi_0 > 0$, so wird in (3. 2) für $R > \xi_0$

$$r > \xi_0$$

und wir erhalten die Abschätzung

$$\int_{\mathfrak{S}_2} d\Phi_R \leqq \omega_n u(\xi_0)\, \xi_0^{n-1}, \tag{3.3}$$

welche unabhängig von L gilt[7]). Mit Rücksicht darauf, können wir nach einem wichtigen Satz von Radon[8]) über absolut additive Mengenfunktionen eine monoton ins Unendliche wachsende Folge R_ν und eine absolut additive Mengenfunktion $\Phi(Q^*)$ finden, so daß

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_{\mathfrak{S}_2} \frac{d\Phi_{R_\nu}}{r^n} = \int_{\mathfrak{S}_2} \frac{d\Phi}{r^n} \tag{3.4}$$

gilt. Wir erhalten also aus (2. 12) durch Grenzübergang $\nu \to \infty$

$$u(P) = \frac{2\xi_1}{\omega_n}\left\{\int_{\mathfrak{L}} \frac{d\Phi}{r^n} + \lim_{\nu\to\infty} I_1(R_\nu, L)\right\}, \tag{3.5}$$

wobei $\mathfrak{L}$, wie schon früher erwähnt, die Oberfläche der $(n-1)$-dimensionalen Kugel

$$x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 \leqq L \tag{3.6}$$

bezeichnet.

Wegen

$$o \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{2} - \frac{L}{2R} \qquad (L < \pi R)$$

gilt jetzt in $I_1(R, L)$

$$\bar{r} = (1 + \varepsilon(L))\, 2R\cos\vartheta \qquad \left(\lim_{L\to\infty} \varepsilon(L) = 0\right)$$

es wird also

$$I_1(R,L) = (1+\varepsilon(L)) \int_{\mathfrak{S}_1} u_R(Q^*) \frac{\sin^2\vartheta}{2R\cos^2\vartheta}\, d\vartheta\, d\omega \tag{3.7}$$

$$= (1+\varepsilon(L)) \int_{\mathfrak{S}_1} u_R(Q^*) \frac{d\bar{o}}{(2R\cos^2\vartheta)^{n-2}},$$

wobei $\mathfrak{S}_1$ die sphärische Kalotte

$$0 \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{2} - \frac{L}{2R}, \quad 0 \leqq \vartheta_2, \vartheta_3, \ldots \vartheta_{n-2} \leqq \pi, \quad 0 \leqq \vartheta_{n-1} \quad 2\pi$$

bedeutet.

---

[7]) Eigentlich gilt der Satz für jede innerhalb der Kugel $\mathfrak{L}$ gelegene abgeschlossene Punktmenge. Da aber in (3. 3) ein $L' > L$ gewählt werden kann, so ist (3. 3) für jedes feste L möglich.

[8]) Radon, Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen, Sitzungsber. d. Wiener Akad. **122** (1913), S. 1295—1438.

Nun können wir offensichtlich die Limesfunktion $\Phi(Q^*)$ unabhängig von L und für jeden endlichen Punkt Q^* der Mannigfaltigkeit E $x_1 = 0$ definieren, am leichtesten durch Würfelteilung von E durch die $(n-1)$-dimensionalen ebenen Mannigfaltigkeiten $x_i = m_i$, $i = 2, 3, \ldots, n$ (wobei die m_i alle positiven und negativen ganzen Zahlen durchlaufen) und Anwendung des Radonschen Satzes in jedem dieser Würfel.

Da nun ferner die Integrale

$$\int_{\mathfrak{C}} \frac{d\Phi}{r^n}$$

nicht abnehmen und unabhängig von L beschränkt sind, so können wir schreiben

$$\lim_{L\to\infty} \int_{\mathfrak{C}} \frac{d\Phi}{r^n} = \int_{x_1=0} \frac{d\Phi}{r^n},$$

und erhalten aus (3. 5) unter Berücksichtigung von (3. 7)

$$u(P) = \frac{2\xi_1}{\omega_n} \left\{ \int_{x_1=0} \frac{d\Phi}{r^n} + \lim_{k=\infty} \lim_{\nu=\infty} I_1(R_\nu, L_k) \right\}. \tag{3.8}$$

Bezeichnen wir die letzte Größe der Klammer, die offenbar vom Punkte P unabhängig ist, mit $\frac{c\,\omega_n}{2}$, so erhalten wir abschließend die Darstellung

$$u(P) = \frac{2\xi_1}{\omega_n} \int_{x_1=0} \frac{d\Phi}{r^n} + c\,\xi_1. \tag{3.9}$$

Dabei ist

$$r = \{\xi_1^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + \ldots + (x_n - \xi_n)^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Diese Formel wurde hier für $n > 2$ abgeleitet, gilt aber nach den Ausführungen von Tsuji auch für $n = 2$. Dem Verfahren wurde zugrunde gelegt, daß u auch im Nullpunkt regulär ist. Ist dieses nicht der Fall, so brauchen wir bloß mit Tsuji die Formel (2. 2) auf die Kugeln $\mathfrak{K}_n$

$$(x_1 - R_\nu - \delta_\nu)^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = (R_\nu + \delta_\nu)^2$$

mit

$$\lim_{\nu\to\infty} \delta_\nu = 0$$

anzuwenden.

4. Wir bezeichnen nun mit ϱ, ϑ_1, ϑ_2, …, ϑ_{n-1} die Polarkoordinaten des Punktes $P(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ und setzen

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \varrho \cos\vartheta_1 \\
\xi_2 &= \varrho \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\xi_{n-1} &= \varrho \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \ldots \cos\vartheta_{n-1} \\
\xi_n &= \varrho \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \ldots \sin\vartheta_{n-1}.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Ferner setzen wir

$$d\omega_n(\vartheta) = \sin\vartheta_1^{n-2}\sin\vartheta_2^{n-3}\sin\vartheta_{n-2}\,d\vartheta_1\ldots d\vartheta_{n-1}. \tag{4.2}$$

Aus (3. 9) ergibt sich dann durch Multiplikation mit $\frac{\cos\vartheta_1}{\varrho}d\omega_n(\vartheta)$ und Integration über die Halbkugel $\mathfrak{S}'_n$

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2=\varphi^2,\quad \xi_1\geqq 0 \tag{4.3}$$

$$\frac{1}{\varrho}\int_{\mathfrak{S}'}u(P)\cos\vartheta_1 d\omega_n(\vartheta)=\frac{2}{\omega_n}\int_{\mathfrak{S}'_n}\cos^2\vartheta_1 d\omega_n(\vartheta)\int_{x_1=0}\frac{d\Phi}{r^n}+c\int_{\mathfrak{S}'_n}\cos^2\vartheta_1 d\omega_n(\vartheta). \tag{4.4}$$

Schreiben wir nun ähnlich wie vorhin

$$d\omega_n(\vartheta)=\sin\vartheta_1^{n-2}d\vartheta_1 d\omega(\vartheta),$$

so wird

$$\int_{\mathfrak{S}'_n}\cos^2\vartheta_1 d\omega_n(\vartheta)=\int_0^{\pi}\sin\vartheta_1^{n-2}\cos^2\vartheta_1 d\vartheta_1\int d\omega(\vartheta).$$

Nun ist aber

$$\int_0^{\pi}\sin\vartheta_1^{n-2}\cos^2\vartheta_1 d\vartheta_1=\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin\vartheta_1^{n-2}d\vartheta_1,$$

es ist also

$$\int_{\mathfrak{S}_n}\cos^2\vartheta_1 d\omega_n(\vartheta)=\frac{1}{n}\int_{\mathfrak{S}'_n}d\omega_n(\vartheta)=\frac{\omega_n}{2n}. \tag{4.5}$$

Für das erste Integral erhalten wir durch Änderung der Integrationsfolge

$$\int_{\mathfrak{S}'_n}\cos^2\vartheta_1 d\omega_n(\vartheta)\int_{x_1=0}\frac{d\Phi}{r^n}=\int_{x_1=0}d\Phi\int_{\mathfrak{S}'_n}\frac{\cos^2\vartheta_1 d\omega_n(\vartheta)}{r^n},$$

und es handelt sich darum, das letzte Integral auszurechnen. Die direkte Auswertung des Integrals

$$I=\int_{\mathfrak{S}'_n}\frac{\cos^2\vartheta_1 d\omega_n(\vartheta)}{r^n} \tag{4.6}$$

etwa durch Reihenentwicklung ist nicht leicht und erfordert langwierige Rechnungen. Am einfachsten kommt man auf folgendem Wege zum Ziel: Es sei γ der Winkel zwischen den beiden Richtungen OP und OQ^*. Dabei liegt der Punkt Q^* $(r, 0, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$ auf der Ebene $x_1=0$, während P $(\varrho, \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{n-1})$ in $x_1>0$ liegt. Ist $r>\varrho$, so setzen wir

$$\frac{\varrho}{r}=\lambda<1$$

und

$$2I = \frac{1}{r^n} \int_{\mathfrak{S}} \frac{\cos^2 \vartheta_1 \, d\omega_n(\vartheta)}{(1 - 2\lambda \cos\gamma + \lambda^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{A(\lambda)}{r^n}$$

und falls $\varrho > r$,

$$2I = \frac{1}{\varrho^n} \int \frac{\cos^2 \vartheta_1 \, d\omega_n(\vartheta)}{(1 - 2\lambda \cos\gamma + \lambda^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{A(\lambda)}{\varrho^n}$$

mit

$$\lambda = \frac{r}{\varrho} < 1.$$

Der Faktor 2 rührt daher, daß wir hier, statt über die Halbebenheitskugel $\mathfrak{S}'$, über die ganze Einheitskugel $\mathfrak{S}$ integrieren.

Somit ist die Ausrechnung von I auf die Ausrechnung des Integrals $A(\lambda)$ zurückgeführt worden.

Wir führen für den Augenblick kartesische Koordinaten ein, und bezeichnen mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Koordinaten des Punktes $P(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1})$ der Einheitskugel $\mathfrak{S}$ und mit $\xi_1 = 0, \xi_2, \ldots, \xi_n$ diejenigen von $Q(\lambda, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$. Bezeichnet dann $d\omega$ das Flächenelement von $\mathfrak{S}$, so wird

$$A(\lambda) = \int_{\mathfrak{S}} \frac{x_1^2 \, d\omega}{\{x_1^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + \cdots + (x_n - \xi_n)^2\}^{\frac{n}{2}}}, \tag{4.7}$$

und dieses Integral ist invariant gegenüber Kugeldrehungen um die x_1-Achse. Es ist also keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn man von vornherein annimmt, daß Q auf einer der $n-1$ Koordinatenachsen $Ox_2, \ldots, Ox_n$ liegt, z. B. auf Ox_n.

Wir führen jetzt folgendermaßen neue Polarkoordinaten ein:

$$\begin{aligned}
x_n &= \cos\vartheta_1 \\
x_{n-1} &= \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \\
x_{n-2} &= \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos\vartheta_3 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_2 &= \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \ldots \cos\vartheta_{n-1} \\
x_1 &= \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \ldots \sin\vartheta_{n-1}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Da nun unter diesen Voraussetzungen $\gamma = \vartheta_1$ ist, so wird

$$A = A(\lambda) = \int_{\mathfrak{S}} \frac{\sin^2\vartheta_1 \sin^2\vartheta_2 \ldots \sin^2\vartheta_{n-1} \, d\omega_n(\vartheta)}{(1 - 2\lambda\cos\vartheta_1 + \lambda^2)^{\frac{n}{2}}},$$

d. h.

$$A = C \int_0^{\pi} \frac{\sin^n\vartheta_1 \, d\vartheta_1}{(1 - 2\lambda\cos\vartheta_1 + \lambda^2)^{\frac{n}{2}}},$$

wobei C eine Konstante ist. Setzen wir nun $m = n + 2$, so wird

$$A = C \int_0^{\pi} \frac{\sin \vartheta_1^{m-2} d\vartheta_1}{(1 - 2\lambda \cos \vartheta_1 + \lambda^2)^{\frac{m}{2}-1}}.$$

Nun ist aber das Integral

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin \vartheta_1^{m-2} d\vartheta_1}{(1 - 2\lambda \cos \vartheta_1 + \lambda^2)^{\frac{m}{2}-1}}$$

bis auf einen konstanten Faktor nichts anderes. als das Potential eines Punktes M der x_1-Achse in der Entfernung $x_1 = \lambda$ der m-dimensionalen (d. h. $n + 2$-dimensionalen) Kugel, mit konstanter Belegung $\sigma = 1$, welches nach den bekannten Sätzen der Potentialtheorie konstant ist. Da nun $A(\lambda)$ konstant ist, so finden wir

$$I = \frac{1}{2} A(\lambda) = \frac{1}{2} A(0) = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{S}} \cos^2 \vartheta_1 \, d\omega_n(\vartheta) = \frac{\omega_n}{2n}.$$

Mithin ist, mit Rücksicht auf (1. 2), und (3. 9)

$$(4.9) \qquad \frac{m(\varrho)}{\varrho} = \frac{1}{n \varrho^n} \int_{x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqq \varrho^2} d\Phi + \frac{1}{n} \int_{x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geqq \varrho^2} \frac{d\Phi}{r^n} + \frac{\omega_n}{2n} c.$$

Wir führen jetzt für $r > 0$ die Funktion Θ durch

$$(4.10) \qquad \Theta(r) = \int_{x_2^2 + \ldots + x_n^2 < r^2} d\Phi(Q^*)$$

und setzen

$$\Theta(0) = 0 \quad \text{und} \quad \Theta(r - 0) = \Theta(r).$$

Dann ist

$$(4.11) \qquad \frac{m(\varrho)}{\varrho} = \frac{1}{n} \left\{ \int_{\varrho}^{\infty} \frac{d\Theta}{r^n} + \frac{\Theta(\varrho - 0)}{\varrho^n} \right\} + \frac{\omega_n}{2n} c.$$

Da nun

$$\int_{\varrho}^{\infty} \frac{d\Theta}{r^n}$$

konvergiert, so konvergiert auch

$$\int_{\varrho}^{\infty} \frac{\Theta(r)}{r^{n+1}} dr$$

und es gilt [9])

$$\int_{\varrho}^{\infty} \frac{\Theta(r)}{r^{n+1}} dr = \frac{1}{n} \left\{ \frac{\Theta(\varrho - 0)}{\varrho^n} + \int_{\varrho}^{\infty} \frac{d\Theta}{r^n} \right\}.$$

Wir erhalten also die Darstellung [10])

$$\frac{m(\varrho)}{\varrho} = \int_{\varrho}^{\infty} \frac{\Theta(r)}{r^{n+1}} dr + \frac{\omega_n}{2n} c, \tag{4. 12}$$

woraus die in der Einleitung erwähnte Eigenschaft der Monotonität von $\frac{m(\varrho)}{\varrho}$ unmittelbar folgt.

Zur Ableitung weiterer Eigenschaften von $\frac{m(r)}{r}$ setzen wir für den Augenblick

$$\frac{m(r)}{r} = \psi(r) \tag{4. 13}$$

und definieren (4. 12), wobei wir noch r an Stelle von ϱ schreiben. Wir erhalten dann

$$\psi'(r) = -\frac{\Theta(r)}{r^{n+1}} = -\frac{\Theta(r-0)}{r^{n+1}}, \tag{4. 14}$$

also durch Kombination mit (4. 13)

$$r\psi'(r) + n\psi(r) = -\frac{\Theta(r-0)}{r^n} + n\int_r^{\infty} \frac{\Theta(x)}{x^{n+1}} dx = \int_r^{\infty} \frac{d\Theta(x)}{x^n}. \tag{4. 15}$$

Da nun

$$r\psi' + n\psi = n\frac{d(\psi \cdot r^n)}{dr^n}$$

ist, so haben wir hiermit den Beweis des Satzes, wonach $m \cdot r^{n-1}$ eine konkave Funktion von r^n ist.

Das Analogon des Tsujischen Satzes über die Konkavität von $\frac{m}{r}$ als Funktion von $\frac{1}{r^n}$ folgt schon aus (4. 14).

Bleiben wir bei $n = 2$, so finden wir, daß $m \cdot r$ eine konkave Funktion von r^2 ist.

5. Um das Analogon des Julia-Carathéodoryschen Satzes zu beweisen, zerlegen wir in

$$u(P) = \frac{2\xi_1}{\omega_n} \int \frac{d\Theta}{r^n} + c\,\xi_1 \tag{5. 1}$$

[9]) Vgl. z. B. Saks, Theory of the Integral, Warschau 1937, 2. Aufl., S. 102.

[10]) Es ist leicht zu sehen, daß $\lim_{r\to\infty} \frac{\Theta}{r^{n+1}} = 0$ ist.

das Integral in zwei Teile

$$I_1 = \int\limits_{x_2^2+\ldots+x_n^2 \leqq R_0^2} \frac{d\Phi}{r^n}, \qquad I_2 = \int\limits_{x_2^2+\ldots+x_n^2 > R_0^2} \frac{d\Phi}{r^n}.$$

In

$$0 \leqq \varphi_1 \leqq \frac{\pi}{2} - \delta \qquad (\delta > 0) \tag{5.2}$$

ist nun mit $\bar{r}^2 = x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2$,

$$r \geqq \bar{r} \sin \delta,$$

und wir erhalten

$$I_2 \leqq \frac{1}{\sin^n \delta} \int\limits_{x_2^2+\ldots+x_n^2 > R_0^2} \frac{d\Phi}{\bar{r}^n} = \frac{1}{\sin^n \delta} \int\limits_{R_0}^{\infty} \frac{d\Theta}{\bar{r}^n},$$

was durch geeignete Wahl von R_0 beliebig klein gemacht werden kann. Ferner ist in I_1

$$r > \varrho \sin \delta > \xi_1 \sin \delta.$$

Damit wird in (5. 2)

$$0 \leqq \frac{u(\xi_1)}{\xi_1} \leqq \frac{2\,\Theta(R_0)}{\omega_n \xi_1^n \sin^n \delta} + \frac{2}{\omega_n \sin^n \delta} \int\limits_{R_0}^{\infty} \frac{d\Theta}{x^n},$$

womit der Satz bewiesen ist.

Für die Ableitung von $\frac{m}{r^n}$ kann man genau nach dem Vorbild von Tsuji zeigen, daß $\frac{m}{r}$ eine linke und eine rechte Derivierte besitzt und daß $\frac{m}{r}$ dann und nur dann eine Ableitung besitzt, wenn $\Theta(r)$ an dieser Stelle differenzierbar ist. Ähnlich zeigt man, daß bei der Festlegung $\Theta(0) = 0$, $\Theta(r - 0) = \Theta(r)$, $\Theta(r)$ durch u eindeutig bestimmt ist.

(Eingegangen am 6. Dezember 1939.)

Abelsche Sätze für Dirichletsche Reihen.

Von

Werner Meyer-König in Stuttgart.

Einleitung.

Das Funktionselement

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

habe den Konvergenzradius 1, und es sei die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit den Teilsummen $s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$ konvergent zur Summe s. Dann besagt die klassische Stolzsche Verallgemeinerung des Abelschen Stetigkeitssatzes, daß

$$\lim f(z) = s \tag{2}$$

ist, wenn z „im Winkelraum" bleibend gegen 1 strebt. Sie ist eine Folge des Umstandes, daß die Reihe (1) in einer Winkelraumumgebung von $z = 1$ gleichmäßig konvergiert. (2) braucht nicht mehr zu gelten, wenn z in beliebiger Weise aus dem Innern des Einheitskreises gegen 1 rückt[1]). Unter zusätzlichen Voraussetzungen über $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ lassen sich jedoch Aussagen machen, die über den Stolzschen Fall hinausreichen. Mit solchen Aussagen will sich die vorliegende Note beschäftigen. Dabei wird an Stelle des Grenzwertes (2) allgemeiner die Frage der gleichmäßigen Konvergenz Dirichletscher Reihen in Gebieten untersucht, die an die Konvergenzgrenze heranreichen.

Bei Potenzreihen folgt aus der absoluten Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (1) im abgeschlossenen Einheitskreis. Zwischen diesem trivialen extremen Fall und dem Stolzschen Fall liegt[2]) der

---

[1]) Siehe G. H. Hardy und I. E. Littlewood, Abels Theorem and its converse, Proc. London Math. Soc. (2) 18 (1920), S. 205—235, besonders S. 207, C; ferner L. Neder, Über Gebiete gleichmäßiger Konvergenz Dirichletscher Reihen, Math. Zeitschr. 15 (1922), S. 286—290. In verschärfter Form wird sich diese Tatsache in Satz 4 der vorliegenden Note ergeben.

[2]) K. Knopp, Aufgabensammlung zur Funktionentheorie II, Berlin und Leipzig 1928 (Sammlung Göschen 878), S. 32, Aufgabe 6. Dort wird unter denselben Voraussetzungen die Stetigkeit von $f(z)$ in den betrachteten Gebieten bewiesen. (Ob man dabei die dortigen Ellipsen oder die oben gewählten Kreise nimmt, spielt offensichtlich keine Rolle.) Der Beweis der gleichmäßigen Konvergenz läßt sich nach derselben Methode erbringen.

Satz I. *Aus* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ *und*

$$s_n - s = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{für} \quad n \to \infty \tag{3}$$

folgt die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (1) *im Innern und auf dem Rand jedes den Einheitskreis in* $z = 1$ *von innen berührenden Kreises.*

Weiter gilt der von F. Lösch[3]) bewiesene

Satz II. *Es sei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ *und für ein geeignetes* $\vartheta > 0$ *strebe bei reellem* x

$$\sum_{x \leqq n \leqq x^{1+\vartheta}} |a_n| \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \infty. \tag{4}$$

Dann konvergiert die Reihe (1) *gleichmäßig im Innern und auf dem Rand jedes den Einheitskreis in* $z = 1$ *von innen berührenden Kreises.*

Natürlich kommt es bei dem Bereich $\mathfrak{B}$, in dem gleichmäßige Konvergenz behauptet wird, nur auf das Verhalten in der Nähe von $z = 1$ an. In I und II weist $\mathfrak{B}$ eine Berührung erster Ordnung mit dem Einheitskreis auf. In § 1 und 2 werden entsprechende Sätze für Dirichletsche Reihen aufgestellt und dabei Bereiche betrachtet, die die Konvergenzgerade der Reihe von irgendeiner Ordnung berühren. In § 3 wird gezeigt, daß die gewonnenen Ergebnisse je in einer gewissen Richtung nicht verschärft werden können. Insbesondere ergibt sich, daß Satz II nicht mehr richtig bleibt, wenn die Bedingung (4), die vom Typus o ist, durch die entsprechende Bedingung vom Typus O ersetzt wird.

In § 4 werden Gebiete betrachtet, deren Berührung mit der Konvergenzgeraden der Dirichletschen Reihe nicht vom Potenzcharakter ist. Ferner wird der Bereich der Bedingungen vom Typus (4), die hier überhaupt in Frage kommen, abgegrenzt.

§ 5 bringt die Übertragung einiger Ergebnisse auf Laplace-Integrale.

§ 1.

1. Im folgenden sei stets

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

gesetzt und λ_n eine Folge reeller Zahlen mit

$$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n \to \infty.$$

---

[3]) F. Lösch, Über das Verhalten der Potenzreihen auf dem Rande des Konvergenzkreises III, Math. Zeitschr. 37 (1933), S. 85–89. Verf. ist Herrn F. Lösch für verschiedene wertvolle Hinweise zu besonderem Dank verpflichtet.

Weiter bedeute σ den Real- und t den Imaginärteil der komplexen Größe $z = \sigma + it$. Wir erinnern an das bekannte Konvergenzverhalten einer Dirichletschen Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}, \tag{1}$$

insbesondere daran, daß aus der Konvergenz für $z = 0$, ja schon aus der Beschränktheit von s_n, ihre Konvergenz für $\sigma > 0$ folgt. Es ergibt sich dies aus der für $\sigma \neq 0$ gültigen Abschätzung[4])

$$\begin{aligned} |e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n+1} z}| &= \Big| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} z e^{-tz} dt \Big| \\ &\leqq |z| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-t\sigma} dt = \frac{|z|}{\sigma} (e^{-\lambda_n \sigma} - e^{-\lambda_{n+1}\sigma}). \end{aligned} \tag{2}$$

2. Satz 1. *Konvergiert die Dirichletsche Reihe* (1) *für* $z = 0$ *zum Wert* s, *strebt überdies für ein* α *mit* $0 < \alpha \leqq 1$

$$\lambda_{n+1}^{1-\alpha} (s_n - s) \to 0 \quad \textit{für} \quad n \to \infty, \tag{3}$$

so konvergiert die Reihe (1) *für jedes positive* c *gleichmäßig in den Bereich*

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\alpha, c): \begin{cases} 0 \leqq \sigma \leqq 1, \\ |t| \leqq c\, \sigma^{\alpha}. \end{cases}$$

Beweis. Ohne der Allgemeinheit Abbruch zu tun, kann ich mich auf den Fall $s = 0$ beschränken. Weiter genügt es, die gleichmäßige Konvergenz in dem Bereich $\mathfrak{B}_1$ darzutun, der aus $\mathfrak{B}$ durch Wegnahme des Punktes $z = 0$ entsteht.

Zu einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ kann man die Nummer m so wählen, daß

$$\max (|s_n|, \lambda_{n+1}^{1-\alpha} |s_n|) < \varepsilon \quad \text{für} \quad n \geqq m$$

ist, und erhält, da die gewöhnliche Konvergenz der Reihe (1) in $\mathfrak{B}_1$ gesichert ist, für $p > m$ und z in $\mathfrak{B}_1$

$$\begin{aligned} \Big| \sum_{n=p}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z} \Big| &= \Big| - s_{p-1} e^{-\lambda_p z} + \sum_{n=p}^{\infty} s_n (e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n+1} z}) \Big| \\ &< \varepsilon + \varepsilon \sum_{n=p}^{\infty} \lambda_{n+1}^{\alpha-1} |e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n+1} z}| \\ &< \varepsilon + \varepsilon |z| \sigma^{-\alpha} \sigma^{\alpha - 1} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{n+1}^{\alpha-1} (e^{-\lambda_n \sigma} - e^{-\lambda_{n+1}\sigma}). \end{aligned} \tag{4}$$

Nun gibt es positive Zahlen P und Q derart, daß für $0 < \sigma \leqq 1$

$$|z| \sigma^{-\alpha} < P, \quad \sigma^{\alpha - 1} g(\sigma) < Q \tag{5}$$

[4]) O. Perron, Zur Theorie der Dirichletschen Reihen, Journ. f. d. reine u. angewandte Mathematik **134** (1908), S. 95—143, besonders S. 97. (5).

ist mit

$$g(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{n+1}^{\alpha-1}(e^{-\lambda_n \sigma} - e^{-\lambda_{n+1}\sigma}).$$

Die erste dieser Beziehungen ergibt sich unmittelbar:

$$\sigma^{-\alpha}\sqrt{\sigma^2+t^2} \leqq \sqrt{\sigma^{2(1-\alpha)}+c^2} \leqq \sqrt{1+c^2}; \tag{6}$$

die zweite will ich für den Augenblick als bewiesen ansehen. Dann kommt aus (4) für $p > m$ und z in $\mathfrak{B}_1$

$$\left|\sum_{n=p}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}\right| < \varepsilon(1+PQ),$$

womit der gewünschte Nachweis erbracht ist.

Um nun noch die zweite der Beziehungen (5) zu beweisen, definiere ich für $t \geqq \lambda_0 > 0$ eine Funktion $A(t)$ durch

$$A(t) = \lambda_{n+1}^{\alpha-1} \text{ für } \lambda_n \leqq t < \lambda_{n+1} \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Dann ist

$$0 < A(t) \leqq t^{\alpha-1} \text{ für } t \geqq \lambda_0,$$

und für $\sigma > 0$

$$g(\sigma) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_{\nu+1}^{\alpha-1}(e^{-\lambda_\nu \sigma} - e^{-\lambda_{\nu+1}\sigma}) = \sigma \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_{\nu+1}^{\alpha-1} \int_{\lambda_\nu}^{\lambda_{\nu+1}} e^{-t\sigma}\,dt$$

$$= \sigma \lim_{n\to\infty} \int_{\lambda_0}^{\lambda_{n+1}} e^{-t\sigma} A(t)\,dt \leqq \sigma \lim_{n\to\infty} \int_{\lambda_0}^{\lambda_{n+1}} e^{-t\sigma} t^{\alpha-1}\,dt$$

$$< \sigma \lim_{n\to\infty} \int_{0}^{\lambda_{n+1}} e^{-t\sigma} t^{\alpha-1}\,dt = \sigma^{1-\alpha} \lim_{n\to\infty} \int_{0}^{\sigma\lambda_{n+1}} e^{-x} x^{\alpha-1}\,dx = \sigma^{1-\alpha}\Gamma(\alpha).$$

Damit ist Satz 1 bewiesen.

3. Bemerkungen. 1. Ist $\alpha = 1$, so haben wir den Stolzschen Fall. Die Abschätzung (6) gilt dann für beliebiges $\sigma > 0$, und wir können für $\mathfrak{B}$ den nach rechts offenen Winkelraum nehmen. Bei beliebigem α zwischen 0 und 1 kann ich also gleichmäßige Konvergenz in jeder Vereinigungsmenge eines solchen Winkelraums mit einem zu α gehörigen $\mathfrak{B}$ behaupten.

2. Für den speziellen Fall der Potenzreihen ergibt sich:

Konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *für* $z = 1$ *zum Wert* s, *strebt überdies für ein* α *mit* $0 < \alpha \leqq 1$

$$n^{1-\alpha}(s_n - s) \to 0 \quad \textit{für} \quad n \to \infty, \tag{7}$$

so konvergiert die Potenzreihe für jedes positive c gleichmäßig in dem Bereich

$$\overline{\mathfrak{B}} = \overline{\mathfrak{B}}(\alpha, c): \begin{cases} |\varphi| \leqq \min\left(\frac{\pi}{2}, c^{-\alpha}\right), \\ 0 \leqq r \leqq 1 - c|\varphi|^{\frac{1}{\alpha}}, \end{cases} \qquad (z = re^{i\varphi}).$$

Dabei ist es natürlich nur wesentlich, wie sich $\overline{\mathfrak{B}}$ in der Nähe des Punktes $z = 1$ verhält. Für $\alpha = 1$ erhalten wir den Stolzschen Fall, für $\alpha = \frac{1}{2}$ den Satz I der Einleitung.

3. Geringfügige Abänderungen des durchgeführten Beweises ergeben den

Satz 1a. *Konvergiert die Reihe* (1) *für $z = 0$ zum Wert s, ist überdies für ein α mit $0 < \alpha < 1$*

$$\lambda_{n+1}^{1-\alpha} |s_n - s| = O(1) \quad \text{für} \quad n \to \infty,$$

so ist die durch (1) *dargestellte Funktion $f(z)$ für jedes positive c in dem Bereich $\mathfrak{B}(\alpha, c)$ beschränkt.*

Hat (1) *für $z = 0$ nur beschränkte Teilsummen, so ist $f(z)$ für jedes positive c in dem aus $\mathfrak{B}(1, c)$ durch Wegnahme des Punktes $z = 0$ entstehenden Bereich beschränkt.*

4. Es ist wohl kaum nötig zu sagen, daß man hier und im folgenden durch die Substitution $z - z_0$ statt z entsprechende Aussagen für das Verhalten in der Nähe des beliebigen Punktes z_0 der Konvergenzgeraden der Reihe (1) erhält.

§ 2.

4. Satz 2. *Ist die Dirichletsche Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z} \tag{1}$$

für $z = 0$ konvergent, strebt überdies bei positivem x für ein positives ϑ

$$\sum_{x \leqq \lambda_n \leqq x^{1+\vartheta}} |a_n| \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \infty, \tag{2}$$

so konvergiert die Reihe (1) *für jedes α mit $0 < \alpha < 1$ und jedes positive c gleichmäßig in dem Bereich*

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\alpha, c): \begin{cases} 0 \leqq \sigma \leqq 1, \\ |t| \leqq c\,\sigma^{\alpha}. \end{cases}$$

Zunächst sei bemerkt, daß die Voraussetzung (2), wenn sie für ein gewisses $\vartheta > 0$ erfüllt ist, für jedes positive ϑ erfüllt ist Im folgenden werden wir sie mit

$$\vartheta = \beta = \frac{1}{\alpha}$$

brauchen.

Ehe wir in den eigentlichen Beweis eintreten, seien zwei Hilfsbeziehungen aufgestellt. Mit $\mathfrak{B}_2$ bezeichnen wir den aus $\mathfrak{B}$ durch Wegnahme der Punkte z mit $|t| \geqq \min\left(1, \frac{1}{\lambda_0}\right)$ und mit $|t| = 0$ entstehenden Bereich. Es gibt dann zwei positive Schranken M_1 und M_2, so daß für z in $\mathfrak{B}_2$ gilt:

$$0 < \frac{|z|}{\sigma}\left(e^{-\lambda_0 \sigma} - e^{-\frac{\sigma}{|t|}}\right) < M_1, \tag{3}$$

$$\frac{|z|}{\sigma} e^{-\frac{\sigma}{|t|^{1+\beta}}} < M_2. \tag{4}$$

Um (3) zu beweisen, betrachten wir erst den Fall $\sigma \leqq |t|$:

$$\frac{\sqrt{\sigma^2 + t^2}}{\sigma}\left(e^{-\lambda_0 \sigma} - e^{-\frac{\sigma}{|t|}}\right) \leqq \sqrt{2}\,\frac{|t|}{\sigma}\left(e^{-\lambda_0 \sigma} - 1 + \frac{\sigma}{|t|}\right) < \sqrt{2}.$$

Für $\sigma > |t|$ bekommen wir

$$\frac{\sqrt{\sigma^2 + t^2}}{\sigma}\left(e^{-\lambda_0 \sigma} - e^{-\frac{\sigma}{|t|}}\right) < \sqrt{2}\, e^{-\lambda_0 \sigma} < \sqrt{2}.$$

Weiter ist wegen $c^{-\beta}|t|^{\beta} \leqq \sigma \leqq 1$

$$\frac{|z|}{\sigma} e^{-\frac{\sigma}{|t|^{1+\beta}}} \leqq c^{\beta}\,\frac{\sqrt{1+t^2}}{|t|^{\beta}}\, e^{-\frac{1}{c^{\beta}|t|}}.$$

Die rechte Seite ist für $0 < t \leqq c$ stetig und hat den Grenzwert 0 für $t \to +0$. Daraus ergibt sich (4).

Beweis. Es genügt, die gleichmäßige Konvergenz in $\mathfrak{B}_2$ und für den Fall $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$ nachzuweisen. Die Konvergenz in $\mathfrak{B}_2$ ist gesichert. Zu einem gegebenen $\varepsilon > 0$ wähle ich die Nummer p, so daß gilt:

$$\max\left(|a_n|, |s_n|\right) < \varepsilon \quad \text{für} \quad n \geqq p,$$

$$\sum_{x \leqq \lambda_n \leqq x^{1+\beta}} |a_n| < \varepsilon \quad \text{für} \quad x^{1+\beta} \geqq \lambda_p.$$

Es sei nun $m > p$ und z in $\mathfrak{B}_2$ gelegen. Ich bezeichne

mit λ' das größte $\lambda_n = \lambda_{n'}$, das noch $\leqq \frac{1}{|t|}$ ist,

mit λ'' das kleinste $\lambda_n = \lambda_{n''}$, das noch $\geqq \frac{1}{|t|^{1+\beta}}$ ist.

Dann ist $n' < n''$ und

$$\sum_{\frac{1}{|t|} \leqq \lambda_n \leqq \frac{1}{|t|^{1+\beta}}} |a_n| < \varepsilon \quad \text{für} \quad n'' \geqq m.$$

Denn dazu braucht ja nur $|t|^{-1-\beta} \geqq \lambda_p$, also nur $\lambda_{n''-1} \geqq \lambda_p$ oder $n'' - 1 \geqq p$ zu sein, was wegen $n'' \geqq m > p$ gewiß der Fall ist.

A. Es sei $m < n'$. Dann ist mit Benutzung von § 1, (2)

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z} = -s_{m-1} e^{-\lambda_m z} + \sum_{m \leqq n < n'} s_n (e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n+1} z}) + s_{n'} e^{-\lambda' z}$$
$$+ \sum_{n' < n < n''} a_n e^{-\lambda_n z} - s_{n''-1} e^{-\lambda'' z}$$
$$+ \sum_{n'' \leqq n} s_n (e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n+1} z}),$$

$$\left| \sum_{n=m}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z} \right| < 3\varepsilon + \varepsilon \frac{|z|}{\sigma} \sum_{m \leqq n < n'} (e^{-\lambda_n \sigma} - e^{-\lambda_{n+1} \sigma})$$
$$+ \sum_{\lambda' < \lambda_n < \lambda''} |a_n| + \varepsilon \frac{|z|}{\sigma} \sum_{n'' \leqq n} (e^{-\lambda_n \sigma} - e^{-\lambda_{n+1} \sigma})$$
$$< 3\varepsilon + \varepsilon \frac{|z|}{\sigma} (e^{-\lambda_0 \sigma} - e^{-\lambda' \sigma}) + \sum_{\frac{1}{|t|} \leqq \lambda_n \leqq \frac{1}{|t|^{1+\beta}}} |a_n|$$
$$+ \varepsilon \cdot \frac{|z|}{\sigma} e^{-\lambda'' \sigma}$$
$$< 3\varepsilon + \varepsilon \frac{|z|}{\sigma} (e^{-\lambda_0 \sigma} - e^{-\frac{\sigma}{|t|}}) + \varepsilon + \varepsilon \frac{|z|}{\sigma} e^{-\frac{\sigma}{|t|^{1+\beta}}}$$
$$< \varepsilon (4 + M_1 + M_2).$$

B. Es sei $n' \leqq m \leqq n''$. Dann kommt ähnlich wie unter A, doch unter Wegfall einiger Summanden:

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z} = \sum_{m \leqq n < n''} a_n e^{-\lambda_n z} - s_{n''-1} e^{-\lambda'' z} + \sum_{n'' \leqq n} s_n (e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n+1} z}),$$

$$\left| \sum_{n=m}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z} \right| < |a_m| + \sum_{\lambda' < \lambda_n < \lambda''} |a_n| + \varepsilon + \varepsilon \frac{|z|}{\sigma} \sum_{n'' \leqq n} (e^{-\lambda_n \sigma} - e^{-\lambda_{n+1} \sigma})$$
$$< \varepsilon (3 + M_2).$$

C. Es sei $n'' < m$. Dann ist

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z} = -s_{m-1} e^{-\lambda_m z} + \sum_{n=m}^{\infty} s_n (e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n+1} z}),$$

$$\left| \sum_{n=m}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z} \right| < \varepsilon + \varepsilon \frac{|z|}{\sigma} \sum_{n'' \leqq n} (e^{-\lambda_n \sigma} - e^{-\lambda_{n+1} \sigma}) < \varepsilon (1 + M_2).$$

Damit ist Satz 2 bewiesen.

5. Bemerkungen. 1. Bei Spezialisierung auf Potenzreihen erhalten wir für $\alpha = \frac{1}{2}$ den Satz II von F. Lösch.

2. Bei Satz 1 richtet sich die Voraussetzung nach der Ordnung der Berührung des Bereichs $\mathfrak{B}$ mit der imaginären Achse. Nicht so ist es bei Satz 2. Das könnte zunächst vermuten lassen, daß die Voraussetzung (2) unnötig stark ist. Dies ist aber nicht der Fall, wie sich in § 3 ergeben wird.

3. Aus Satz 2 ergibt sich insbesondere der folgende Lückensatz:

Ist für ein positives ϑ

$$\lambda_{n+1} > \lambda_n^{1+\vartheta} \quad \textit{für alle } n,$$

so ist, falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergiert, die Reihe* (1) *für jedes* α *aus* $(0, 1)$ *und jedes positive* c *gleichmäßig konvergent in* $\mathfrak{B}(\alpha, c)$.

4. Geringfügige Abänderungen des durchgeführten Beweises ergeben den

Satz 2a. *Hat die Reihe* (1) *für* $z = 0$ *beschränkte Teilsummen, ist überdies für ein positives* ϑ

$$\sum_{x \leqq \lambda_n \leqq x^{1+\vartheta}} |a_n| = O(1) \quad \text{für} \quad x \to \infty,$$

so ist die durch (1) *dargestellte Funktion* $f(z)$ *für jedes* α *mit* $0 < \alpha < 1$ *und jedes positive* c *in dem aus* $\mathfrak{B}(\alpha, c)$ *durch Wegnahme des Punktes* $z = 0$ *entstehenden Bereich beschränkt.*

§ 3.

6. Es soll nun gezeigt werden, daß sich die Behauptung von Satz 1 nicht verschärfen läßt. Es genügt dazu, den Fall der Potenzreihen zu betrachten.

Es sei α *eine feste Zahl aus* $(0, 1)$. *Ist die Voraussetzung* § 1, (7) *erfüllt, so läßt sich in keinem Bereich* $\mathfrak{A}$, *der sich dem Einheitskreis in* $z = 1$ *stärker anschmiegt als jeder Bereich* $\overline{\mathfrak{B}}(\alpha, c)$ *mit noch so kleinem* c, *allgemein gleichmäßige Konvergenz behaupten.*

In einem solchen Bereich könnte ich nämlich eine Punktfolge

$$z_n = r_n e^{i\varphi_n} = \left(1 - c_n |\varphi_n|^{\frac{1}{\alpha}}\right) e^{i\varphi_n}$$

mit $\varphi_n \to 0$ und $c_n \to 0$, also $z_n \to 1$ wählen. Zu einer solchen Punktfolge gibt es aber stets eine die Bedingung § 1, (7) erfüllende — Folge

$$s_\nu = \frac{\varepsilon_\nu}{\nu^{1-\alpha}} \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

mit $\varepsilon_\nu \to 0$ für $\nu \to \infty$, derart daß

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z_n^\nu = \lim_{n \to \infty} (1 - z_n) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_\nu}{\nu^{1-\alpha}} z_n^\nu$$

nicht als endlicher Grenzwert existiert. Dies zeigt, daß $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^\nu$ in $\mathfrak{A}$ nicht gleichmäßig konvergiert.

Daß ich die Nullfolge ε_ν in der angegebenen Weise wählen kann, ergibt sich aus einem geläufigen Toeplitz-Schurschen Satz über lineare Folgentransformationen[5]), sobald ich weiß, daß die Zeilennormen

$$N(z_n) = |1 - z_n| \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|z_n|^\nu}{\nu^{1-\alpha}}$$

nicht beschränkt sind. Nun ist aber für $n \to \infty$ im Falle $0 < \alpha < 1$ auf Grund eines bekannten Abelschen asymptotischen Satzes[6])

$$N(z_n) \asymp \Gamma(\alpha) \frac{|1 - z_n|}{(1 - |z_n|)^\alpha} \asymp \Gamma(\alpha) \frac{|\varphi_n|}{\left(c_n |\varphi_n|^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha)}{c_n^\alpha},$$

und im Falle $\alpha = 1$

$$N(z_n) \asymp \frac{|\varphi_n| \sqrt{1 + c_n^2}}{c_n |\varphi_n|} = \frac{1}{c_n} \sqrt{1 + c_n^2},$$

womit wegen $c_n \to 0$ der gewünschte Nachweis erbracht ist.

7. Ich befasse mich nun mit der Voraussetzung von Satz 2.

Das in § 2, (2) auftretende Intervall $x \ldots x^{1+\vartheta}$ darf durch kein kleineres ersetzt werden, wenn die Behauptung allgemein richtig bleiben soll.

Sogar schon in dem speziellen Falle $\alpha = \frac{1}{2}$ trifft dies zu. Da ich mich bei diesem negativen Nachweis wieder auf Potenzreihen beschränken kann, habe ich also zu zeigen, daß die Voraussetzung

$$(1) \qquad \sum_{x \leqq n < x^{1+\vartheta}} |a_n| \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \infty \quad \text{mit einem} \quad \vartheta > 0$$

von Satz II nicht durch Verkleinerung des Intervalls $x \ldots x^{1+\vartheta}$ abgeschwächt werden kann, wenn die Behauptung, nämlich die gleichmäßige Konvergenz von $\sum a_n z^n$, in jedem den Einheitskreis in $z = 1$ von innen berührenden Kreis gültig bleiben soll.

Die folgenden, für $n \to \infty$ gültigen Hilfsformeln werden benötigt:

$$(2) \qquad p_n = 1 + \frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \ldots + \frac{1}{n \log n} = \log \log n + E_1 + o(1),$$

$$(3) \qquad q_n = \frac{1}{\log n} + \frac{1}{2 \log 2\, n} + \frac{1}{3 \log 3\, n} + \ldots + \frac{1}{n \log n^2} = \log 2 + o(1).$$

[5]) Siehe etwa I. Schur, Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen, Journ. f. d. reine u. angewandte Mathematik **151** (1921), S. 79–111, besonders S. 85, Satz IV.

[6]) Siehe etwa E. C. Titchmarsh, The theory of functions, Oxford 1932, S. 225 unten.

Formel (2) ergibt sich unmittelbar aus der Eulerschen Summenformel; E_1 ist eine gewisse Konstante. Um (3) zu gewinnen, schreibe ich für $\nu = 2, 3, \ldots, n$ die Beziehungen

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(\nu n + k)\log(\nu n + k)} < \frac{n}{\nu n \log \nu n} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{[(\nu-1)n + k]\log[(\nu-1)n + k]}$$

an und erhalte durch Addition

$$p_{n^2+n} - p_{2n} < q_n - \frac{1}{\log n} < p_{n^2} - p_n.$$

Nun ist

$$p_{n^2+n} - p_{2n} = \log\log(n^2+n) - \log\log 2n + o(1) = \log\frac{\log(n+1)+\log n}{\log 2 + \log n} + o(1)$$
$$= \log 2 + o(1),$$
$$p_{n^2} - p_n = \log\frac{\log n^2}{\log n} + o(1) = \log 2 + o(1).$$

Damit ist (3) bewiesen.

Wegen (2) ist (1) sicher dann erfüllt, wenn

$$a_n = o\left(\frac{1}{n\log n}\right)$$

ist. Denn mit $a_n = \frac{\varepsilon_n}{n\log n}$, $\varepsilon_n \to 0$, $\bar{\varepsilon}_n = \max(\varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}, \ldots) \to 0$ kommt für $x \to \infty$ mit $\vartheta = 1$

$$\sum_{x \leqq n \leqq x^2} |a_n| \leqq \bar{\varepsilon}_{[x]}(p_{[x^2]} - p_{[x]}) + o(1) = \bar{\varepsilon}_{[x]} \log\frac{\log[x^2]}{\log[x]} + o(1) = o(1).$$

Ich werde nun ein Beispiel einer Potenzreihe mit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$ und

$$a_n = O\left(\frac{1}{n\log n}\right) \tag{4}$$

angeben, für welche die Behauptung von Satz II nicht erfüllt ist. Damit kann ich meiner Aussage die folgende präzise Fassung geben:

Man wähle irgendeine Funktion $\tau_x \geqq 0$ mit $\tau_x \to 0$ für $x \to \infty$, die noch so langsam gegen 0 streben darf. Erfüllt dann $\sum a_n$ neben der Konvergenz die Voraussetzung

$$\sum_{x \leqq n \leqq x^{1+\tau_x}} |a_n| \to 0,$$

so braucht die Behauptung von Satz II nicht zu gelten.

Denn das Beispiel erfüllt für jede Funktion τ_x diese Voraussetzung. In der Tat hat man, wenn $|a_n|\, n\log n < M$ ist,

$$\sum_{x \leqq n \leqq x^{1+\tau_x}} |a_n| \leqq M(\log\log[x^{1+\tau_x}] - \log\log[x]) + o(1) = o(1).$$

Ich konstruiere nun das angekündigte Beispiel. Ich setze

$$n_\nu = 2^{3^\nu} \quad \text{für} \quad \nu = 0, 1, \ldots,$$

$$a_0 = a_1 = a_2 = 0$$

und für $l = 1, 2, \ldots, n_\nu^2 - 1$; $k = 1, 2, \ldots, n_\nu$

$$a_{ln_\nu + k} = \frac{e^{-2\pi i \frac{k}{n_\nu}}}{ln_\nu \log ln_\nu}.$$

Damit ist a_n für alle n definiert und weiter

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{n_\nu^2 - 1} (a_{ln_\nu+1} + a_{ln_\nu+2} + \cdots + a_{ln_\nu+n_\nu}) = 0, \tag{5}$$

da jede einzelne Klammer 0 ist. Wegen

$$|a_{ln_\nu+1}| + \cdots + |a_{ln_\nu+n_\nu}| = \frac{n_\nu}{ln_\nu \log ln_\nu} \leqq \frac{1}{\log n_\nu} \to 0$$

kann ich in (5) die Klammern weglassen und erhalte dann gerade $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$. Das Funktionselement

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

hat also mindestens den Konvergenzradius 1. Schließlich ist (4) erfüllt wegen

$$|a_{ln_\nu+k}| = \frac{1}{(ln_\nu+k)\log(ln_\nu+k)} \frac{(ln_\nu+k)\log(ln_\nu+k)}{ln_\nu \log ln_\nu}$$

$$\leqq \frac{1}{(ln_\nu+k)\log(ln_\nu+k)} \frac{(l+1)n_\nu \log n_\nu^3}{ln_\nu \log n_\nu} \leqq \frac{6}{(ln_\nu+k)\log(ln_\nu+k)}.$$

Nun setze ich

$$z_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) e^{i\frac{2\pi}{n}} \quad \text{für} \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Offenbar gibt es dann einen den Einheitskreis in $z = 1$ von innen berührenden Kreis[7]), der diese Punktfolge im Innern enthält. Der gewünschte Nachweis ist also erbracht, wenn ich zeige, daß $\lim_{n=\infty} f(z_n)$ nicht existiert oder jedenfalls von 0 verschieden ist. Ich wähle zu diesem Zweck eine beliebige Zahl $\varepsilon > 0$ und dazu die Konstante K und die Nummer m, so daß

$$|s_n| < K \quad \text{für alle } n,$$

$$|s_n| < \varepsilon \quad \text{für } n > m$$

---

[7]) Wird ein solcher Kreis in der Nähe von $z = 1$ durch $\varrho = 1 - g(\varphi)$ dargestellt (ϱ, φ Polarkoordinaten), so ist $g(\varphi) \simeq c\varphi^2$ für $\varphi \to 0$, wobei $c \to 0$ strebt, wenn der Kreismittelpunkt nach $z = 0$ rückt.

ist. Wegen $z_{n_\nu} \to 1$,

$$|z_{n_\nu}|^{n_\nu} = \left(\left(1 - \frac{1}{n_\nu^2}\right)^{-n_\nu^2}\right)^{-\frac{1}{n_\nu}} \to 1.$$

$$|z_{n_\nu}|^{n_\nu^3} = \left(\left(1 - \frac{1}{n_\nu^2}\right)^{-n_\nu^2}\right)^{-n_\nu} \to 0$$

ergibt sich für $n_\nu > m + 1$ (die Limessymbole sollen sich auf $\nu \to \infty$ beziehen):

$$f(z_{n_\nu}) = (1 - z_{n_\nu}) \sum_{n=0}^{m} s_n z_{n_\nu}^n + (1 - z_{n_\nu}) \sum_{n=m+1}^{n_\nu - 1} s_n z_{n_\nu}^n + \sum_{n=n_\nu+1}^{n_\nu^3} a_n z_{n_\nu}^n$$

$$+ (1 - z_{n_\nu}) \sum_{n=n_\nu^3+1}^{\infty} s_n z_{n_\nu}^n + s_{n_\nu} z_{n_\nu}^{n_\nu} - s_{n_\nu^3} z_{n_\nu}^{n_\nu^3+1}$$

$$= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + o(1).$$

$$S_1 = (1 - z_{n_\nu}) \sum_{n=0}^{m} s_n z_{n_\nu}^n = o(1).$$

$$|S_2| = \left|(1 - z_{n_\nu}) \sum_{n=m+1}^{n_\nu - 1} s_n z_{n_\nu}^n\right| < \varepsilon |1 - z_{n_\nu}| \sum_{n=m+1}^{n_\nu - 1} |z_{n_\nu}|^n$$

$$< \varepsilon \frac{|1 - z_{n_\nu}|}{1 - |z_{n_\nu}|} (1 - |z_{n_\nu}|^{n_\nu}) \cong \varepsilon \frac{\frac{2\pi}{n_\nu}}{\frac{1}{n_\nu^2}} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_\nu^2}\right)^{n_\nu}\right)$$

$$< 2\pi\varepsilon n_\nu \frac{1}{n_\nu}\ ^{8}),$$

$$|S_2| < 2\pi\varepsilon + o(1).$$

$$S_3 = \sum_{n=n_\nu+1}^{n_\nu^3} a_n z_{n_\nu}^n = \sum_{l=1}^{n_\nu^2 - 1} \sum_{k=1}^{n_\nu} a_{l n_\nu + k} z_{n_\nu}^{l n_\nu + k}$$

$$= \sum_{l=1}^{n_\nu^2 - 1} \sum_{k=1}^{n_\nu} \frac{\left(1 - \frac{1}{n_\nu^2}\right)^{l n_\nu + k}}{l n_\nu \log l n_\nu} > \sum_{l=1}^{n_\nu^2 - 1} \sum_{k=1}^{n_\nu} \frac{\left(1 - \frac{1}{n_\nu^2}\right)^{(l+1) n_\nu}}{l n_\nu \log l n_\nu}$$

$$> \sum_{l=1}^{n_\nu - 1} \frac{\left(1 - \frac{1}{n_\nu^2}\right)^{(l+1) n_\nu}}{l \log l n_\nu} > \left(1 - \frac{1}{n_\nu^2}\right)^{n_\nu^2} \left(q_{n_\nu} - \frac{1}{n_\nu \log n_\nu^2}\right),$$

$$S_3 > \frac{\log 2}{e} + o(1).$$

---

[8]) Es ist $(1 + p)^n > 1 + np$ für $n > 2$, $p > -1$, $p \neq 0$ (Bernoullische Ungleichung).

$$|S_4| = \Big|(1-z_{n_\nu}) \sum_{n=n_\nu^3+1}^{\infty} \varepsilon_n z_{n_\nu}^n\Big| < K\Big|1-z_{n_\nu}\Big| \sum_{n=n_\nu^3+1}^{\infty} \Big|z_{n_\nu}\Big|^n$$

$$< K\frac{|1-z_{n_\nu}|}{1-|z_{n_\nu}|}\,|z_{n_\nu}|^{n_\nu^3} \simeq 2\pi K n_\nu \Big(\Big(1-\frac{1}{n_\nu^2}\Big)^{-n_\nu^2}\Big)^{-n_\nu},$$

$$S_4 = o(1).$$

$$|f(z_{n_\nu})| \geqq |S_3| - |S_1| - |S_2| - |S_4| + o(1) > \frac{\log 2}{e} - 2\pi\varepsilon + o(1).$$

Daher ist

$$\liminf |f(z_{n_\nu})| \geqq \frac{\log 2}{e} - 2\pi\varepsilon,$$

und, da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist sicher nicht $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0$.

§ 4.

8. Die Berührung des Bereichs $\mathfrak{B}$ aus Satz 2 mit der imaginären Achse war vom Potenzcharakter. Es sollen nun auch noch andere Fälle in den Kreis der Betrachtung gezogen werden. Dazu dient der folgende

Satz 3. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *sei konvergent. Für* $-1 \leqq t \leqq 1$ *sei eine reelle stetige Funktion* $g(t)$ *definiert mit* $g(t) = g(-t)$, $g(0) = 0$, $0 < g(t) \leqq a$ für $t \neq 0$ *(a eine positive Konstante), und so, daß die Kurve* $\sigma = t\,g(t)$ *für* $0 \leqq t \leqq 1$ *ein Wegstück darstellt, und für* $x > 0$ *eine reelle, nicht abnehmende Funktion* $y(x) > x$. *Weiter sei mit einer von t unabhängigen positiven Zahl M*

(1) $$\frac{1}{g(t)}\, e^{-|t|\,g(t)\,y\left(\frac{1}{|t|}\right)} < M \quad \text{für} \quad 0 < |t| \leqq 1.$$

Strebt dann

(2) $$\sum_{x \leqq \lambda_n \leqq y(x)} |a_n| \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \infty,$$

so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ *gleichmäßig konvergent in dem durch*

$$\begin{cases} -1 \leqq t \leqq 1 \\ |t|\,g(t) \leqq \sigma \leqq a \end{cases}$$

gegebenen Bereich.

Beweis. Der Beweis braucht nur für den Fall $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$ geführt zu werden. Weiter genügt es, die gleichmäßige Konvergenz auf dem Rand

des fraglichen Bereichs nachzuweisen. Dazu kann man sich wiederum auf die Punktmenge

$$\mathfrak{C}': \begin{cases} 0 < |t| < \min\left(1, \frac{1}{\lambda_0}\right) \\ \sigma = |t|\, g(t) \end{cases}$$

beschränken. Man geht nun ganz analog wie beim Beweis von Satz 2 vor. Zu einem $\varepsilon > 0$ gibt es die Nummer p, so daß $\max(|a_n|, |s_n|) < \varepsilon$ für $n \geqq p$ und

$$\sum_{x \leqq \lambda_n \leqq y(x)} |a_n| < \varepsilon \quad \text{für} \quad y(x) \geqq \lambda_p$$

ist. Es sei von jetzt ab $m > p$ und z auf $\mathfrak{C}'$ gelegen. Bezeichne ich

mit λ' das größte $\lambda_n = \lambda_{n'}$, das noch $\leqq \frac{1}{|t|}$ ist,

mit λ'' das kleinste $\lambda_n = \lambda_{n''}$, das noch $\geqq y\left(\frac{1}{|t|}\right)$ ist,

so ist $n' < n''$ und

$$\sum_{\frac{1}{|t|} \leqq \lambda_n \leqq y\left(\frac{1}{|t|}\right)} |a_n| < \varepsilon \quad \text{für} \quad n'' \geqq m.$$

A. Es sei $m < n'$. Dann ist (vgl. S. 577)

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=m}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z} \right| &< 3\varepsilon + \varepsilon \frac{|z|}{\sigma} (e^{-\lambda_0 \sigma} - e^{-\lambda' \sigma}) + \sum_{\frac{1}{|t|} \leqq \lambda_n \leqq y\left(\frac{1}{|t|}\right)} |a_n| \\ &\quad + \varepsilon \frac{|z|}{\sigma} e^{-\lambda'' \sigma} \\ &< 4\varepsilon + \varepsilon \frac{\sqrt{g^2(t)+1}}{g(t)} \left(e^{-\lambda_0 \sigma} - e^{-\frac{\sigma}{|t|}}\right) + \varepsilon \frac{\sqrt{g^2(t)+1}}{g(t)} e^{-\sigma y\left(\frac{1}{|t|}\right)} \\ &< 4\varepsilon + \varepsilon \frac{\sqrt{a^2+1}}{g(t)} (1 - e^{-g(t)}) + \varepsilon \frac{\sqrt{a^2+1}}{g(t)} e^{-|t| g(t) y\left(\frac{1}{|t|}\right)} \\ &< \varepsilon(4 + \sqrt{a^2+1} + M\sqrt{a^2+1}). \end{aligned}$$

B. ($n' \leqq m \leqq n''$) und C. ($n'' < m$). Genau wie früher erledigt man diese beiden Fälle noch einfacher als Fall A. Damit ist Satz 3 bewiesen.

9. Beispiele. Die folgenden Beispiele sind so geordnet, daß die Berührung der den Bereich gleichmäßiger Konvergenz begrenzenden Kurve $\mathfrak{C}$ von der Gleichung $\sigma = |t|\, g(t)$ mit der imaginären Achse immer stärker wird. Demgemäß wird auch in der Voraussetzung immer mehr verlangt.

1. Es sei

$$y(x) = x(\log x)^{\vartheta} \qquad (\vartheta > 0).$$

Ist für ein gewisses $\vartheta > 0$ damit (2) erfüllt, so ist dies für jedes $\vartheta > 0$ der Fall. Aus (2) folgt nämlich

$$\sum_{x \leqq \lambda_n \leqq y(x)} |a_n| + \sum_{y(x) \leqq \lambda_n \leqq y(y(x))} |a_n| \to 0,$$

und es ist für genügend großes x

$$y(y(x)) = x (\log x)^{\vartheta} (\log x (\log x)^{\vartheta})^{\vartheta} \geqq x (\log x)^{2\vartheta}.$$

So komme ich von ϑ zu 2ϑ, also auch zu 4ϑ, usw. Ist nun α irgendeine positive Zahl, so kann ich

$$g(t) = \left(\log \frac{1}{|t|}\right)^{-\alpha}$$

wählen, denn es ist

$$\left(\log \frac{1}{|t|}\right)^{\alpha} e^{-\left(\log \frac{1}{|t|}\right)^{-\alpha} \left(\log \frac{1}{|t|}\right)^{\vartheta}}$$

bei genügend großem ϑ für $0 < |t| \leqq 1$ beschränkt. $\mathfrak{C}$ hat, wie man leicht feststellt, im Ursprung eine vertikale Tangente.

2. Mit

$$y(x) = x^{1+\vartheta}, \quad g(t) = |t|^{\alpha'}$$

($\vartheta > 0$; $\alpha' > 0$ beliebig) komme ich zu Satz 2. (Hat α die dortige Bedeutung, so besteht der Zusammenhang $\alpha = \frac{1}{1+\alpha'}$. Die in Satz 2 auftretende Konstante c ist wegen der Willkür von α ohne Belang.)

3. Es sei m eine feste positive ganze Zahl. Ich nehme [9])

$$y(x) = e_m (\log_m x)^{\vartheta} \qquad (\vartheta > 1).$$

Ist für ein gewisses $\vartheta > 1$ damit (2) erfüllt, so ist dies für jedes $\vartheta > 1$ der Fall, denn es ist

$$y(y(x)) = e_m \left(\log_m e_m (\log_m x)^{\vartheta}\right)^{\vartheta} = e_m (\log_m x)^{\vartheta^2}.$$

Ist nun $\alpha > 1$ beliebig gewählt, so kann ich

$$|t|\, g(t) = \frac{1}{e_m \left(\log_m \frac{1}{|t|}\right)^{\alpha}}$$

setzen. (1) ist für genügend großes ϑ erfüllt.

---

[9]) Wie üblich sei für $k = 1, 2, \ldots$

$$\log_1 x = \log x, \quad \log_{k+1} x = \log \log_k x,$$
$$e_1 x = e^x, \qquad e_{k+1} x = e^{e_k x}$$

gesetzt.

Für $\lambda_n = n$ (Potenzreihen) ist im gegenwärtigen Fall die Bedingung

$$\sum_{x \leqq n \leqq y(x)} |a_n| \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \infty$$

sicher dann erfüllt, wenn

$$a_n = o\left(\frac{1}{n \log n \log_2 n \dots \log_{m+1} n}\right)$$

ist. Das ergibt sich aus der Formel

$$\sum_{\nu = n_0}^{n} \frac{1}{\nu \log \nu \dots \log_{m+1} \nu} = \log_{m+2} n + E_{m+1} + o(1) \qquad (n \to \infty)$$

(n_0 so gewählt, daß die Logarithmen reell existieren; E_{m+1} eine gewisse Konstante), die man aus der Eulerschen Summenformel herleitet.

10. Bei allen Beispielen, die man durch spezielle Wahl von $g(t)$ und $y(x)$ zu Satz 3 geben kann, muß $y(x)$ wegen der Bedingung (1) von solcher Größenordnung sein, daß $\frac{y(x)}{x} \to \infty$ strebt für $x \to \infty$. Die nächstniedere Größenordnung wäre $y(x) \sim x$. Ich will nun zeigen, daß es mit einem solchen $y(x)$ einen Satz der betrachteten Art, der nicht schon im Stolzschen Fall enthalten ist, nicht gibt. Genauer:

Satz 4. *Es sei $g(\varphi)$ eine für $0 < \varphi < \varphi_0$ definierte positive Funktion, die (beliebig langsam) gegen 0 strebt für $\varphi \to +0$. Dann gibt es stets eine in $z = 1$ zum Wert s konvergierende Potenzreihe*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{3}$$

so daß für ein geeignetes $\vartheta > 0$

$$\sum_{x \leqq n \leqq (1+\vartheta)x} |a_n| \to 0 \tag{4}$$

strebt für $x \to \infty$ und daß

$$\lim_{\varphi \to +0} f\left([1 - \varphi g(\varphi)]\, e^{i\varphi}\right)$$

nicht als endlicher Grenzwert existiert.

Beweis. Es sei ε_ν ($\nu = 0, 1, \dots$) eine Nullfolge, die später geeignet gewählt werden wird. Ich setze $n_\nu = 2^\nu$ und

$$s_0 = 0, \quad s_{n_\nu} = s_{n_\nu + 1} = \dots = s_{n_{\nu+1} - 1} = \varepsilon_\nu.$$

Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s = 0$, und die Lückenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ erfüllt gewiß die Bedingung (4). Weiter ist wegen $n_{\nu+1} - n_\nu = n_\nu$

$$f(z) = (1-z)\sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu z^{n_\nu}(1 - z^{n_\nu}).$$

Setze ich nun für $n = 1, 2, \ldots$

$$z_n = \left(1 - \frac{1}{2^n} g\left(\frac{1}{2^n}\right)\right) e^{\frac{i}{2^n}},$$

so ist der gewünschte Nachweis erbracht, wenn die ε_ν so gewählt werden können, daß

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n)$$

nicht existiert. Eine solche Wahl der ε_ν ist nach einem schon früher benutzten Satz [5]) sicher möglich, wenn die Zeilennormen

$$N(z_n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} |z_n|^{n_\nu} |1 - z_n^{n_\nu}|$$

nicht beschränkt sind für $n \to \infty$. Nun ist mit $g\left(\frac{1}{2^n}\right) = c_n \to 0$

$$N(z_n) \geqq \sum_{\nu=n}^{\infty} \left(1 - \frac{c_n}{2^n}\right)^{2^\nu} \left|1 - |z_n|^{2^\nu} e^{i 2^{\nu-n}}\right|$$

$$\geqq \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{c_n}{2^n}\right)^{2^{k+n}} \left|1 - |z_n|^{2^{k+n}} e^{i 2^k}\right|.$$

Da $e^{i 2^k}$ nie reell wird, gibt es eine Folge $k(p)$ $(p = 0, 1, \ldots)$ von natürlichen Zahlen mit $k(p) \to \infty$, für die $e^{i 2^{k(p)}}$ negativen Realteil besitzt. Daher ist

$$N(z_n) \geqq \sum_{p=0}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{c_n}{2^n}\right)^{2^n}\right)^{2^{k(p)}}.$$

Für $n \to \infty$ strebt aber

$$\left(\left(1 - \frac{c_n}{2^n}\right)^{-\frac{2^n}{c_n}}\right)^{-c_n} \to 1,$$

also $N(z_n) \to \infty$, womit Satz 4 bewiesen ist.

§ 5.

Der Abel-Stolzsche Satz hat sein Analogon bei Laplace-Integralen. Auch die hier gewonnenen Resultate lassen sich auf dieselben übertragen. Wir führen die Übertragung für die Sätze 1 und 2 durch [10]).

11. Satz 5. *Konvergiert das Laplace-Integral*

$$\int_0^\infty e^{-zx} F(x)\,dx \qquad (z = \sigma + it) \tag{1}$$

für $z = 0$, *strebt überdies für ein* α *mit* $0 < \alpha \leqq 1$

$$x^{1-\alpha} \int_x^\infty F(x)\,dx \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \infty, \tag{2}$$

so konvergiert (1) *bezüglich seiner oberen Grenze für jedes positive* c *gleichmäßig in dem Bereich*

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\alpha, c): \begin{cases} 0 \leqq \sigma \leqq 1, \\ |t| \leqq c\,\sigma^\alpha. \end{cases}$$

Beweis. Wie beim Beweis von Satz 1 genügt es, die gleichmäßige Konvergenz in $\mathfrak{B}_1$ und für den Fall $s = 0$ darzutun. Die gewöhnliche Konvergenz ist gesichert für $\sigma > 0$. Ich setze

$$\varphi(x) = \int_x^\infty F(x)\,dx \qquad (x \geqq 0) \tag{3}$$

und wähle zu einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein positives X, so daß

$$\max\left(|\varphi(x)|,\ x^{1-\alpha}\,|\varphi(x)|\right) < \varepsilon \qquad \text{für } x > X$$

ist. Für $x_2 > x_1 > X$ und z in $\mathfrak{B}_1$ erhalte ich durch partielle Integration und unter Verwendung der ersten Gleichung § 1, (5)

$$\int_{x_1}^{x_2} e^{-zx} F(x)\,dx = -\left[e^{-zx}\varphi(x)\right]_{x_1}^{x_2} - z\int_{x_1}^{x_2} e^{-zx}\varphi(x)\,dx,$$

$$\left|\int_{x_1}^\infty e^{-zx} F(x)\,dx\right| < e^{-\sigma x_1}\,|\varphi(x_1)| + |z|\left|\int_{x_1}^\infty e^{-zx}\varphi(x)\,dx\right|$$

$$< \varepsilon + \varepsilon|z|\int_0^\infty e^{-\sigma x} x^{\alpha-1}\,dx = \varepsilon\left(1 + |z|\frac{\Gamma(\alpha)}{\sigma^\alpha}\right)$$

$$< \varepsilon(1 + P\,\Gamma(\alpha)),$$

womit der gewünschte Nachweis erbracht ist.

---

[10]) Es ist hier die in G. Doetsch, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin 1937, S. 13ff. gegebene Definition des Laplace-Integrals zugrunde gelegt. Über das Analogon zum Abel-Stolzschen Satz siehe a. a. O. S. 41, Satz 2 und S. 47, Satz 1.

12. Satz 6. *Konvergiert das Laplace-Integral* (1) *für* $z = 0$, *strebt überdies für ein positives* ϑ

$$\int_x^{x^{1+\vartheta}} |F(x)|\,dx \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \infty, \tag{4}$$

so konvergiert (1) *bezüglich seiner oberen Grenze für jedes* α *mit* $0 < \alpha < 1$ *und jedes positive* c *gleichmäßig im Bereich* $\mathfrak{B}(\alpha, c)$.

Beweis. Ich werde (4) mit $\beta = \frac{1}{\alpha}$ an Stelle von ϑ benutzen, was offenbar erlaubt ist. Weiter nehme ich $s = 0$. Es genügt, die gleichmäßige Konvergenz in $\mathfrak{B}'$ nachzuweisen, wobei $\mathfrak{B}'$ aus $\mathfrak{B}$ durch Wegnahme der Punkte mit $|t| \geqq 1$ und $|t| = 0$ entsteht. Nach § 2, (3) und (4) gibt es, wenn dort $\lambda_0 = 0$ gesetzt wird, zwei positive Schranken M_1 und M_2, so daß für z in $\mathfrak{B}'$

$$\frac{|z|}{\sigma}\left(1 - e^{-\frac{\sigma}{|t|}}\right) < M_1,$$

$$\frac{|z|}{\sigma} e^{-\frac{\sigma}{|t|^{1+\beta}}} < M_2$$

ist. $\varphi(x)$ sei wieder wie in (3) definiert.

Zu einem gegebenen $\varepsilon > 0$ wähle ich ein $X > 0$, so daß gilt:

$$|\varphi(x)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad x > X,$$

$$\int_x^{x^{1+\beta}} |F(x)|\,dx < \varepsilon \quad \text{für} \quad x^{1+\beta} > X.$$

Es sei nun z in $\mathfrak{B}'$ gelegen und $x_1 > X$.

A. Es sei $x_1 < \frac{1}{|t|}$. Für $x_2 > \frac{1}{|t|^{1+\beta}}$ erhält man

$$\int_{x_1}^{x_2} e^{-zx} F(x)\,dx = \int_{x_1}^{\frac{1}{|t|}} e^{-zx} F(x)\,dx + \int_{\frac{1}{|t|}}^{\frac{1}{|t|^{1+\beta}}} e^{-zx} F(x)\,dx + \int_{\frac{1}{|t|^{1+\beta}}}^{x_2} e^{-zx} F(x)\,dx$$

$$= -\left[e^{-zx}\varphi(x)\right]_{x_1}^{\frac{1}{|t|}} - z\int_{x_1}^{\frac{1}{|t|}} e^{-zx}\varphi(x)\,dx + \int_{\frac{1}{|t|}}^{\frac{1}{|t|^{1+\beta}}} e^{-zx} F(x)\,dx$$

$$- \left[e^{-zx}\varphi(x)\right]_{\frac{1}{|t|^{1+\beta}}}^{x_2} - z\int_{\frac{1}{|t|^{1+\beta}}}^{x_2} e^{-zx}\varphi(x)\,dx.$$

Ich lasse nun $x_2 \to \infty$ streben und bekomme

$$\begin{aligned}
\left|\int_{x_1}^{\infty} e^{-zx} F(x)\,dx\right| &< e^{-\frac{\sigma}{|t|}}\left|\varphi\left(\frac{1}{|t|}\right)\right| + e^{-\sigma x_1}|\varphi(x_1)| + |z|\int_{x_1}^{\frac{1}{|t|}} e^{-\sigma x}|\varphi(x)|\,dx \\
&+ \int_{\frac{1}{|t|}}^{\frac{1}{|t|^{1+\beta}}} e^{-\sigma x}|F(x)|\,dx + e^{-\frac{\sigma}{|t|^{1+\beta}}}\left|\varphi\left(\frac{1}{|t|^{1+\beta}}\right)\right| \\
&+ |z|\int_{\frac{1}{|t|^{1+\beta}}}^{\infty} e^{-\sigma x}|\varphi(x)|\,dx \\
&< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon|z|\int_0^{\frac{1}{|t|}} e^{-\sigma x}\,dx + \int_{\frac{1}{|t|}}^{\frac{1}{|t|^{1+\beta}}} |F(x)|\,dx \\
&+ \varepsilon + \varepsilon|z|\int_{\frac{1}{|t|^{1+\beta}}}^{\infty} e^{-\sigma x}\,dx \\
&< 4\varepsilon + \varepsilon\frac{|z|}{\sigma}\left(1 - e^{-\frac{\sigma}{|t|}}\right) + \varepsilon\frac{|z|}{\sigma}e^{-\frac{\sigma}{|t|^{1+\beta}}} \\
&< \varepsilon(4 + M_1 + M_2).
\end{aligned}$$

B. und C. Die Fälle $\frac{1}{|t|} \leqq x_1 \leqq \frac{1}{|t|^{1+\beta}}$ und $\frac{1}{|t|^{1+\beta}} < x_1$ lassen sich, so wie dies schon beim Beweis von Satz 2 der Fall war, unter Wegfall der vorderen Summanden mit denselben Abschätzungen wie unter A. erledigen. Damit ist Satz 6 bewiesen.

(Eingegangen am 6. Dezember 1939.)

Räumliche Ebenennetze, deren Sechsflachzellen Inkugeln besitzen.

Von

H. Graf in Darmstadt.

§ 1.

Fragestellung, Erklärungen.

1. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit besonderen Ebenennetzen im Raum, die sich den fastrhombischen Geradennetzen in der Ebene[1]) auf Grund einer analogen Definition und zahlreicher entsprechender Eigenschaften gegenüberstellen lassen.

Wie üblich erklären wir ein *Kurvennetz* in der Ebene als topologisches Abbild von zwei rechtwinkligen Scharen paralleler Geraden eines ebenen Gebiets[2]). Einer diskreten Anordnung dieser Geraden, z. B. einem Quadratmuster, entspricht im Kurvennetz eine diskrete Anordnung von Kurven, die wir als *Vierseitnetz* bezeichnen wollen; seine *Maschen* sind im allgemeinen krummlinige Vierseite. Im Sonderfall geradliniger Netzkurven sprechen wir von einem Geradennetz bzw. einem geradlinigen Vierseitnetz; seine Maschen sind stets konvex.

Ganz entsprechend erklären wir ein *Flächennetz* im Raum als topologisches Abbild von drei rechtwinkligen Scharen paralleler Ebenen eines räumlichen Gebiets[2]). Einer diskreten Anordnung dieser Ebenen, z. B. einem Würfelgefüge, entspricht im Flächennetz eine diskrete Anordnung von Flächen, die wir als *Sechsflachnetz* bezeichnen wollen; seine *Zellen* sind im allgemeinen krummflächige Sechsflache. Im Sonderfall ebener Netzflächen sprechen wir von einem Ebenennetz bzw. einem ebenflächigen Sechsflachnetz; seine Zellen sind stets konvex.

2. Wir fragen jetzt zunächst in der Ebene nach den allgemeinsten geradlinigen Vierseitnetzen mit der besonderen Eigenschaft, daß sämtliche Vierseitmaschen Inkreise besitzen. Diese Frage ist bereits beantwortet[1]) mit folgendem Hauptergebnis: Die Netzgeraden umhüllen stets eine beliebige Kurve zweiter Klasse, die auch zerfallen kann; in letzterem Falle gehören die Netzgeraden zwei Geradenbüscheln an, für die der eine oder beide Büschelscheitel auch unendlich fern sein können.

---

[1]) H. Graf und R. Sauer, Fastrhombische Kurven- und Viereckснetze, Math. Zeitschr. 44 (1938), S. 374—378, 380—386.

[2]) Das Gebiet sei „konvex" in bezug auf diese Parallelscharen, vgl. z. B. W. Blaschke und G. Bol, Geometrie der Gewebe, 1938, S. 5 bzw. 42, 43.

In Analogie zu diesem ebenen Problem fragen wir jetzt im Raum nach den allgemeinsten ebenflächigen Sechsflachnetzen mit der besonderen Eigenschaft, daß sämtliche Sechsflachzellen Inkugeln besitzen. Die Untersuchung und Beantwortung dieser zweiten Frage ist der Inhalt der vorliegenden Arbeit.

Fig. 1

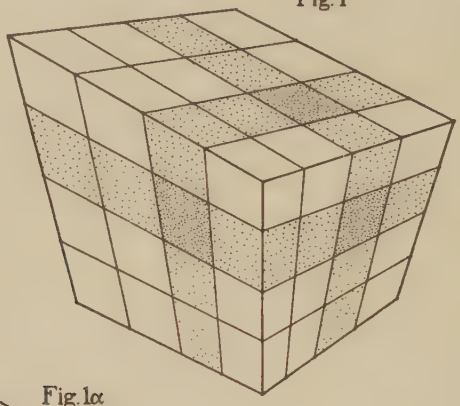


Fig. 1α

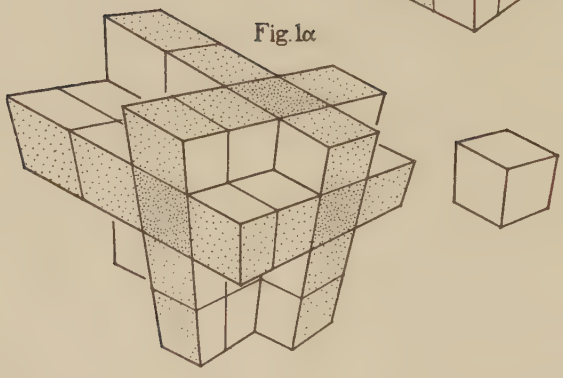
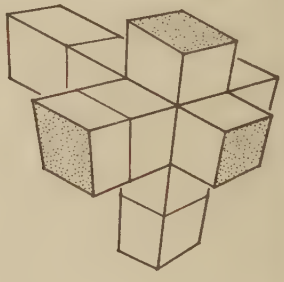


Fig. 1β



3. Wir gehen zunächst aus von einem beliebigen Sechsflachnetz im Raum, in dem die Netzebenen drei diskrete Ebenenfolgen von mindestens drei Ebenen je Folge bilden. (Der in Fig. 1 dargestellte Netzbereich enthält fünf Ebenen je Folge.) Die einzelnen Sechsflachzellen des Netzes fassen wir in folgender Weise zu „Zellschichten" bzw. „Zellsäulen" zusammen:

Unter *Zellschicht* verstehen wir die Gesamtheit der Zellen, welche begrenzt werden von jeweils zwei aufeinanderfolgenden Ebenen {die auch speziell parallel sein können} aus irgend einer der drei diskreten Ebenenfolgen. Die im Innern der Zellschicht gelegene Ebene, welche den Winkel {bzw. den Abstand} der beiden die Schicht begrenzenden Ebenen halbiert, heiße *Schichtmittelebene*. Entsprechend den drei Folgen von Netzebenen unterscheiden wir auch drei Folgen von Zellschichten und drei Folgen von Schichtmittelebenen.

Unter *Zellsäule* verstehen wir die Gesamtheit der Zellen, welche jeweils zwei Zellschichten aus irgend zwei verschiedenen Schichtfolgen gemeinsam sind. Die Schnittgerade der beiden Schichtmittelebenen im Innern der vierflächigen und stets konvexen Zellsäule nennen wir *Säulenmittelachse*.

Jede Einzelzelle gehört somit drei Zellschichten und drei Zellsäulen an (vgl. Fig. 1α bzw. 1β).

4. In unserem beliebigen Sechsflachnetz wollen wir die Netzstruktur dadurch „vergröbern", daß wir jeweils die gleiche Anzahl n aufeinanderfolgender Schichten der drei Schichtfolgen zu „dickeren" Schichten zusammenfassen. Je zwei bzw. je drei derartige dickere Schichten aus verschiedenen Schichtfolgen haben dann auch entsprechend dickere Säulen bzw. Zellen gemeinsam, die wir nach der Anzahl der in ihnen enthaltenen Einzelgebilde als *n-Schichten*, *n^2-Säulen*, *n^3-Zellen* bezeichnen. (Z. B. würde die in Fig. 1 dargestellte 4^3-Zelle drei 4^2-Säulen und drei 4-Schichten angehören.)

§ 2.

Notwendige Netzeigenschaften.

Wir fordern jetzt für unser Sechsflachnetz, daß sich allen Einzelzellen Kugeln einbeschreiben lassen. Die Mittelpunkte dieser Zellinkugeln liegen dann für die Zellen einer Schicht auf der Schichtmittelebene, für die Zellen einer Säule auf der Säulenmittelachse.

5. Greifen wir zunächst eine einzelne Zellsäule heraus! Ihre längs der Säulenachse aufgereihten Inkugeln berühren jede der vier Säulenebenen, sind also auch Inkugeln eines Drehkegels {oder speziell eines Drehzylinders}. Daraus gewinnt man sofort für die einzelne Säule folgende notwendige Eigenschaft:

Jede Zellsäule ist ein konvexes, pyramidisches {oder speziell prismatisches} Vierflach, dem stets ein Drehkegel {bzw. Drehzylinder} mit der Säulenmittelachse als Achse einbeschrieben werden kann.

Wir betrachten nunmehr zwei benachbarte Zellsäulen einer Zellschicht; sie haben drei Netzebenen gemeinsam, nämlich die beiden Ebenen der Zellschicht und die Ebene, welche die beiden Zellsäulen voneinander trennt. Daraus folgt, daß der Schnittpunkt dieser drei Ebenen {der speziell auch unendlich fern sein kann} gemeinsamer Scheitel der beiden Nachbarsäulen sein muß.

6. Nun lassen sich alle Zellsäulen, die irgend zwei herausgegriffenen Zellschichtfolgen des Sechsflachnetzes angehören, stets so aufreihen, daß sie in obigem Sinne benachbart aufeinanderfolgen (vgl. Fig. 1), d. h. die Zellsäulen dieser Mannigfaltigkeit haben den nämlichen Scheitelpunkt {der speziell auch unendlich fern sein kann} und bilden ein „Säulenbündel". Unser Sechs-

flachnetz, aus dem man auf dreifach verschiedene Weise je zwei Schichtfolgen herausgreifen kann, enthält somit drei verschiedene Säulenbündel mit insgesamt drei Scheitelpunkten. Da jede Schichtfolge je zwei Säulenbündeln angehört, enthält sie auch die beiden Bündelscheitelpunkte, d. h. unser Sechsflachnetz besteht zugleich aus drei verschiedenen „Schichtbüscheln" mit insgesamt drei Scheitelgeraden. Weder Scheitelpunkte noch Scheitelgerade können zusammenfallen, da schon zur Existenz einer einzigen Sechsflachzelle im Netz drei verschiedene Säulen bzw. Schichten vorhanden sein müssen. Zusammengefaßt erhalten wir also für unser Sechsflachnetz folgende notwendige Eigenschaft:

Die Netzebenen und die Schichtmittelebenen des Sechsflachnetzes gehören zu insgesamt drei Ebenenbüscheln und desgleichen die Säulenkanten und die Säulenmittelachsen zu insgesamt drei Geradenbündeln. Die Scheitelgeraden der Büschel bzw. die Scheitelpunkte der Bündel sind die Seiten bzw. die Ecken eines nicht ausgearteten Dreiecks {wobei die Möglichkeit offen bleibt, daß einzelne oder sämtliche Ecken dieses Scheiteldreiecks unendlich fern sind}.

§ 3.

Hilfssätze.

Der Inangriffnahme unseres Hauptproblems, ein ebenflächiges Sechsflachnetz in allgemeinster Weise so zu gestalten, daß sich sämtlichen Einzelzellen Kugeln einbeschreiben lassen, schicken wir zunächst folgende Hilfssätze I und II voraus:

7. Vorgegeben seien in beliebiger, zunächst endlicher Lage im Raum: Eine Gerade s, außerhalb s ein Punkt S und außerhalb der Ebene sS eine Kugel mit dem Mittelpunkt A (vgl. die Lotrißdarstellung in Fig. 2; die Rißtafel ist hier senkrecht zu s gewählt, die mit $'$ versehenen Buchstaben bezeichnen Punkte, Gerade und Ebenen im Lotriß). Dann gilt der

Hilfssatz I: Aus der Schar der Inkugeln des Drehkegels, welcher S als Scheitel und die vorgegebene Kugel um A als Inkugel besitzt, sowie aus der Schar der Ebenen durch s läßt sich je eine diskrete unendliche Folge so herausgreifen, daß — angefangen mit der Kugel um A — die Ebenen und die Kugeln abwechselnd aufeinanderfolgen und sich wechselseitig berühren. Die Ebenenfolge erstreckt sich dabei über den vollen Bereich des Ebenenbüschels um s und besitzt die Ebene sS als einzige „Häufungsebene".

Beweis: Zur Erzeugung der unendlichen Kugel- und Ebenenfolge bestimmen wir der Reihe nach: Berührend zur Kugel um A die beiden Ebenen durch s; berührend zu diesen beiden Ebenen die beiden restlichen Kegelinkugeln; berührend zu diesen beiden Inkugeln die beiden restlichen Ebenen

durch s; usf. Entnimmt man der Lotrißfig. 2 die zu einer beliebigen Kugel der Kugelfolge gehörigen Strecken $S'A_i'$, $s'A_i'$ und Winkel δ, α_i, dann besteht zwischen ihnen die Beziehung

$$\text{(0)} \qquad \sin\frac{\alpha_i}{2} = \frac{S'A_i'}{s'A_i'}\sin\frac{\delta}{2}.$$

Die Ebenen der Ebenenfolge können sich nur dann häufen, wenn $\alpha_i \to 0$, d. h. für $A_i \to S$. Für alle übrigen Punkte der Achse a ist $\alpha_i \neq 0$, z. B. auch für den unendlich fernen Achsenpunkt $\alpha_i \to \delta$. Daraus folgt, daß die Ebenen der Folge sich über den ganzen Bereich des Ebenenbüschels um s erstrecken und die Ebene sS als einzige Häufungsebene besitzen.

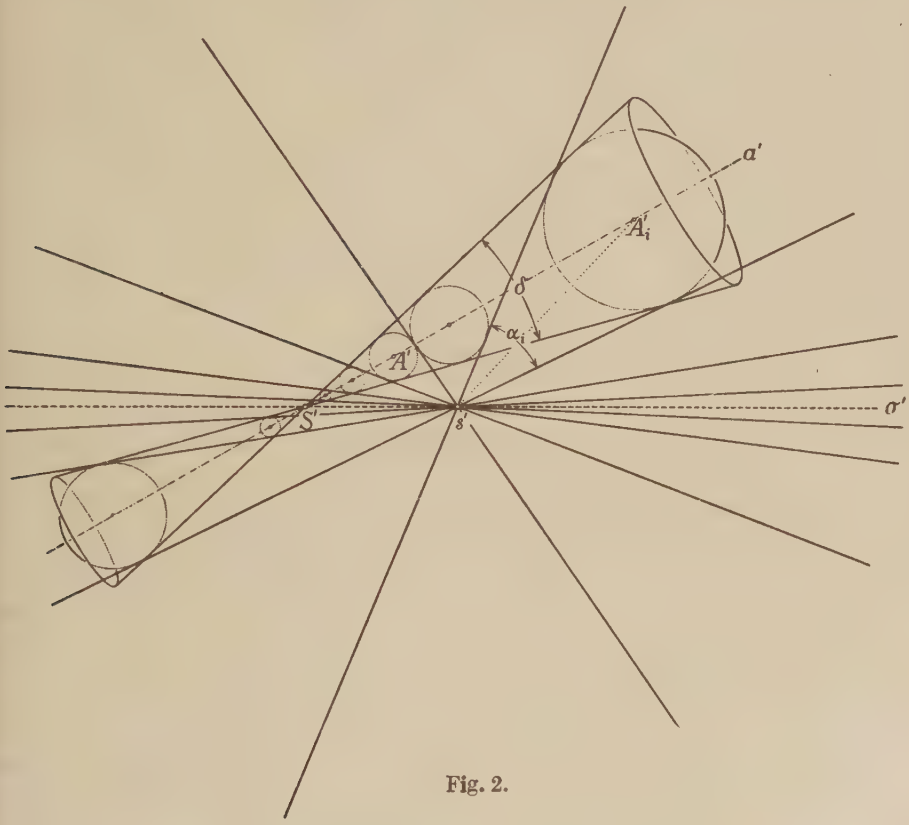


Fig. 2.

8. Der Hilfssatz I gilt sinngemäß auch dann, wenn sich der Punkt S oder die Gerade s im Unendlichfernen befinden. Anschließend wird unter a) und b) kurz die Veränderung angedeutet, die sich für den Hilfssatz I in Wortlaut und Beweisgang gegenüber seiner ursprünglichen Fassung ergibt. Die beim Beweis benutzten Strecken und Winkel denke man sich einer gegenüber der Fig. 2 entsprechend abgeänderten Lotrißfigur entnommen.

a) Scheitelpunkt S auf der Achse a jetzt ihr unendlichferner Punkt S_∞; statt Drehkegel um a jetzt Drehzylinder, statt Kegelwinkel δ jetzt Zylinderdurchmesser d, statt Beziehung (0) jetzt

$$\sin\frac{\alpha_i}{2} = \frac{d/2}{s'A_i'},$$

also $\alpha_i \to 0$ nur für $A_i \to S_\infty$. Die unendliche Ebenenfolge um s besitzt demnach als einzige Häufungsebene die zylinderparallele Ebene sS_∞ und erstreckt sich über den ganzen Raumbereich.

b) Scheitelgerade s auf der Ebene σ jetzt deren unendlichferne Gerade s_∞: die Ebenen der unendlichen Folge jetzt parallel zu σ, statt der Ebenenwinkel α_i jetzt Ebenenabstände a_i, statt Beziehung (0) jetzt

$$\frac{a_i}{2} = S'A_i' \sin\frac{\delta}{2},$$

also $a_i \to 0$ nur für $A_i \to S$. Die parallelen Ebenen, die sich beiderseits der Ausgangskugel um A — sowohl in Richtung auf σ als auch auf die unendlichferne Ebene ε_∞ zu — in unendlicher Folge aufreihen, besitzen also diese beiden Ebenen σ und ε_∞ als Häufungsebenen und erstrecken sich zwangläufig nur über den zwischengelegenen Halbraumbereich.

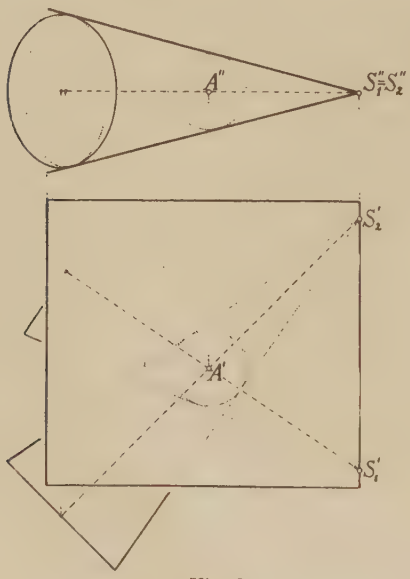


Fig. 3.

9. Vorgegeben seien in beliebiger, zunächst endlicher Lage im Raum: Zwei Punkte S_1 und S_2 und außerhalb der Geraden S_1S_2 ein Punkt A (vgl. Grund- und Aufrißdarstellung in Fig. 3; die Aufrißtafel ist senkrecht zu S_1S_2 gewählt). Dann gilt der unmittelbar evidente

Hilfssatz II: Irgend zwei Drehkegel, welche die Scheitelpunkte S_1 und S_2 und die Achsen AS_1 und AS_2 besitzen und welche zwei Berührebenen (durch S_1S_2) gemeinsam haben, haben stets auch eine Inkugel (um A) gemeinsam.

Der Hilfssatz II gilt sinngemäß auch dann, wenn sich von den Scheitelpunkten S_1 und S_2 entweder a) ein Punkt oder b) beide Punkte im Unendlichfernen befinden. An die Stelle der Drehkegel mit den Scheitelpunkten S_1 und S_2 treten dann jeweils Drehzylinder.

§ 4.

Erzeugung und Darstellung der allgemeinsten ebenflächigen Sechsflachnetze mit Inkugelzellen.

10. Als notwendige Eigenschaft eines Sechsflachnetzes, dessen Einzelzellen Inkugeln besitzen, ergab sich nach § 2 die Existenz eines Scheiteldreiecks, dessen Seiten die Scheitelgeraden der drei Büschel von Netzebenen und dessen Ecken die Scheitelpunkte der drei Bündel von Netzgeraden darstellen. *Wir werden jetzt beweisen, daß diese notwendigen Bedingungen auch hinreichend sind, und zwar sowohl in dem allgemeinen Falle, daß alle drei Scheitelpunkte sich im Endlichen befinden, als auch in den Sonderfällen, daß* a) *ein Scheitelpunkt*, b) *zwei Scheitelpunkte*, c) *drei Scheitelpunkte unendlich fern sind. Im einzelnen wird sich dabei noch folgendes ergeben:*

Das Sechsflachnetz ist in seiner gesamten Ausdehnung durch die Vorgabe einer einzigen Netzzelle bereits eindeutig bestimmt und läßt sich — von dieser Zelle ausgehend — zwangläufig aufbauen. Bei diesem Aufbau erstrecken sich die Ebenen der drei unendlichen diskreten Ebenenfolgen des Netzes sowohl im allgemeinen Fall als auch in den Sonderfällen a) *und* c) *zwangläufig über den ganzen Raum*[3]) *und häufen sich in der Ebene des Scheiteldreiecks. Im Sonderfall* b), *in welchem eine der drei Netzebenenfolgen aus parallelen Ebenen besteht, erstrecken sich die Ebenen dieser Folge zwangläufig nur über einen Halbraum auf der einen Seite der Scheiteldreiecksebene und häufen sich sowohl in dieser Ebene als auch in der unendlich fernen Ebene.*

Netzerzeugung im allgemeinen Fall:

11. Wir gehen aus von einem beliebigen im Endlichen befindlichen Scheiteldreieck $S_1S_2S_3$, dessen Seiten die Scheitelgeraden der drei Netzebenenbüschel darstellen, und einer beliebigen, aber ganz außerhalb der Ebene $S_1S_2S_3$ gelegenen Kugel um A, welche Inkugel irgend einer Zelle des gesuchten Sechsflachnetzes sein soll (vgl. Fig. 4).

Durch die Vorgabe dieser aus Scheiteldreieck und Kugel bestehenden „Ausgangsfigur" sind zunächst die sechs Ebenen dieser Zelle eindeutig bestimmt; ebenso würde umgekehrt die Vorgabe einer Netzzelle als Ausgangsfigur wieder Scheiteldreieck und Kugel eindeutig festlegen. Unter Nr. 12

[3]) Ein derartiges aus der Netzebenengesamtheit bestehendes Raumgefüge umfaßt im allgemeinen Fall und im Sonderfall a) außer den konvexen „geschlossenen" Inkugelzellen und Inkegelsäulen, die dem Gesamtbereich des Netzes angehören, stets auch noch „offene" Sechsflachzellen bzw. Vierflachsäulen mit ebenfalls allseits berührenden Kugeln bzw. Drehkegeln. Eine Erweiterung des Netzbegriffs durch Einbezug dieser offenen Zellen und Säulen, deren „Inneres" jetzt sinngemäß (d. h. sich über das Unendlichferne des Raumes erstreckend) zu deuten wäre, würde es ermöglichen, den Bereich unseres Sechsflachnetzes ohne Änderung der kennzeichnenden Netzeigenschaften auf den *ganzen* Raum auszudehnen.

wird dann weiter gezeigt, daß sich im Anschluß an eine solche Ausgangsfigur stets das gesamte Sechsflachnetz zwangläufig aufbauen läßt, womit zugleich bewiesen ist, daß das erzeugte Netz das allgemeinste seiner Art darstellt.

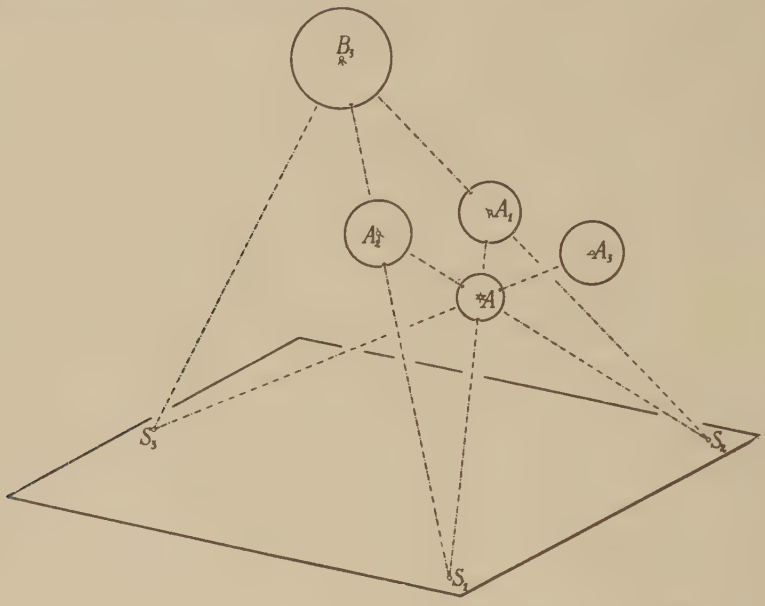


Fig. 4.

12. Von den drei Drehkegeln mit den Scheiteln S_1, S_2, S_3 und der gemeinsamen Inkugel um A bestimmt jeder Kegel (z. B. der mit dem Scheitel S_3 und der Achse S_3A) nach Hilfssatz I je eine diskrete Folge von Ebenen (durch S_1S_2) bzw. von Inkugeln (längs S_3A), die sich abwechselnd berühren. Die drei diskreten Ebenenfolgen, die zusammen ein Sechsflachnetz bilden, gehören den Ebenenbüscheln um die Seiten des Scheiteldreiecks an und besitzen nach Hilfsatz I stets die Ebene dieses Scheiteldreiecks als einzige Häufungsebene. Wir wollen nun zeigen, daß in dem so erzeugten Sechsflachnetz allen Sechsflachzellen Kugeln einbeschrieben werden können; dabei werden wir zunächst unter Nr. 13 beweisen, daß jede beliebige Zellsäule einen Indrehkegel besitzt, und daraus dann unter Nr. 14 den Schluß ziehen, daß jede beliebige einzelne Zelle eine Inkugel besitzen muß.

13. Eine beliebige Zellsäule mit beispielsweise S_3 als Scheitelpunkt gehört stets zwei Zellschichten an. Die Ebenenpaare dieser beiden Zellschichten gehen dann durch S_2S_3 bzw. S_1S_3 und berühren je eine beliebige Kugel — etwa die Kugel um A_1 bzw. A_2 — aus den Inkugelfolgen der zugehörigen Drehkegel mit den Achsen S_1A bzw. S_2A. Die Mittelebenen der beiden Zellschichten, die Ebenen $S_2S_3A_1$ und $S_1S_3A_2$, schneiden sich

in der Mittelachse S_3B_3 der in Frage stehenden Zellsäule; besitzt letztere, wie behauptet, einen Indrehkegel, so ist S_3B_3 auch Achse dieses Kegels. Nun berührt das Ebenenpaar einer dritten Zellschicht, nämlich das mit der Mittelebene $S_1S_2A\,A_1A_2B_3$, die drei Inkugeln um A, A_1, A_2; es berührt folglich auch die vier zugehörigen Drehkegel um S_1A_1, S_2A_2, S_1A_2, S_2A_1. Die beiden zuletztgenannten Drehkegel um S_1A_2 und S_2A_1 besitzen dann nach Hilfssatz II eine gemeinsame Inkugel um B_3. Andererseits werden diese Drehkegel um S_1A_2 und S_2A_1 — und folglich auch ihre gemeinsame Inkugel um B_3 — von den vier Ebenen der Zellsäule um S_3B_3 berührt; d. h. diese Zellsäule besitzt tatsächlich einen Indrehkegel um S_3B_3, w. z. b. w.

14. Eine beliebige Sechsflachzelle gehört stets drei Zellschichten und drei Zellsäulen an. Die drei Schichtmittelebenen schneiden sich gegenseitig in den drei Säulenmittelachsen, die zugleich die Achsen der nach Nr. 13 vorhandenen Säuleninkegel darstellen. Der Schnittpunkt der drei Mittelebenen und -achsen muß aber für den Fall, daß die drei Säuleninkegel eine Inkugel gemeinsam haben, Mittelpunkt dieser Inkugel sein. Dieser Fall liegt vor, denn je zwei der drei Zellsäulen gehören einer Zellschicht an, ihre Indrehkegel berühren die beiden Ebenen dieser Schicht und müssen folglich nach Hilfssatz II eine Inkugel gemeinsam haben. Diese Inkugel der drei Säuleninkegel ist somit auch Inkugel der drei Zellsäulen und der ihnen gemeinsam angehörenden Sechsflachzelle, w. z. b. w.

Netzerzeugung in den Sonderfällen:

15. In den Sonderfällen, daß von den nicht auf einer Geraden gelegenen Scheitelpunkten S_1, S_2, S_3 einzelne oder alle ins Unendlichferne rücken, verläuft die Erzeugungsweise des Netzes und die Beweisführung völlig analog wie im allgemeinen Fall.

Zeichnerische Darstellung der Netze:

16. Die vier Netztypen eines ebenflächigen Sechsflachnetzes, dessen sämtliche Zellen Inkugeln besitzen, sind einzeln in den Lotrissen Fig. 5, 5a, 5b und 5c gezeichnet. Als Netzbereich ist jeweils eine Achterzelle herausgegriffen und so dargestellt, als ob die drei in ihrem Innern gelegenen Ebenen undurchsichtig, die sechs sie außen begrenzenden Ebenen durchsichtig wären. In jeder Figur ist von den acht Zellinkugeln des Bereichs je eine angegeben.

Von den drei Scheitelpunkten S_1, S_2, S_3, die sich beim allgemeinen Netztypus in Fig. 5 sämtlich im Endlichen befinden, sind bei den besonderen Netztypen in Fig. 5a ein Scheitelpunkt S_3, in Fig. 5b zwei Scheitelpunkte S_2 und S_3 und in Fig. 5c sämtliche Scheitelpunkte ins Unendlichferne gerückt, und zwar längs der drei durch den Punkt O zielenden Geraden, denen in allen vier Figuren die nämlichen Richtungen gegeben sind.

Fig. 5

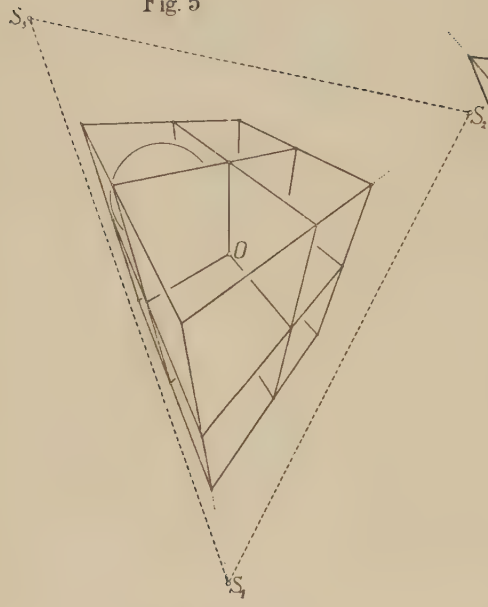


Fig. 5a

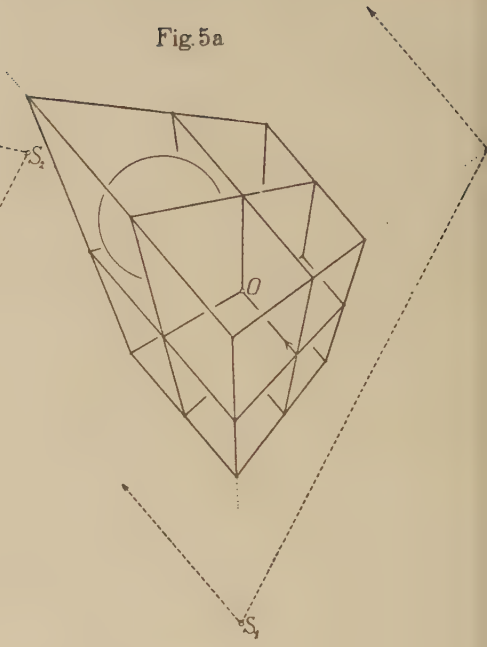


Fig. 5b

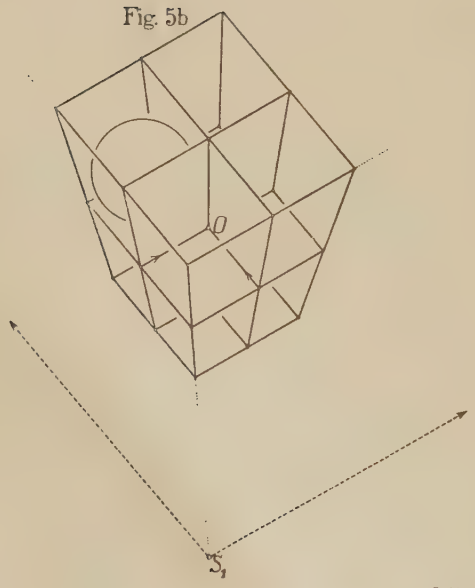
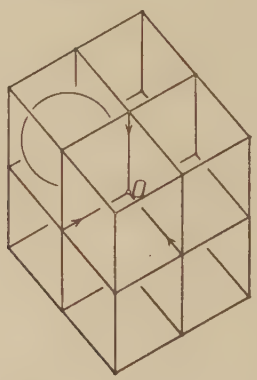


Fig. 5c



§ 5.

Netzeigenschaften bei Vergröberung der Netzstruktur.

17. Wir vergröbern (vgl. Nr. 4) in einem Sechsflachnetz die Netzstruktur dadurch, daß wir je n^3 Einzelzellen zu größeren Zellen — sogenannten n^3-Zellen — zusammenfassen. Dann gilt der

Satz. *Ein ebenflächiges Sechsflachnetz, dessen sämtliche Einzelzellen Inkugeln besitzen, hat stets die Eigenschaft, daß auch sämtliche n^3-Zellen beliebiger Größe ($n = 2, 3, 4 \ldots$) Inkugeln besitzen.*

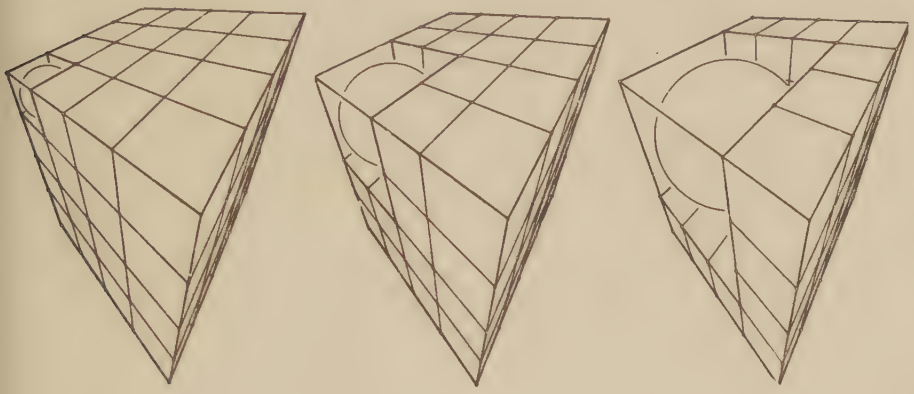


Fig. 6.

Diese Eigenschaft unseres Sechsflachnetzes ist in Fig. 6 veranschaulicht. Ein Teilbereich des Netzes, eine 4^3-Zelle, ist dreimal im Lotriß dargestellt. Von den Inkugeln ihrer Einzelzellen, ihrer 2^3-Zellen, ihrer 3^3-Zellen usf. ist der Reihe nach in jeder Lotrißfigur nur immer eine Inkugel bloßgelegt, indem die jeweils an der linken Ecke des Netzbereichs herausgegriffene Einzelzelle, 2^3-Zelle und 3^3-Zelle als durchsichtig dargestellt wird.

Beweis des Satzes für den allgemeinen Fall:

18. Wir führen den Beweis zunächst für ein Sechsflachnetz mit drei im Endlichen gelegenen Scheitelpunkten S_1, S_2, S_3 und bedienen uns dabei der schon unter Nr. 14 gebrauchten Schlußweise: Besitzen im Sechsflachnetz sämtliche Einzelsäulen Indrehkegel, dann müssen auch sämtliche Einzelzellen Inkugeln besitzen. Für das vergröberte Sechsflachnetz ausgesprochen heißt das also: Besitzen im Sechsflachnetz sämtliche n^2-Säulen Indrehkegel, dann müssen auch sämtliche n^3-Zellen Inkugeln besitzen.

Der Beweis für unseren Satz ist somit erbracht, wenn wir nachgewiesen haben, daß in unserem Sechsflachnetz irgend eine beliebig herausgegriffene n^2-Säule einen Indrehkegel besitzt. Da diese n^2-Säule einem Säulenbündel, z. B. dem mit dem Scheitelpunkt S_3, angehört, können wir unsere räumliche Aufgabe in eine sphärische umgestalten: Wir bringen die n^2-Säule und das ganze zu ihr gehörige Bündel pyramidischer Einzelsäulen einschließlich deren Indrehkegel zum Schnitt mit einer „Bildkugel" um S_3. Das auf ihr entstehende sphärische Netz besteht aus zwei Büscheln von Kugelgroßkreisen und besitzt lauter konvexe Vierseitmaschen mit einbeschriebenen Kugelkleinkreisen.

Unsere Aufgabe besteht nun darin, zu beweisen, daß jede beliebige n^2-Masche unseres sphärischen Netzes ebenfalls einen solchen Inkreis besitzt. Wir führen diesen Beweis in zwei Abschnitten: unter Nr. 19 für $n = 2$, unter Nr. 20 für $n = 3, 4, \ldots$ und jedes beliebige n.

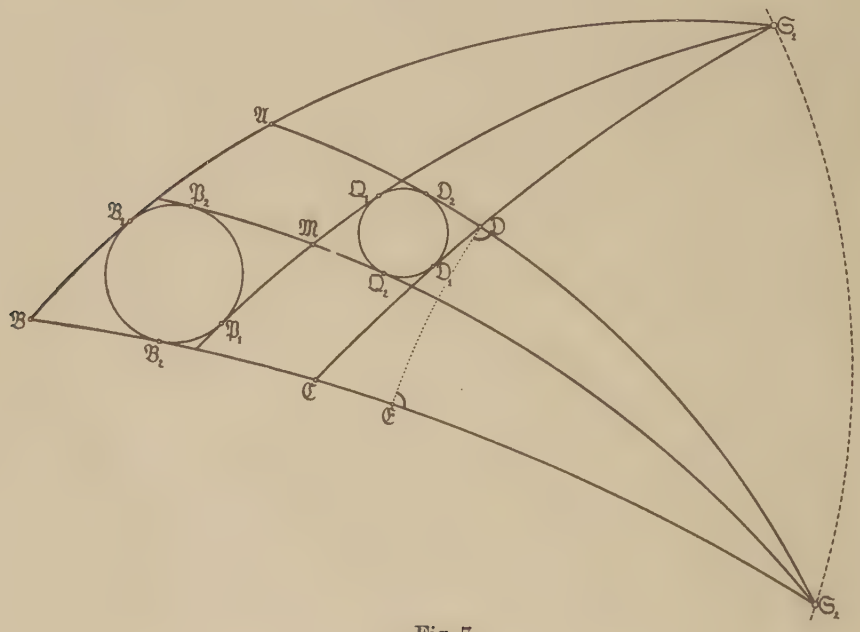


Fig. 7.

19. Die Fig. 7 stellt (in stereographischer Projektion) eine sphärische Vierermasche dar, die beliebig aus unserem Netz auf der Bildkugel um S_3 herausgegriffen sei. Die sechs Netzlinien der Vierermasche gehören zwei Großkreisbüscheln des Netzes an und laufen zusammen in den zwei Bildpunktpaaren der zwei Scheitelpunkte S_1 und S_2, von denen in der Figur aber nur zwei Einzelpunkte $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ angegeben sind. Desgleichen sind auch von allen übrigen grundsätzlich ja paarweise auftretenden Bildpunkten jeweils nur Einzelpunkte angegeben. Sämtliche sphärischen Maschenvierseite sind konvex und liegen außerhalb der gestrichelten Großkreislinie durch $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2$, wie ja entsprechend die pyramidischen Säulenvierflache konvex sind (vgl. Nr. 5) und außerhalb der Scheitelebene $S_1S_2S_3$ verlaufen (vgl. Nr. 10). Schließlich sind in der Figur noch zwei Maschenkreise angegeben, und zwar diejenigen, welche zu zwei gegenüberliegenden Einzelmaschen der dargestellten Vierermasche gehören.

Nun soll zunächst bewiesen werden, daß dem Vierseit $\mathfrak{ABCD}$ unserer Vierermasche ein Kreis einbeschrieben werden kann. Die notwendige und

hinreichende Bedingung dafür ist die Gleichheit der beiden Summen, die aus den Gegenseitenlängen des sphärischen Vierseits gebildet werden; diese Gleichung lautet für das konvexe Vierseit $\mathfrak{ABCD}$: $\mathfrak{AB} + \mathfrak{CD} = \mathfrak{AD} + \mathfrak{CB}$, für das mit ihm in den Seitenlinien übereinstimmende konkave Vierseit $\mathfrak{S}_1\mathfrak{B}\mathfrak{S}_2\mathfrak{D}$: $\mathfrak{S}_1\mathfrak{B} + \mathfrak{S}_2\mathfrak{D} = \mathfrak{S}_1\mathfrak{D} + \mathfrak{S}_2\mathfrak{B}$. Zur Herleitung dieser letzten Gleichung setzen wir für folgende, z. T. gleich große Bogenlängen abkürzend: $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}\mathfrak{B}_2 = b$, $\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}\mathfrak{D}_2 = d$, $\mathfrak{M}\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{M}\mathfrak{P}_2 = p$, $\mathfrak{M}\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{M}\mathfrak{Q}_2 = q$; $\mathfrak{S}_1\mathfrak{M} = s_1$, $\mathfrak{S}_2\mathfrak{M} = s_2$. Beachtet man auch die Bogengleichheit der Netzlinien von $\mathfrak{S}_1$ bzw. $\mathfrak{S}_2$ aus an die beiden Inkreise bis zu den zugehörigen Berührpunkten, dann folgt sofort

$$\mathfrak{S}_1\mathfrak{B} = s_1 + p + b, \qquad \mathfrak{S}_1\mathfrak{D} = s_1 - q - d,$$

$$\underline{\mathfrak{S}_2\mathfrak{D} = s_2 - q - d, \qquad \mathfrak{S}_2\mathfrak{B} = s_2 + p + b,}$$

also:
$$\mathfrak{S}_1\mathfrak{B} + \mathfrak{S}_2\mathfrak{D} = \mathfrak{S}_1\mathfrak{D} + \mathfrak{S}_2\mathfrak{B},$$

d. h. das sphärische Vierseit $\mathfrak{S}_1\mathfrak{B}\mathfrak{S}_2\mathfrak{D}$ bzw. $\mathfrak{ABCD}$ besitzt stets einen Inkreis.

20. Wir wollen jetzt weiter beweisen, daß das sphärische Vierseit $\mathfrak{ABCD}$ auch dann stets einen Inkreis besitzt, wenn es irgend eine Neunermasche unseres Netzes begrenzt. Der Nachweis hierzu ist unmittelbar dadurch gewonnen, daß wir in Fig. 7 die eine Einzelmasche mit Inkreis — etwa die linke — als Vierermasche deuten, während die andere rechte Masche mit Inkreis nach wie vor eine Einzelmasche darstellen soll. Das Vierseit $\mathfrak{ABCD}$, jetzt also eine Neunermasche begrenzend, muß nun ebenfalls einen Inkreis besitzen auf Grund der Beweisschlüsse unter Nr. 19, wo von der Kennzeichnung der herausgegriffenen Inkreismaschen als Einzelmaschen, Vierermaschen oder dergleichen kein Gebrauch gemacht wurde. Auf die nämliche Weise kann man Schritt für Schritt weiterschließen, daß jede beliebige n^2-Masche ($n = 2, 3, 4, \ldots$) unseres Netzes einen Inkreis besitzt.

Beweis des Satzes für die Sonderfälle:

21. Von den besonderen Sechsflachnetzen, deren Scheitelpunkte S_1, S_2, S_3 einzeln oder sämtlich im Unendlichfernen liegen, wurde beim Beweis des Satzes unter Nr. 18 zunächst abgesehen. Der Beweis wird nun anschließend unter a), b) und c) auch auf diese Sonderfälle ausgedehnt, wobei die notwendigen Änderungen in der Schlußweise gegenüber dem ursprünglichen Beweisgang nur kurz angedeutet seien:

a) S_3 unendlich fern. Das zugehörige Parallelbündel prismatischer Säulen wird mit einer Bildebene geschnitten, wobei ein ebenes Netz aus zwei Geradenbüscheln entsteht. An Hand der Fig. 7, jetzt entsprechend gedeutet, erfolgt der Beweis völlig analog zu Nr. 18—20.

b) S_2 und S_3 unendlich fern. Das zu S_3 gehörige Parallelbündel liefert – wie unter a) – ein ebenes Netz aus zwei Geradenbüscheln, wobei aber $\mathfrak{S}$ jetzt unendlich fern ist. Für die weitere Schlußweise würde zwar die Gleichung $\mathfrak{S}_1\mathfrak{B} + \mathfrak{S}_2\mathfrak{D} = \mathfrak{S}_1\mathfrak{D} + \mathfrak{S}_2\mathfrak{B}$, welche $\mathfrak{S}_1\mathfrak{B}\mathfrak{S}_2\mathfrak{D}$ als Vierseit mit Inkreis kennzeichnete, versagen, jedoch nicht die ihr gleichwertige Gleichung $\mathfrak{S}_1\mathfrak{B} - \mathfrak{S}_1\mathfrak{D} = \mathfrak{S}_2\mathfrak{B} - \mathfrak{S}_2\mathfrak{D} = \Delta$; denn der Betrag $\Delta = \mathfrak{B}\mathfrak{E}$ behält seine geometrische Bedeutung auch dann, wenn der in Fig. 7 punktierte Kreisbogen um den Punkt $\mathfrak{S}_2$ bei einer unendlichfernen Lage dieses Punktes jetzt in eine Gerade senkrecht zu $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ ausartet.

c) S_1, S_2 und S_3 unendlich fern. In diesem regulären Sonderfall besteht das Sechsflachnetz aus drei Folgen paralleler Ebenen von gleichem Abstand (= Inkugeldurchmesser); Inhalt und Beweis unseres Satzes sind hier trivial.

(Eingegangen am 24. Dezember 1939.)

Über die Eigenschaften der beschränkten ebenen Kurven ohne Tangentensingularität.

Von

Gyula (Julius) v. Sz. Nagy in Szeged (Ungarn).

1. Einleitung.

Das Wort *Kurve* bedeutet im folgenden ein reelles, eindeutiges, stetiges und mit stetiger Tangente versehenes Kreisbild in der projektiven Ebene. Sie besitzt also keine Ecke. Wir nehmen an, daß die Kurve keine gerade Strecke enthält.

Besitzt eine beschränkte ebene Kurve (die also mit der unendlichfernen Geraden g_∞ ihrer Ebene keinen Punkt gemeinsam hat) keine Tangentensingularität und hat sie r Rückkehrpunkte erster Art, so wird sie im folgenden mit K_r bezeichnet werden. Die Anzahl der Doppelpunkte, die Ordnung bzw. die Klasse der Kurve K_r wird mit d, n bzw. m bezeichnet. Dabei wird unter der *Ordnung* von K_r die Maximalanzahl von reellen Punkten (jeden Punkt mit entsprechender Vielfachheit gerechnet) verstanden, welche die Kurve mit einer Geraden ihrer Ebene gemeinsam hat. In ähnlicher Weise bedeutet die *Klasse* einer Kurve K_r die Maximalanzahl der Tangenten, die aus einem Punkte ihrer Ebene an die Kurve gezogen werden können.

In bezug auf die Kurven K_r sind die folgenden Resultate bekannt:

Ist $r = 0$, so sind $d = 0$ und $n = m = 2$. Nach dem Moebius-Kneserschen Satz hat nämlich eine ebene Kurve, die außer Doppelpunkten keine anderen Punkt- oder Tangentensingularitäten besitzt, keine Doppelpunkte. Eine solche Kurve läßt sich in ein im Endlichen liegendes Oval projizieren[1]).

Ist $d = 0$ und $r \neq 0$, so sind $r = 3$, $n = 4$ und $m = 3$. Es gibt ebene Kurven ohne Tangentensingularitäten, für welche $d = 0$, $r = 3$, $n = 6$ und $m = 3$. Diese Kurven lassen sich aber nicht ins Endliche projizieren[2]).

[1]) A. Kneser, Einige allgemeine Sätze über die einfachsten Gestalten ebener Kurven, Math. Annalen **41** (1893), S. 349—376, insbesondere § 13. Vgl. auch J. Hjelmslev, Om Grundlaget for Laeren om simple Kurver, Nyt Tidsskrift f. Math. **18** (1907), S. 49—70, und Gyula (Julius) v. Sz. Nagy, Einige Sätze über ebene Elementarkurven, Acta Scient. Math. Szeged. **5** (1931), S. 83—89.

[2]) Dieser Satz wurde von mir am Anfang des Jahres 1921 bewiesen, vgl. die vorher angeführte Arbeit und die folgende ungarische Arbeit von mir, Über die ebenen Kurven, die außer Spitzen erster Art keine anderen Singularitäten haben, Math. u. Naturwiss. Anzeiger d. Ung. Akad. d. Wiss. **44** (1927), S. 420—433. Der duale Satz wurde von E. Stenfors (= E. Kivikoski) bewiesen, Ein Satz über völlig stetige geschlossene Kurven, Comm. phys.-math. Soc. Fennicae **1** (1923), Abhandl. 27, S. 1—5.

Eine *Kurve* K_r wird im folgenden mit B_r bzw. C_r bezeichnet, je nachdem die Anzahl r ihrer Rückkehrpunkte eine ungerade bzw. gerade Zahl ist.

Jede Kurve B_r ist eine *Buschenveloppe* von H. Brunn, weil sie in jeder Richtung genau eine einfache Tangente besitzt[3]). Hingegen haben die Kurven C_r in jeder Richtung genau zwei verschiedene Tangenten.

In dieser Arbeit[4]) werden wir fast ausschließlich die Eigenschaften der Kurven C_r untersuchen, weil die Behandlung der Kurven B_r den Gegenstand einer früheren Arbeit von uns gebildet hatte[5]).

Die r Rückkehrpunkte einer Kurve C_r teilen die Kurve in r Komponenten, von denen $r-1$ immer Konvexbogen sind. Die letzte Komponente ist entweder ein Konvexbogen, oder läßt sich in zwei Konvexbogen zerlegen. Eine Kurve C_r besteht also aus r oder $r+1$ Konvexbogen und ist deshalb eine Elementarkurve im Sinne von C. Juel[6]).

Man kann leicht einsehen, daß die Äquidistanten einer Buschenveloppe B_r Kurven C_{2r} sind. Man kann aus Ovalen auf verschiedene Weisen Kurven C_r konstruieren. Unter gewissen Bedingungen für das Oval C_0 berühren z. B. die Geraden, die zu den Tangenten von C_0 äquidistant sind und die das Oval C_0 in getrennten Punkten treffen, eine Kurve C_r. Auf ähnliche Weise umhüllen die parallelen Geradenpaare, von denen die Fläche des Ovales C_0 in drei gleiche Flächen geteilt wird, eine Kurve C_r.

2. Die zwei Arten der Kurven K_r.

Die Kurven K_r sind paar, d. h. sie werden von jeder Geraden der Ebene in einer geraden Anzahl von Punkten getroffen, weil sie keine Wendetangenten haben. Die Ebene wird von einer Kurve K_r in gewisse Gebiete geteilt. Aus jedem Punkte eines Gebietes geht dieselbe Anzahl von Tangenten an die Kurve.

Bewegt sich nämlich ein Punkt in einem dieser Gebiete, so kann sich die Anzahl der von ihm an K_r gehenden Tangenten nicht verändern, weil

---

[3]) H. Brunn, Über Kurven ohne Wendetangenten, München 1889, S. 1—75, insbesondere S. 16—29.

[4]) Diese Arbeit enthält unter anderem die wichtigsten Resultate der ungarischen Arbeit von mir, Über die ebenen Kurven ohne Tangentensingularität und vom Index Null, Math. u. Naturwiss. Anzeiger der Ungar. Akad. d. Wiss. **54** (1936), S. 358—372.

[5]) Gy. (J.) v. Sz. Nagy, Über die Buschenveloppen von H. Brunn, Math. Zeitschr. **41** (1936), S. 479—492. Diese Arbeit wird im folgenden unter Buschenveloppe angeführt.

[6]) C. Juel, Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven dritter und vierter Ordnung, Danske Vidensk. Selks. Skrifter, 7. R., Naturvidensk. og Math. Afd. XI. **2** (1914), S. 113—167.

der Punkt während seiner Bewegung die Kurve oder ihre Wendetangenten (die reell nicht existieren) nicht überschreiten kann.

Daraus folgt, daß man aus jedem Punkte des Gebietes, das sich ins Unendliche dehnt, an K_r dieselbe Anzahl von Tangenten ziehen kann. Diese Anzahl ist gerade bzw. ungerade, je nachdem die Anzahl r der Rückkehrpunkte von K_r gerade bzw. ungerade ist[7]).

Es gilt der Satz:

I. *Eine Kurve* K_r (die also im Endlichen liegt und keine Tangentensingularitäten besitzt) *hat in jeder Richtung genau eine Tangente oder genau zwei verschiedene Tangenten, je nachdem die Anzahl* r *ihrer Rückkehrpunkte eine ungerade bzw. eine gerade Zahl ist.*

Zum Beweis dieses Satzes müssen wir nur zeigen, daß eine Kurve K_r in keiner Richtung mehr als zwei Tangenten haben kann.

Nehmen wir an, daß diese Behauptung unrichtig ist und die Geraden $g_1, g_2, \ldots, g_q$ $(q \geqq 3)$ verschiedene parallele Tangenten der Kurve K_r sind. Wir können annehmen, daß die Aufeinanderfolge dieser Tangenten in der Ebene mit der Aufeinanderfolge ihrer Indizes zusammenfällt, dann liegen die Geraden $g_2, g_3, \ldots, g_{q-1}$ zwischen den äußeren Geraden g_1 und g_q. Wir bezeichnen den Berührungspunkt von K_r auf der Tangente g_i mit P_i $(i = 1, 2, \ldots, q)$.

Während ein Punkt P sich vom Punkte P_1 ausgehend auf der Kurve K_r bis zum Punkte P_2 bewegt, geht die Tangente des Punktes P von g_1 ausgehend in die Gerade g_2 über. Während dieser Bewegung des Punktes P geht also eine äußere Tangente von K_r in eine innere über.

Dies ist aber unmöglich, weil der Punkt P während seiner Bewegung im Endlichen bleibt und zwei Tangenten von K_r nicht zusammenfallen können. Die Kurve K_r hat nämlich keine Doppeltangente und keine Wendetangente.

Daraus folgt, daß entweder $q = 1$ oder $q = 2$ ist. Ist r eine ungerade Zahl, so ist die Klasse von K_r und auch die Zahl q ungerade. In diesem Falle ist also $q = 1$. Ist r eine gerade Zahl, so ist $q = 2$ aus demselben Grunde.

Aus dem Satz I folgt:

II. *Ist* r *eine ungerade Zahl, so ist die Kurve* K_r *eine Buschenveloppe* B_r *von H. Brunn. Die Kurven* C_r *haben in jeder Richtung genau zwei verschiedene Tangenten.*

Es gilt die folgende Umkehrung der Sätze I und II:

III. *Eine Kurve, die in jeder Richtung eine einzige Tangente hat, oder die in jeder Richtung genau zwei voneinander verschiedene einfache Tangenten*

[7]) C. Juel, a. a. O., S. 127.

hat, liegt im Endlichen und hat keine Tangentensingularität. Sie ist also eine Kurve B_r bzw. C_r.

Zum Beweis dieses Satzes müssen wir nur zeigen, daß die Kurve K, die in jeder Richtung genau eine oder genau zwei verschiedene Tangenten hat, mit der unendlichfernen Geraden g_∞ ihrer Ebene keinen gemeinsamen Punkt haben kann. In dem entgegengesetzten Falle könnte man durch eine zentrale Projektion die Gerade g_∞ in eine eigentliche Gerade g', die Kurve K in eine Kurve K' überführen. Diese Projektion führt die parallelen Tangenten von K in solche Tangenten von K' über, die aus je einem Punkte von g' ausgehen. Die Kurve K' wird aber von g' getroffen. Aus jedem Punkte von g' können also nicht ebenso viele und voneinander verschiedene Tangenten an K' gehen. K' und g' und deshalb K und g_∞ können also keinen gemeinsamen Punkt haben.

Aus der Annahme, daß die Kurve K in jeder Richtung nur einfache Tangenten hat, folgt, daß sie keine Tangentensingularitäten hat.

Damit ist der Satz III bewiesen.

3. Über die Komponenten der Kurven C_r und über ihre Totalkrümmungen.

Ein von zwei Rückkehrpunkten begrenzter Bogen einer Kurve C_r, der selbst keinen Rückkehrpunkt enthält, ist eine *Komponente* der Kurve. Eine Kurve C_r besteht also aus r Komponenten.

Die *Totalkrümmung* einer Kurve bzw. eines Bogens der Kurve bedeutet den Winkel, um welchen die Tangente der Kurve bzw. des Bogens sich dreht, während die Kurve bzw. der Bogen von einem Punkte im selben Sinne durchlaufen wird.

Jede Kurve C_r liegt im Endlichen und hat in jeder Richtung genau zwei Tangenten. Daraus folgen die Sätze:

IV. *Während eine Kurve C_r von einem Punkte beschrieben wird, dreht sich ihre Tangente um den Winkel 2π. Die Totalkrümmung einer Kurve C_r ist also 2π.*

V. *Das arithmetische Mittel der Totalkrümmungen der Komponenten einer Kurve C_r $(r \geqq 2)$ ist $\frac{2\pi}{r}$. Eine Kurve C_r kann höchstens eine Komponente von der Totalkrümmung $\geqq \pi$ haben.*

VI. *Die Komponenten einer Kurve C_r sind mit der Ausnahme von höchstens einer Komponente sämtlich Konvexbogen.*

Zum Beweis dieses letzten Satzes benutzen wir die charakteristische Eigenschaft der Konvexbogen, daß sie von jeder Geraden der Ebene in höchstens zwei Punkten getroffen werden.

Wir nehmen an, daß eine Komponente γ der Kurve C_r von der Geraden g in mehr als zwei Punkten getroffen wird. Sind $P_1, P_2, P_3, \ldots$ die auf γ aufeinanderfolgenden gemeinsamen Punkte der Geraden g mit γ, so haben die Bogen $P_1P_2, P_2P_3, \ldots$ von γ offenbar mindestens je eine zu g parallele Tangente. Daraus folgt, daß die Totalkrümmung von γ größer als π ist.

Damit ist der Satz VI bewiesen, weil eine Kurve C_r höchstens eine Komponente haben kann, deren Totalkrümmung größer als π ist.

Wir führen die folgenden Benennungen ein:

Die *Ordnung* einer ebenen Kurve K bzw. eines Bogens γ von K *in bezug auf ein Strahlenbüschel* der Ebene bedeutet die Maximalanzahl der Treffpunkte von K bzw. γ mit einer beliebigen Geraden des Strahlenbüschels. Die *Klasse* der Kurve K bzw. des Bogens γ *in bezug auf die Punkte einer Geraden* der Ebene bedeutet die Maximalanzahl der Tangenten von K bzw. γ, die durch einen Punkt der Geraden gehen. Die Ordnung des Bogens γ bedeutet die Maximalanzahl der Treffpunkte von γ mit einer beliebigen Geraden der Ebene. Entsprechend läßt sich die Klasse von γ definieren.

Aus dem Beweis des Satzes VI folgt der Satz

VII. *Jede Kurve C_r hat mindestens $r-1$ Komponenten zweiter Ordnung. Die Ordnung der letzten Komponente ist entweder Zwei oder Drei. In bezug auf ein paralleles Strahlenbüschel der Ebene haben entweder $r-2$ Komponenten von C_r die Ordnung Eins und zwei Komponenten die Ordnung Zwei, oder $r-1$ Komponenten die Ordnung Eins und eine Komponente die Ordnung Drei.*

Hätte nämlich die Kurve C_r im Gegensatz zu VII mehr solche Komponenten, deren Ordnung in bezug auf ein paralleles Strahlenbüschel größer als Eins ist, so hätte C_r in der Richtung des Strahlenbüschels mehr als zwei parallele Tangenten. Im Satz VII ist aber der Treffpunkt der Tangente eines Rückkehrpunktes A mit der einen bzw. anderen Komponente von C_r, die in A einen Endpunkt hat, in A zweifach bzw. einfach zu rechnen.

Es gelten auch die Sätze:

VIII. *Eine Kurve C_r kann höchstens eine Komponente haben, die sich schneidet. Eine Komponente von C_r mit Doppelpunkten hat genau einen Doppelpunkt.*

IX. *Zwei auf einer Kurve C_r benachbarte Komponenten können einander nur dann schneiden, wenn die eine Komponente einen Doppelpunkt hat. Die Anzahl ihrer Schnittpunkte kann auch dann nicht größer sein als Eins.*

X. *Zwei nicht benachbarte Komponenten einer Kurve C_r schneiden einander in höchstens zwei Punkten.*

Eine Kurve C_r kann höchstens eine Komponente haben, die kein Konvexbogen ist (Satz VI). Eine Kurve C_r hat also höchstens eine Komponente mit

Doppelpunkten. Hätte nun diese Komponente die Doppelpunkte P_1 und P_2, so wäre sie von der Geraden P_1P_2 in mindestens vier Punkten getroffen. Dies ist aber nach dem Satz VII unmöglich. Damit ist der Satz VIII bewiesen.

Sind $\gamma_1 = \overset{\frown}{AB}$ und $\gamma_2 = \overset{\frown}{AC}$ benachbarte Komponenten von C_r, so können wir annehmen, daß γ_1 ein Konvexbogen ist. Dann liegt γ_1 ganz auf der einen Seite der Tangente a des Rückkehrpunktes A von C_r. (Wäre nämlich γ_1 von der Endtangente a geschnitten, so wäre sie kein Konvexbogen.) Die dem Endpunkte A genügend nahe liegenden Punkte von γ_2 liegen auf der anderen Seite von a. Die Komponenten γ_1 und γ_2 können also einander nur dann schneiden, wenn γ_2 die Gerade a in einem Punkte Q überschreitet. Schneiden γ_1 und γ_2 einander im Punkte P_1, so bezeichnen wir mit γ_2' bzw. γ_2'' den Teilbogen $\overset{\frown}{AQ}$ bzw. $\overset{\frown}{QC}$ von γ_2. Die Punkte A und Q zerlegen die Kurve C_r in zwei Bogen γ_2' und Γ_2'.

Wir nehmen nun an, daß γ_1 und γ_2 einander im Gegensatz zu IX auch in einem zweiten Punkte P_2 schneiden. Die Punkte P_1 und P_2 liegen auf γ_2''. Deshalb haben γ_1 und γ_2'' je eine zu der Geraden P_1P_2 parallele Tangente. Der Bogen Γ_2' enthält die Bogen γ_1 und γ_2''. Die Totalkrümmung von Γ_2' ist also größer als π, weil Γ_2' zwei zu der Geraden P_1P_2 parallele Tangenten besitzt. Die Totalkrümmung von γ_2' ist offenbar größer als π, weil er kein Konvexbogen ist. Dies ist aber unmöglich, weil die Totalkrümmung 2π von C_r der Summe der Totalkrümmungen von γ_2' und Γ_2' gleich ist.

Daraus folgt, daß γ_1 und γ_2 einander nur im Punkte P_1 schneiden. Die Gerade AP_1 kann (nach dem Satz VII) außer A und P_1 die Komponenten γ_1 und γ_2 nicht treffen. Daraus folgt, daß der Teilbogen $\overset{\frown}{AP_1}$ der Komponente γ_2 von der Verbindungsgeraden seiner Endpunkte nur in Endpunkten getroffen wird. Hätte nun der Bogen $\overset{\frown}{AP_1}$ keinen Doppelpunkt, so wäre er ein Konvexbogen, weil er keine Punkt- und Tangentensingularitäten hat. Der Bogen $\overset{\frown}{AP_1}$ ist aber kein Konvexbogen, weil er den Bogen γ_2' in sich enthält. Daraus folgt, daß der Bogen $\overset{\frown}{AP_1}$ und damit auch die Komponente γ_2 einen Doppelpunkt hat.

Damit ist der Satz IX bewiesen.

Bedeuten γ_1 und γ_2 zwei *nicht* benachbarte Komponenten von C_r, so können wir annehmen, daß γ_1 ein Konvexbogen ist. Für den Beweis des Satzes X nehmen wir an, daß γ_1 von γ_2 in mindestens drei Punkten getroffen wird und daß die Aufeinanderfolge dieser Treffpunkte auf γ_1 $P_1P_2P_3\ldots$ ist.

Bedeutet δ_1 bzw. δ_2 den Teilbogen von γ_1 bzw. γ_2 zwischen den Punkten P_1 und P_3, so ist der Bogen δ_2 entweder ein Konvexbogen, oder er hat einen Doppelpunkt, weil er von der Verbindungsgeraden P_1P_3 seiner Endpunkte außer P_1 und P_3 nicht getroffen wird. (Im entgegengesetzten Falle hätte

nämlich die Gerade P_1P_3 mindestens fünf Punkte mit dem Paare der Komponenten γ_1 und γ_2 gemeinsam.)

Wenn der Punkt P_2 nicht nur auf γ_2, sondern auch auf δ_2 liegt, so liegen die Bogen δ_1 und δ_2 auf derselben Seite der Geraden P_1P_3.

Sind δ_1 und δ_2 Konvexbogen, so kann man aus P_1 und P_3 an sie außer den Endtangenten in P_1 und P_3 keine anderen Tangenten ziehen. Während ein Punkt P einen solchen Teilbogen von δ_1 (bzw. δ_2) hindurchläuft, dessen Endpunkte von P_1 und P_3 abweichen, kann sich die Anzahl der Treffpunkte des Bogens δ_2 (bzw. δ_1) mit der Tangente p des Punktes P nur dann verändern, wenn p durch eine Tangente von δ_2 (bzw. δ_1) hindurchgeht, weil p inzwischen durch P_1 und P_3 nicht durchgehen kann. Liegt die zur Geraden P_1P_3 parallele Tangente des Konvexbogens δ_1 von der Geraden P_1P_3 weiter als diejenige von δ_2, so trifft diese Tangente von δ_1 den Konvexbogen δ_2 nicht. Da δ_1 und δ_2 im Punkte P_2 einander schneiden, hat δ_1 auch eine Tangente, von der δ_2 geschnitten wird. Es gibt also auch eine Tangente von δ_1, die zugleich auch den Bogen δ_2 berührt. Dies ist aber unmöglich, weil die Kurve C_r keine Doppeltangente besitzt. Das gleiche gilt auch dann, wenn die zur Geraden P_1P_3 parallele Tangente von δ_2 von der Geraden P_1P_3 einen gleichen oder größeren Abstand hat als diejenige von δ_1.

Hat δ_2 den Doppelpunkt D, so liegt D im Winkelraum $P_2P_1P_3$ oder $P_1P_2P_3$, weil δ_2 nach Satz VII mit der Geraden P_1P_2, P_2P_3 bzw. P_1P_3 außer dem Punktpaar P_1P_2, P_2P_3 bzw. P_1P_3 keinen anderen Treffpunkt hat. Liegt D z. B. im Winkelraum $P_2P_1P_3$, so hat die Gerade P_1D mit γ_1 zwei, mit γ_2 mindestens drei Treffpunkte. Dies ist aber unmöglich.

Es bleibt nur der Fall übrig, daß P_2 kein Punkt des Bogens δ_2 ist. Wir bezeichnen in diesem Falle die äußersten zwei Bogen, in welche die Komponente γ_2 durch die Punkte P_1 und P_3 geteilt wird, mit δ_2' und δ_2'', so daß δ_2 mit δ_2' bzw. δ_2'' den Endpunkt P_1 bzw. P_3 gemeinsam habe.

Die Gerade P_1P_3 hat mit γ_1 und γ_2 außer P_1 und P_3 keinen anderen Punkt gemeinsam. Die Bogen δ_2 und δ_2' (oder δ_2 und δ_2'') liegen auf entgegengesetzten Seiten der Geraden P_1P_3. Da P_2 kein Punkt von δ_2 ist, können wir annehmen, daß er auf δ_2' liegt. Die Bogen δ_1 und δ_2' liegen also auf derselben Seite der Geraden P_1P_3.

Die Teilbogen δ_2, δ_2' und δ_2'' der Komponente γ_2 sind Konvexbogen.

Wäre nämlich der Bogen δ_2 kein Konvexbogen, so hätte er einen Doppelpunkt und enthielte er einen geschlossenen Konvexbogen mit einer Ecke. Dieser geschlossene Konvexbogen hätte dann in der Richtung der Geraden P_1P_2 mindestens eine Tangente. Dies ist aber unmöglich, weil auch δ_1 und δ_2' je eine Tangente von dieser Richtung haben.

Wäre der Bogen δ_2' (bzw. δ_2'') kein Konvexbogen, so hätte er in der Richtung der Geraden P_1P_3 eine Ordnung $\geqq 2$. Dann hätte aber δ_2' (bzw. δ_2'') mindestens eine Tangente von dieser Richtung. Dies ist aber unmöglich, weil auch δ_1 und δ_2 je eine Tangente von dieser Richtung haben.

Wir bezeichnen mit G das von δ_1 und von der Strecke P_1P_3 begrenzte konvexe Gebiet und mit P_2' den (von P_1 ab) ersten Schnitpunkt von δ_2' mit δ_1.

Es gibt zwei Möglichkeiten, je nachdem der Teilbogen $\overset{\frown}{P_1P_2'} = \bar{\delta}_2'$ von δ_2' außerhalb bzw. innerhalb von G liegt.

Liegt $\bar{\delta}_2'$ außerhalb von G und bedeutet $\bar{\delta}_1$ einen Teilbogen von δ_1, der einen Endpunkt in P_3, den anderen aber auf dem Teilbogen $\overset{\frown}{P_1P_2'}$ von δ_1 hat, so haben $\bar{\delta}_2'$ und $\bar{\delta}_1$ eine Tangente gemeinsam.

Die zur Geraden P_1P_2' parallele Tangente von $\bar{\delta}_2'$ trifft $\bar{\delta}_1$ in keinem Punkte, weil $\bar{\delta}_2'$ außerhalb von G liegt. Die Tangente von $\bar{\delta}_2'$ in P_2' schneidet den Konvexbogen $\bar{\delta}_1$. Bewegt sich nun ein Punkt P auf $\bar{\delta}_2'$ vom Punkte Q aus, dessen Tangente zu P_1P_2' parallel ist, bis zum Punkte P_2', so muß die Tangente p von $\bar{\delta}_2'$ in P inzwischen durch eine Tangente von $\bar{\delta}_1$ hindurchgehen. Die Tangente p kann nämlich während dieser Bewegung von P durch den Endpunkt P_3 von $\bar{\delta}_1$ nicht durchgehen, weil $\bar{\delta}_2'$ im entgegengesetzten Falle auch eine zu der Geraden P_1P_3 parallele Tangente hätte.

Daraus folgt, daß $\bar{\delta}_2'$ außerhalb von G nicht liegen kann.

Wir beweisen, daß der Bogen $\bar{\delta}_2'$ auch innerhalb des konvexen Gebietes G nicht liegen kann.

Läge nämlich $\bar{\delta}_2'$ innerhalb von G, so hätte δ_2 eine gemeinsame Tangente mit dem Teilbogen $\bar{\gamma}_1$ von γ_1, der den Bogen δ_1 enthält und der den einen Endpunkt in P_3, den anderen Endpunkt $\bar{P}_1$ aber innerhalb des von δ_2 und von der Strecke P_1P_3 begrenzten konvexen Gebietes G_1 hat. Die zu P_1 gehörige Endtangente p_1 von δ_2 schneidet den Bogen $\bar{\gamma}_1$ in P_1.

Der Bogen δ_2 hat einen Punkt P_0, dessen Tangente p_0 zu der Geraden P_1P_3 parallel ist. Diese Tangente trifft $\bar{\gamma}_1$ in keinem Punkte. Bewegt sich nun ein Punkt P auf δ_2 von P_0 ausgehend bis zum Punkte P_1, so geht die Tangente p von δ_2 (im Punkte P) während dieser Bewegung von P durch keinen Endpunkt des Konvexbogens $\bar{\gamma}_1$ hindurch, weil $\bar{P}_1$ im Gebiete G_1 liegt und weil P_3 auch ein Endpunkt von δ_2 ist. Daraus folgt, daß es eine Tangente von δ_2 gibt, von der auch $\bar{\gamma}_1$ berührt wird (weil $\bar{\gamma}_1$ von p_0 nicht getroffen, von p_1 aber getroffen wird).

Dies ist aber unmöglich, weil C_r keine Doppeltangente besitzt. Damit ist der Satz X bewiesen.

4. Über die Ordnung und Klasse der Kurven C_r.

XI. *Für die Ordnung n und für die Klasse m einer Kurve C_r mit r Rückkehrpunkten besteht die Ungleichung*

$$m \leqq n \leqq r + 2.$$

Die Ungleichung $n \leqq r + 2$ folgt direkt aus dem Satz VII. Die Ungleichung $m \leqq n$ läßt sich auf folgende Weise einsehen:

Die Ebene wird von einer Kurve C_r in gewisse Gebiete geteilt. Aus jedem Punkte eines Gebietes geht dieselbe Anzahl der Tangente an C_r.

Bewegt sich nämlich ein Punkt in einem dieser Gebiete, so kann sich die Anzahl der von ihm an C_r gehenden Tangenten nicht verändern, weil der Punkt während dieser Bewegung die Kurve oder ihre Wendetangenten (die reell nicht existieren) nicht überschreiten kann.

Ist G_0 ein Gebiet, aus dessen Punkten die maximale Anzahl m der Tangenten an C_r gehen, so kann man aus einem inneren Punkte von G_0 nur die konvexe Seite seiner Randbogen erreichen.

Wäre nämlich die konkave Seite eines Randbogens von G_0 aus einem inneren Punkte P_0 von G_0 erreichbar, so würde die Anzahl der aus einem Punkte P an C_r gehenden Tangenten vergrößert, wenn P von P_0 ausgehend durch den betreffenden Randbogen von G_0 in das benachbarte Gebiet gelangt. Die Klasse von C_r wäre also größer als m, was eine Unmöglichkeit ist.

Liegt der gewöhnliche Punkt P von C_r auf dem Rande von G_0 und ist p die Tangente von C_r in P, so wird die Kurve C_r von p in höchstens $n - 2$ Punkten geschnitten. Liegen die Schnittpunkte von C_r und p sämtlich auf der Strecke P_1P_2 von p, so kann man aus P_1 und P_2 ebenso, wie aus dem unendlichfernen Punkte von p an C_r nur je zwei Tangenten senden.

Bewegt sich nun ein Punkt Q auf der Geraden p von P_1 bis P_2, so kann sich die Anzahl der Tangenten aus Q an C_r nur dann ändern, wenn Q die Kurve überschreitet. Die Änderung ist Zunahme bzw. Abnahme um Zwei, je nachdem ein konvexer Bogen von der konkaven Seite nach der konvexen bzw. in umgekehrter Richtung überschritten wird. Daraus folgt, daß die Anzahl der Tangenten aus Q an C_r sich während der vorigen Bewegung von Q ebenso oft ändert, wie die Kurve C_r von der Tangente p geschnitten wird, also höchstens $(n - 2)$-mal.

Die Anzahl der von Q an C_r gehenden Tangenten nimmt während der genannten Bewegung von Q ebenso oft zu wie ab, weil man aus den Punkten P_1 und P_2 an C_r je zwei Tangenten ziehen kann. Daraus folgt die Ungleichung

$$m \leqq 2 + \frac{n-2}{2} \cdot 2 = n.$$

Damit ist der Satz XI bewiesen.

Aus dem Beweis folgt, daß die Klasse einer Kurve C_r bei gegebenen r und n ihren Maximalwert nur dann erreicht, wenn C_r von einer Tangente p in genau $n-2$ Punkten geschnitten wird, und wenn ein von einem genügend weit liegenden Punkte von p ausgehender und auf p in demselben Sinne laufender Punkt die Kurve in den ersten $\frac{n-2}{2}$ Schnittpunkten von der konkaven nach der konvexen Seite überschreitet.

Wir werden später (§ 8) beweisen, daß die Klasse einer Kurve C_r ihren Maximalwert $r+2$ erreichen kann. Dann ist $r+2$ auch die Ordnung von C_r.

Die Ordnung und die Klasse einer Kurve C_r sind immer gerade Zahlen. Eine Kurve C_r hat nämlich keine Wendetangenten und hat eine gerade Anzahl r der Rückkehrpunkte.

Ist $r=0$, so ist $m=n=2$; ist aber $r=2$, so ist $m=n=4$.

Die Klasse einer Kurve C_2 ist nämlich größer als Zwei, sie kann aber nach dem Satz XI höchstens Vier sein.

5. Konjugierte Punkte und Bogen auf der Kurve C_r. Die Maximalanzahl der Doppelpunkte der Kurve C_r.

Zwei Punkte einer Kurve C_r werden konjugiert genannt, wenn die zugehörigen Tangenten von C_r parallel sind. Aus dieser Definition folgt, daß eine Kurve C_r durch ein konjugiertes Punktpaar in zwei Bogen von der Totalkrümmung π geteilt wird.

Es gilt der Satz

XII. *Die Rückkehrpunkte einer Kurve C_r und ihre konjugierten Punkte teilen die Kurve in eine gerade Anzahl $2z$ der paarweise konjugierten Konvexbogen, so daß die konjugierten Punkte zu den Punkten des eines Konvexbogens auf einem anderen, dem ersten konjugierten Konvexbogen liegen und umgekehrt. Zwei solche konjugierten Konvexbogen von C_r bilden ein konjugiertes Bogenpaar. Für die Zahl $2z$ besteht die Ungleichung $r \leqq 2z \leqq 2r$. Die Grenzfälle in dieser Ungleichung sind erreicht, wenn die konjugierten Punkte der Rückkehrpunkte von C_r alle Rückkehrpunkte sind bzw. alle von Rückkehrpunkten abweichen.*

Dieser Satz ist leicht einzusehen.

Es ist klar, daß mindestens zwei von den vier Endpunkten eines konjugierten Bogenpaares Rückkehrpunkte der Kurve C_r sind.

Auf Grund des Satzes XII läßt sich auch der folgende Satz leicht einsehen:

XIII. *Zwei Bogen unter den $2z$ Konvexbogen, in welche eine Kurve C_r von den Rückkehrpunkten und von ihren Konjugierten geteilt wird, können einander in mehr als einem Punkte nur dann schneiden, wenn sie zueinander konjugiert sind.*

Sind nämlich β_1 und β_2 zwei solche Bogen unter den genannten $2z$ Bogen, die in den Punkten P_1 und P_2 einander treffen, so haben sie je eine zur Geraden P_1P_2 parallele Tangente und damit ein konjugiertes Punktpaar. Daraus folgt, daß β_1 und β_2 zueinander konjugiert sind.

Wir beweisen den folgenden Satz

XIV. *Wird eine Kurve C_r von den r Rückkehrpunkten und von ihren konjugierten Punkten in $2z$ Konvexbogen geteilt, so kann die Kurve C_r höchstens $\frac{r(r-3)}{2} + z$ Doppelpunkte haben.*

Nach dem Satz VIII kann eine Komponente von C_r höchstens einen Doppelpunkt haben. Hat sie aber einen Doppelpunkt, so hat sie parallele Tangenten und somit konjugierte Punkte und auch ein konjugiertes Bogenpaar. Zwei benachbarte Komponenten schneiden nach dem Satz IX einander nur dann, wenn die eine einen Doppelpunkt hat. Diese Komponente hat eine Totalkrümmung $> \pi$ und enthält deshalb die zu den übrigen $r-1$ Komponenten konjugierten Bogen.

Auf Grund der Sätze VIII, IX, X und XIII können zwei Komponenten einer Kurve C_r um Eins mehr Schnittpunkte haben, wenn sie ein konjugiertes Bogenpaar enthalten, als im entgegengesetzten Falle.

Würde man die Doppelpunkte einer Kurve C_r so abzählen, als wenn es auf keiner Komponente und auf keinem Komponentenpaar von C_r konjugierte Punktpaare gäbe, so würde man höchstens $\frac{r(r-3)}{2}$ Doppelpunkte erhalten, weil a) zwei benachbarte bzw. nicht benachbarte Komponenten ohne konjugierte Punkte keinen bzw. höchstens einen Schnittpunkt haben, b) eine Komponente ohne konjugierte Punkte sich nicht schneidet. Die Existenz der z konjugierten Bogenpaare kann die Anzahl der so erhaltenen Doppelpunkte um höchstens z vergrößern.

Damit ist der Satz XIV bewiesen.

Aus dem Satz XIV folgt der Satz

XV. *Hat eine Kurve C_r $2q$ solche Rückkehrpunkte, die paarweise konjugiert sind, so hat sie höchstens $\frac{r(r-1)}{2} - q$ Doppelpunkte.*

Hat nämlich die Kurve C_r $2q$ solche Rückkehrpunkte, die paarweise konjugiert sind, so sind $2z = 2r - 2q$ und $\frac{r(r-3)}{2} + z = \frac{r(r-1)}{2} - q$.

Die Sätze XIV und XV werden durch den folgenden Satz ergänzt:

XVI. Die *Maximalanzahl der Doppelpunkte der Kurven C_r ist $\frac{r(r-1)}{2}$. Es gibt für jede gerade Zahl r Kurven C_r mit $\frac{r(r-1)}{2}$ Doppelpunkten.*

Es genügt, nur den zweiten Teil dieses Satzes zu beweisen, weil der erste Teil aus dem zweiten Teil und aus den Sätzen XIV und XV folgt.

Wir stellen eine Kurve C_r mit $\frac{r(r-1)}{2}$ Doppelpunkten aus einer Buschenveloppe B_{r+1} mit der Maximalanzahl der Doppelpunkte dar.

Rollt ein Kreis vom Halbmesser ϱ auf dem Rande eines festen Kreises vom Halbmesser $\varrho' = \frac{2r+2}{r}\varrho$ und zugleich innerhalb dieses Kreises, so zeichnet ein Punkt des Randes vom rollenden Kreise eine Buschenveloppe B_{r+1} mit $\frac{(r+1)(r-2)}{2}$ Doppelpunkten [8]).

Ist A ein Rückkehrpunkt dieser Hypozykloide B_{r+1} und ist Q bzw. R je ein dem Punkte A genügend nahe liegender Punkt der zwei Komponenten von B_{r+1}, von denen der Rückkehrpunkt A gebildet wird, so schneidet die dem Endpunkt Q (bzw. R) zugehörige Tangente t_Q (bzw. t_R) des Konvexbogens $\overset{\frown}{AQ}$ (bzw. $\overset{\frown}{AR}$) den Konvexbogen $\overset{\frown}{AR}$ (bzw. $\overset{\frown}{AQ}$) in einem Punkt R^* (bzw. Q^*) und enthalten die Strecken QQ^* und RR^* im Innern keinen Punkt der Kurve B_{r+1}. Wir bezeichnen mit Γ bzw. Γ^* den Bogen von B_{r+1}, der aus den Konvexbogen $\overset{\frown}{AQ}$ und $\overset{\frown}{AR}$ bzw. aus $\overset{\frown}{AQ}^*$ und $\overset{\frown}{AR}^*$ besteht, mit W den einfachen Winkelraum von den Schenkeln t_Q und t_R, wo der Bogen Γ^* liegt. W enthält außer Γ^* offenbar keinen anderen Punkt der Kurve B_{r+1}.

Der Winkelraum W wird vom Bogen Γ^* in ein endliches Gebiet W_0 und in ein unendliches W_1 geteilt. Aus einem Punkt P_1 von W_1 geht nur eine Tangente p_1 an B_{r+1}, weil die Punkte von W_1 mit einem unendlichfernen Punkt der Ebene ohne Schnitt der Kurve B_{r+1} verbunden werden können.

Der Berührungspunkt P^* dieser Tangente p_1 der Kurve B_{r+1} liegt auf dem Bogen Γ.

Für den Beweis dieser Behauptung bezeichnen wir mit G_Q bzw. G_R das konvexe Gebiet, das vom Konvexbogen $\overset{\frown}{AQ}$ und von der Strecke AQ bzw. vom Konvexbogen $\overset{\frown}{AR}$ und von der Strecke AR begrenzt wird.

Der Punkt P_1 von W_1 liegt entweder a) im Winkelraum der Halbgeraden QA und QR^* außerhalb von G_Q (und von W_0), oder b) im Winkelraum der Halbgeraden RA und RQ^* außerhalb von G_R (und von W_0), oder c) im Scheitelwinkelraum $\overline{W}$ des von den Halbgeraden AQ und AR begrenzten Winkelraumes, oder d) auf dem Rande von $\overline{W}$.

Im Falle a) hat die Strecke P_1Q mit dem Konvexbogen $\overset{\frown}{AQ}$ außer Q noch einen Punkt Q_1 gemeinsam. Dann kann man aus P_1 an den Konvexbogen $\overset{\frown}{AQ}$ eine Tangente ziehen, deren Berührungspunkt P^* auf dem Konvexbogen $\overset{\frown}{QQ_1}$ liegt.

---

[8]) Buschenveloppe, S. 482.

Ebenso kann man im Falle b) einsehen, daß es durch P_1 eine Tangente gibt, von der der Konvexbogen $\overset{\frown}{AR}$ berührt wird.

Im Falle c) ist die Gerade P_1A entweder Tangente des Rückkehrpunktes A von Γ, oder sie schneidet den Konvexbogen $\overset{\frown}{AQ}$ oder $\overset{\frown}{AR}$. Schneidet die Gerade P_1A den Konvexbogen $\overset{\frown}{AQ}$, so hat dieser Konvexbogen eine Tangente durch P_1, weil P_1 außerhalb des konvexen Gebietes G_Q liegt.

Im Falle d) kann man aus P_1 an den Konvexbogen $\overset{\frown}{AQ}$ bzw. $\overset{\frown}{AR}$ eine Tangente ziehen, je nachdem P_1 auf der Geraden AQ bzw. AR liegt.

Damit ist die Richtigkeit der Behauptung bewiesen.

Aus einem Punkt von W_1 gelangt man zu einem Punkt von W_0, wenn man den Bogen Γ^* von der konkaven Seite nach der konvexen überschreitet. Aus einem Punkt von W_0 gehen also drei Tangenten an die Kurve B_{r+1}. Die drei Berührungspunkte dieser Tangenten liegen auf dem Bogen Γ.

Ist nämlich P_0 ein Punkt von W_0, so schneidet die Strecke QP_0 bzw. RP_0 aus dem Konvexbogen $\overset{\frown}{AQ}$ bzw. $\overset{\frown}{AR}$ einen Konvexbogen $\overset{\frown}{QQ_0}$ bzw. $\overset{\frown}{RR_0}$ aus. Diese Bogen $\overset{\frown}{QQ_0}$ bzw. $\overset{\frown}{RR_0}$ haben offenbar je eine durch den Punkt P_0 hindurchgehende Tangente. Die Strecke AP_0 liegt entweder auf der Tangente des Rückkehrpunktes A, oder schneidet einen der Bogen $\overset{\frown}{AQ_0}$ und $\overset{\frown}{AR_0}$. Daraus folgt, daß man aus dem Punkt P_0 an den Bogen Γ drei Tangenten ziehen kann.

Damit ist bewiesen, daß es keine solche Tangenten der Buschenveloppe B_{r+1} gibt, die durch einen Punkt von W hindurchgeht und die Kurve außerhalb des Bogens Γ berührt.

Unter einer *Schleife* verstehen wir einen Bogen mit einem einzigen Doppelpunkt, der aber keine andere Punkt- oder Tangentensingularität hat und dessen Totalkrümmung kleiner als 2π ist. Wir bezeichnen mit σ eine Schleife, die aus den Konvexbogen $\overset{\frown}{QQ^*}$ und $\overset{\frown}{RR^*}$ des Bogens Γ und aus einer im Winkelraum W liegenden Schleife σ_0 mit den Endpunkten Q^* und R^* besteht.

Ersetzt man nun den Bogen Γ der Buschenveloppe B_{r+1} durch die Schleife σ, so bilden diese Schleife und der aus B_{r+1} übrigbleibende Bogen $\overline{\Gamma}$ eine Kurve K, die r Rückkehrpunkte und $\frac{(r+1)(r-2)}{2}+1=\frac{r(r-1)}{2}$ Doppelpunkte und keine Wendetangente hat.

Diese Kurve K ist eine Kurve C_r, weil sie keine Doppeltangente hat und weil die Schleife σ auch parallele Tangenten besitzt.

Hätte nämlich die Kurve K eine Doppeltangente, so wäre der eine ihrer Berührungspunkte auf der Schleife σ_0, der andere aber entweder auf der Schleife σ_0, oder auf dem Bogen $\overline{\Gamma}$ gelegen Beide Fälle sind unmöglich, weil die Schleife σ_0 keine Doppeltangente hat und weil keine Tangente des Bogens $\overline{\Gamma}$

durch einen Punkt des Winkelraumes W und deshalb durch einen Punkt der Schleife σ_0 hindurchgehen kann.

Damit ist der Satz XVI vollständig bewiesen.

Aus diesem Beweis dieses Satzes folgt die Richtigkeit des folgenden Satzes:

XVII. *Teilt der Rückkehrpunkt A einer Buschenveloppe B_{r+1} seine Tangente in zwei solche Halbgeraden, daß die Punkte der einen Halbgeraden an die Kurve B_{r+1} nur je eine Tangente senden, so kann man zwei hinreichend kleine Konvexbogen von B_{r+1}, von denen der Rückkehrpunkt A gebildet wird, durch eine Schleife so ersetzen, daß damit die Buschenveloppe B_{r+1} in eine Kurve C_r übergeht. Diese Kurve C_r hat um Eins mehr Doppelpunkte, als die Buschenveloppe B_{r+1}.*

6. Die Durchschneidung eines Doppelpunktes einer Kurve C_r.

Ein mit stetiger Tangente versehener Konvexbogen wird nach C. Juel Elementarbogen genannt. Schneiden die hinreichend kleinen Elementarbogen A_1A_2 und A_3A_4 einander in einem einzigen Punkt A, so bilden die Bogenpaare AA_1 und AA_3, AA_1 und AA_4, AA_2 und AA_4, AA_2 und AA_3 vier Ecken mit dem gemeinsamen Winkelpunkt A. Unter diesen Ecken gehört eine und nur eine zum Rande eines konvexen Gebietes. Diese Ecke wird im folgenden eine *konvexe Ecke* genannt. Bilden die Elementarbogen AA_1 und AA_3 die konvexe Ecke, so bilden die Bogen AA_2 und AA_4 eine *konkave Ecke.*

Die *Durchschneidung* des Doppelpunktes A wird auf folgende Weise definiert:

Wir trennen erst die konvexe Ecke in A von der konkaven ab. Dann beseitigen wir den Winkelpunkt der konvexen Ecke durch eine *Abrundung* [9]), wodurch die konvexe Ecke in einen Elementarbogen übergeht. Endlich wenden wir auf die konkave Ecke in A eine *Zuspitzung* an, wodurch die konkave Ecke in einen mit stetigen Tangenten versehenen und einen Rückkehrpunkt enthaltenden Bogen übergeht, welcher dieselben Endpunkte und Endtangenten besitzt, wie die ersetzte konkave Ecke, und welcher den durch Abrundung vorher erhaltenen hinreichend kleinen Elementarbogen nicht schneidet.

Wir beweisen den folgenden Satz:

XVIII. *Jede Kurve C_r ($r > 0$) läßt sich durch die Durchschneidung eines ihrer Doppelpunkte in zwei Kurven zerlegen. Die eine Kurve ist eine Busch-*

[9]) C. Juel, a. a. O., S. 123—125.

enveloppe B_{r_1} von H. Brunn, die andere ist eine Kurve $C^*_{r_2}$ mit r_2 Rückkehrpunkten, wo $r_1 + r_2 = r + 1$. Diese Kurve $C^*_{r_2}$ hat in jeder Richtung genau zwei Tangenten und keine Wendetangente. Hat sie keine Doppeltangente, so ist sie eine Kurve C_{r_2}.

Zunächst bemerken wir, daß jeder Doppelpunkt einer Kurve C_r ein Schnittpunkt von zwei genügend kleinen Elementarbogen der Kurve ist.

Ein Bogen von C_r, welcher den Rückkehrpunkt P_0 mit der Spitzentangente p_0 enthält, kann nämlich in P_0 von einem anderen Bogen von C_r nur dann geschnitten werden, wenn dieser zweite Bogen in P_0 von p_0 berührt wird. Die Gerade p_0 wäre dann aber eine Doppeltangente von C_r. Dies ist aber unmöglich.

Wir können annehmen, daß die genügend kleinen Elementarbogen A_1A_2 und A_3A_4 von C_r im Punkt A einander schneiden. Wir nehmen an, daß die konvexe Ecke in A von den Bogen AA_1 und AA_3 gebildet wird. Wir beweisen zuerst, daß C_r durch die Abtrennung der konvexen Ecke in A von der konkaven in zwei geschlossene Züge, Pseudozüge Z_1 und Z_2 zerfällt.

Lassen wir nun einen Punkt P von A auf dem Bogen AA_1 ausgehend auf C_r fortschreiten, so kehrt P zum ersten Male auf dem Bogen A_3A zur Anfangslage A zurück.

Diese Rückkehr kann nämlich auf dem Bogen AA_2 nicht stattfinden, weil C_r einzügig ist. Sie kann auf dem Bogen AA_4 nicht stattfinden, weil der Drehungssinn der Tangente von C_r im Punkt P während der Bewegung von P unverändert ist, und weil der Drehungssinn der Tangente auf den Bogen AA_1 und A_4A entgegengesetzt ist, wie man leicht einsieht. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Enthält der Pseudozug Z_2 die konvexe Ecke in A und bezeichnet α den Winkel, zwischen den Halbtangenten der Bogen AA_1 und AA_3 in A, so ist Z_2 bzw. Z_1 offenbar von der Totalkrümmung $\pi + \alpha$ bzw. $\pi - \alpha$. Durch die Zuspitzung der konkaven Ecke und durch die Abrundung der konvexen Ecke erhalten wir aus Z_1 bzw. Z_2 eine Kurve B_{r_1} bzw. $C^*_{r_2}$. Die so erhaltenen Kurven haben nämlich die Totalkrümmung π bzw. 2π und sie können keine Wendetangenten haben. Damit ist der Satz XVIII bewiesen. — Es ist nicht unmöglich, daß die so erhaltene Kurve $C^*_{r_2}$ überhaupt keine Doppeltangente haben kann.

7. Über die untere Schranke der Anzahl der Doppelpunkte von C_r.

Auf Grund des Satzes XVIII beweisen wir den folgenden Satz:

XIX. *Bedeutet C^*_r eine im Endlichen liegende ebene Kurve ohne Wendetangenten und mit r Rückkehrpunkten, die in jeder Richtung genau zwei (ver-*

schiedene oder zusammenfallende) Tangenten besitzt, so besteht für die Anzahl d der Doppelpunkte von C_r^* die Ungleichung

$$\frac{r}{2} - 2 \leqq d = \frac{r}{2} - 2 + 2k \leqq \frac{r(r-1)}{2},$$

wo k eine nichtnegative ganze Zahl bedeutet.

Die Klasse einer Kurve C_r^* und damit auch die Anzahl r der Rückkehrpunkte ist eine gerade Zahl, weil die endlichfernen Punkte der Ebene an C_r^* je zwei Tangenten senden. Beschreibt ein Punkt P die Kurve C_r^* in einem Sinne, so dreht sich die Tangente von C_r^* in P während dieser Bewegung von P immer in demselben Sinne. Die Totalkrümmung von C_r^* ist 2π.

Hat die Kurve C_r^* keinen Doppelpunkt, so ist sie vom Maximalklassenindex. Eine solche Kurve C_r^* teilt die Ebene in zwei Gebiete. Je zwei Punkte eines dieser Gebiete senden an C_r^* dieselbe Anzahl der Tangenten, weil man aus einem Punkt eines solchen Gebietes ausgehend jeden Punkt dieses Gebietes erreichen kann, ohne die Kurve oder ihre (nicht existierenden) Wendetangenten überschreiten zu müssen. Die Punkte des Gebietes, die die uneigentlichen Punkte der Ebene enthält, senden an C_r^* je zwei Tangenten, die Punkte des anderen Gebietes entweder keine oder je vier Tangenten.

Eine Kurve C_r^* ohne Doppelpunkte ist also entweder von zweiter oder von vierter Klasse. Eine Kurve zweiter Klasse ist ein Oval und somit eine Kurve C_0. Die Kurve C_r^* vierter Klasse ohne Doppelpunkte hat das Geschlecht $p = 1$, weil das Gebiet, dessen Punkte an die Kurve je zwei Tangenten senden, zweifach zusammenhängend ist[10]). Diese Kurve hat also $r = n - 2 + 2p = 4$ Rückkehrpunkte und $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - p = 2$ Doppeltangenten[11]). Sie kann also mit C_4^* bezeichnet werden.

Die Anzahl d $(= 0)$ der Doppelpunkte dieser Kurve C_0 und C_4^* läßt sich in der Form

$$d = \frac{r}{2} - 2 + 2k$$

schreiben, wo k eine nichtnegative ganze Zahl bedeutet. Für die Kurve C_0 bzw. C_4^* ist nämlich $k = 1$ bzw. $k = 0$.

Jede andere Kurve C_r^* hat mindestens einen Doppelpunkt.

Wir nehmen nun an, daß der Satz XIX für jede Kurve C_r^* gilt, wenn $r \leqq r_0$ ist und wenn r und r_0 gerade Zahlen sind. Wir wollen die Gültigkeit des Satzes XIX auch für die Kurven $C_{r_0+2}^*$ beweisen.

---

[10]) Gy. (J.) v. Sz. Nagy, Über Kurven von Maximal-Klassenindex. Über Kurven von Maximalindex, Math. Annalen **89** (1923), S. 32—75 und **90** (1924,) S. 152—153, insbesondere S. 49—51.

[11]) Gy. (J.) v. Sz. Nagy, Über die charakteristischen Zahlen einer Kurve vom Maximal-Klassenindex, Math. Annalen **100** (1928), S. 164—178.

Wir können annehmen, daß die Kurve $C^*_{r_0+2}$ mindestens einen Doppelpunkt hat. Wir wenden auf einen Doppelpunkt A von $C^*_{r_0+2}$ eine Durchschneidung an. Diese Durchschneidung zerlegt diese Kurve $C^*_{r_0+2}$, ebenso wie eine Kurve C_{r_0+2}, in eine Buschenveloppe B_{r_1} und in eine Kurve $C^*_{r_2}$. Die Durchschneidung des Doppelpunktes läßt sich in einer so kleinen Umgebung von A durchführen, daß jeder Doppelpunkt und jeder Schnittpunkt der Kurven B_{r_1} und $C^*_{r_2}$ ein Doppelpunkt von $C^*_{r_0+2}$ sei, und daß jeder Doppelpunkt von $C^*_{r_0+2}$ — mit Ausnahme von A — ein Doppelpunkt oder ein Schnittpunkt von B_{r_1} und $C^*_{r_2}$ sei.

Bezeichnet d, d_1, d_2 bzw. d_{12} die Anzahl der Doppelpunkte von $C^*_{r_0+2}$, B_{r_1}, $C^*_{r_2}$ bzw. die Anzahl der gemeinsamen Punkte von B_{r_1} und $C^*_{r_2}$, so gelten die Relationen

$$r_1 + r_2 = r_0 + 3 \quad \text{und} \quad d = d_1 + d_2 + d_{12} + 1. \tag{1}$$

Aus der Gleichung $r_1 + r_2 = r_0 + 3$ folgt, daß entweder

$$2 \leqq r_2 < r_0 \quad \text{und} \quad r_1 = r_0 + 3 - r_2 \geqq 3, \tag{2}$$

oder

$$r_2 = 0 \quad \text{und} \quad r_1 = r_0 + 3 \tag{3}$$

sind.

Die Zahl $d_{12} = 2\,k_{12}$ $(\geqq 0)$ ist gerade, weil die paaren Kurven B_{r_1} und $C^*_{r_2}$ eine gerade Anzahl von gemeinsamen Punkten haben. Für die Zahl d_1 besteht die Gleichung [12])

$$d_1 = \frac{r_1 - 3}{2} + 2\,k_1,$$

wo k_1 eine nichtnegative ganze Zahl bedeutet. Für die Zahl r_2 $(\leqq r_0)$ haben wir die Gültigkeit des Satzes XIX, also die Gültigkeit der Relation

$$d_2 = \frac{r_2}{2} - 2 + 2\,k_2 \quad \text{bzw.} \quad d_2 = 0$$

im Falle (2) bzw. (3) angenommen, wo k_2 eine nichtnegative ganze Zahl ist.

Auf Grund der Gleichungen (1) erhalten wir also im Falle (2) bzw. (3) die Gleichung

$$\begin{aligned} d &= \frac{r_1 - 3}{2} + 2\,k_1 + \frac{r_2}{2} - 2 + 2\,k_2 + 2\,k_{12} + 1 \\ &= \frac{r_0 + 2}{2} - 2 + 2\,(k_1 + k_2 + k_{12}) \end{aligned}$$

---

[12]) Buschenveloppe, S. 486. Ich möchte hier bemerken, daß die folgende Fußnote: „[14]) Eine Buschenveloppe B_r $(r > 3)$ hat mindestens einen Doppelpunkt. Eine ebene Kurve mit Rückkehrpunkten erster Art ohne andere Punkt- und Tangentensingularitäten hat nämlich drei Rückkehrpunkte. Siehe Fußnote [12])“ auf der S. 486 meiner Arbeit Buschenveloppe zufälligerweise ausgeblieben ist.

bzw.

$$d = \frac{r_1 - 3}{2} + 2k_1 + 2k_{12} + 1 = \frac{r_0 + 2}{2} + 2(k_1 + k_{12})$$

$$= \frac{r_0 + 2}{2} - 2 + 2(1 + k_1 + k_{12}).$$

Durch vollständige Induktion ist also der Satz XIX bewiesen.

Aus dem Beweis des Satzes XIX folgt auch der Satz

XX. *Schneidet sich eine Komponente einer Kurve C_r, so hat die Kurve mindestens $\frac{r}{2}$ Doppelpunkte.*

Die Durchschneidung des Doppelpunktes der betreffenden Komponente führt nämlich die Kurve C_r in eine Buschenveloppe B_{r+1} und in ein Oval. Auf Grund der zweiten Gleichung von (1) besteht also die Gleichung

$$d = d_1 + d_2 + d_{12} + 1 = \frac{(r+1) - 3}{2} + 2k_1 + 2k_{12} + 1$$

$$= \frac{r}{2} + 2(k_1 + k_{12}),$$

wo k_1 und k_{12} nichtnegative ganze Zahlen sind.

Es scheint sehr wahrscheinlich, daß die untere Schranke der Doppelpunkte der Kurven C_r bzw. C_r^* gleich $\frac{r}{2}$ bzw. $\frac{r}{2} - 2$ ist.

8. Konstruktion von Kurven C_r.

Wir ersetzen einen Konvexbogen γ einer Kurve C_r durch einen stetigen und mit stetigen Tangenten versehenen, aus drei Konvexbogen bestehenden, zwei Rückkehrpunkte und einen Doppelpunkt enthaltenen Bogen Γ so, daß die Endpunkte und die Endtangenten von Γ mit denjenigen von γ zusammenfallen und daß die Totalkrümmungen von γ und Γ übereinstimmen. Der minimale Abstand der parallelen Tangenten der Kurve C_r ist von Null verschieden. Liegt also der Bogen Γ in der genügend kleinen Umgebung von γ, so geht die Kurve C_r durch das Ersetzen von γ durch Γ in eine Kurve C_{r+2}. So eine Transformation wird im folgenden eine *X-Transformation* der Kurve C_r genannt.

Ersetzt man einen Konvexbogen γ_1 (von einer Totalkrümmung $< \pi$) eines Ovals C_0 durch einen außerhalb des Ovals liegenden Bogen Γ_1, so erhält man eine Kurve C_2^* mit einem Doppelpunkt, mit dem Doppelpunkt von Γ_1. Diese Transformation ist eine X-Transformation, weil die Kurve C_2^* keine Doppeltangente hat.

Ist nämlich t_1 bzw. t_0 eine Tangente von Γ_1 bzw. die zu t_1 parallele Tangente von γ_1, so liegt t_1 an der anderen Seite von t_0, wie das Oval C_0 und wie

die andere zu t_1 parallele (gemeinsame) Tangente von C_0 und C_2^*. Der Abstand der parallelen Tangenten von derselben Richtung ist also für die Kurve C_2^* mindestens so groß, wie für C_0. Die Kurve C_2^* ist also eine Kurve C_2, weil sie keine Doppeltangente hat.

Ersetzt man einen genügend kleinen gemeinsamen Konvexbogen γ_2 der Kurven C_2 und C_0 durch einen außerhalb von C_0 liegenden Bogen Γ_2, von dem der übrigbleibende Teil von C_2 nicht geschnitten wird, so führt diese X-Transformation die Kurve C_2 in eine Kurve C_4 mit zwei Doppelpunkten. Durch $k = \frac{r}{2}$ entsprechende X-Transformationen läßt sich also das Oval C_0 in eine Kurve C_r mit $k = \frac{r}{2}$ Doppelpunkten überführen. Diese Kurve enthält die angewandten k Bogen Γ_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$, die alle außerhalb von C_0 liegen, und die nicht ersetzten Konvexbogen von C_0.

Die einfach zusammenhängenden Gebiete G_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$, die von den geschlossenen Teilen der k Bogen Γ_i begrenzt sind, liegen alle außerhalb voneinander und im Äußeren von C_0. Die Ebene wird von der Kurve C_r in $k + 2$ Gebiete geteilt, und zwar in die k Gebiete G_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$, in ein unendliches Gebiet G_∞ und in ein endliches Gebiet G_0, das die Punkte von C_0 im Innern oder am Rande hat. Aus einem Punkte von G_0, G_∞ bzw. G_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ gehen 0, 2 bzw. 4 Tangenten an die Kurve C_r. Die Klasse von C_r ist also 4.

Es gelten also die Sätze:

XXI. *Für jede gerade Zahl $r \geqq 0$ gibt es Kurven C_r mit $\frac{r}{2}$ Doppelpunkten.*

XXII. *Für jede gerade Zahl $r \geqq 2$ gibt es Kurven C_r von vierter Klasse.*

Man kann das Oval C_0 durch $k = \frac{r}{2}$ X-Transformationen in eine Kurve C_r von $(r + 2)$-ter Klasse und von $(r + 2)$-ter Ordnung überführen.

Die erste X-Transformation ersetzt den Konvexbogen γ_1 von C_0 durch einen außerhalb von C_0 liegenden Bogen Γ_1 mit einem Doppelpunkt, wie vorher. Die zweite X-Transformation ersetzt einen Konvexbogen γ_2' von Γ_1, der am Rande des von Γ_1 begrenzten Gebietes G_1 liegt, durch einen im Gebiet G_1 liegenden Bogen Γ_2'. Ist G_2' das von Γ_2' begrenzte endliche Gebiet, so ersetzt die dritte X-Transformation einen Konvexbogen des Randes G_2' durch einen in G_2' liegenden Bogen Γ_2'. Durch die Fortsetzung dieses Verfahrens gelangt man zu einer Kurve C_r von den gewünschten Eigenschaften.

Dies sieht man auf folgende Weise ein:

Aus einem unendlichfernen Punkte der Ebene (der zwei Tangenten an die so konstruierte Kurve C_r sendet) kann man in das Gebiet G_1, von dort in G_2', von G_2' in G_3' usw. so gelangen, daß man einen konvexen Randbogen von der konkaven Seite nach der konvexen überschreitet. Aus einem Punkte

des innersten Gebietes $G'_{\frac{r}{2}}$ gehen also $2 + \frac{r}{2} \cdot 2 = r + 2$ Tangenten an die so konstruierte Kurve C_r. Nach Satz XI ist also auch die Ordnung dieser Kurve C_r $r + 2$ gleich.

Es gilt also der Satz:

XXIII. *Es gibt für jede gerade Zahl r Kurven C_r von $(r + 2)$-ter Klasse und von $(r + 2)$-ter Ordnung.*

Man kann leicht einsehen, daß die aus einer Hypozykloide B_{r+1} im § 5 konstruierte Kurve C_r von $(r + 2)$-ter Ordnung ist. Ihre Klasse ist 6 bzw. 4, je nachdem $r \geqq 4$ bzw. $r = 2$ ist.

9. Über die Randbogen der Buschenveloppen und der Kurven C_r.

Eine Kurve B_r oder C_r wird von ihren Rückkehrpunkten und Doppelpunkten in eine gewisse Anzahl der Konvexbogen geteilt. Unter diesen Konvexbogen wird ein Bogen ein *Randbogen* der Kurve genannt, wenn man aus den unendlichfernen Punkten der Ebene ihn erreichen kann, ohne die Kurve überschreiten zu müssen. Ein Randbogen ist *konvex* bzw. *konkav*, je nachdem man aus den unendlichfernen Punkten der Ebene seine konvexe bzw. konkave Seite erreichen kann.

XXIV. *Die Randbogen der Buschenveloppen sind konkav.*

Im entgegengesetzten Falle könnte man aus einem unendlichfernen Punkt der Ebene an eine Buschenveloppe mehr als eine Tangente ziehen.

Für die Kurven C_r gilt der Satz

XXV. *Auf den Tangenten einer Kurve C_r liegen die äußeren Schnittpunkte mit der Kurve auf konkaven Randbogen von C_r.*

Für den Beweis dieses Satzes bezeichnen wir mit p_0 die Tangente von C_r im Punkt P_0, mit P_1 und P_2 die auf p_0 äußeren Schnittpunkte von p_0 mit C_r. Die unendliche Strecke $P_1 P_2$ hat also im Innern mit C_r höchstens den Punkt P_0 gemeinsam.

Die Punkte P_1 und P_2 teilen die Kurve C_r in die Bogen C' und C''. Wir nehmen an, daß die zu p_0 parallele Tangente $\bar{p}_0$ von C_r den Bogen C'' berührt. Wir bezeichnen mit P einen Punkt von C', mit p die Tangente von C' in P, mit Q den Schnittpunkt von p_0 und p. Für keinen Punkt P von C' kann der zugehörige Punkt Q mit dem unendlichfernen Punkt U von p_0 zusammenfallen, weil C' von $\bar{p}_0$ nicht berührt wird. Der Punkt P_0 liegt entweder auf C', oder auf C''. Liegt P_0 auf C' und fällt P in P_0, so fällt auch Q in P_0.

Beschreibt der Punkt P von P_1 ausgehend den Bogen C', so verändert sich der Bewegungssinn von Q auf p_0 nur dann, wenn P die Gerade p_0 überschreitet, weil C' keine Wendetangente hat.

Daraus folgt, daß Q immer auf der endlichen Strecke P_1P_2 liegt. Wäre nämlich ein Punkt Q im Innern der unendlichen Strecke P_1P_2 gelegen, so könnte er seinen Bewegungssinn während der einsinnigen Bewegung von P (auf C') nicht verändern. Dies ist aber unmöglich, weil Q mit U nicht zusammenfallen kann und weil Q von P_1 ausgehend in P_2 gelangt, während P den Bogen C' beschreibt.

Die Tangenten von C' in den zu P_1 und P_2 benachbarten Punkten von C' schneiden nur dann die endliche Strecke P_1P_2, wenn man von den Punkten dieser Strecke aus in P_1 und P_2 die konvexe Seite von C_r erreichen kann.

Damit ist der Satz XXV bewiesen.

Aus diesem Satz folgt der Satz

XXVI. *Außer den Ovalen gibt es keine C_r mit lauter konvexen Randbogen.*

Nach Satz XXV kann nämlich eine Kurve C_r mit lauter konvexen Randbogen von keiner Tangente geschnitten werden. Sie hat also $r = 0$ Rückkehrpunkte.

Zur Ergänzung des Satzes XXVI sprechen wir den folgenden Satz aus:

XXVII. *Es gibt Kurven C_r mit lauter konkaven Randbogen. Es gibt Kurven C_r, deren Randbogen teils konvex, teils konkav sind.*

Die Figur 1 bzw. 2 stellt eine Kurve C_6 bzw. C_2 dar, für welche der Satz XXVII gilt.

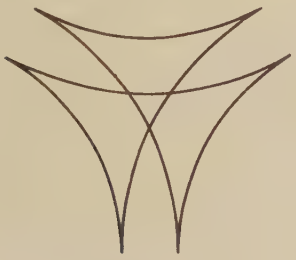


Fig. 1.

Fig. 2.

Der *Klassenindex* einer ebenen Kurve bedeutet die niedrigste Anzahl der (einfachen) Tangenten, die aus einem Punkt der Ebene an die Kurve gehen. Der Klassenindex einer Kurve C_r ist höchstens zwei, weil die unendlichfernen Punkte der Ebene zwei Tangenten an C_r senden. Der Klassenindex der vorigen Kurve C_6 bzw. C_2 ist 2 bzw. 0. Hat eine Kurve C_r einen konvexen Randbogen und schreitet ein Punkt P diesen Randbogen von der konvexen Seite nach der konkaven über, so vermindert sich die Anzahl der aus P an C_r gehenden Tangenten um Zwei.

Es gilt also der Satz

XXVIII. *Die Kurven C_r sind entweder vom Klassenindex Null oder vom Klassenindex Zwei. Hat eine Kurve C_r mindestens einen konvexen Randbogen, so ist sie vom Klassenindex Null. Es gibt aber Kurven C_r vom Klassenindex Null, die keinen konvexen Randbogen haben.*

Die Figur 3 stellt eine Kurve C_8 vom Klassenindex Null dar, ohne konvexe Randbogen.

Fig. 3.

Die Kurve C_6 (Fig. 1) ist von sechster Ordnung und von vierter Klasse. Die Kurve C_2 (Fig. 2) ist von vierter Ordnung und von vierter Klasse. Die Kurve C_8 (Fig. 3) ist von zehnter Ordnung und von sechster Klasse[13]).

[13]) Für die Buschenveloppen möchte ich die folgende von Herrn P. Scherk mir brieflich mitgeteilte Bemerkung anführen: Die Buschenveloppen gehen durch eine Dualität in ebene Kurven über, die in bezug auf ein Strahlenbüschel die Ordnung Eins haben. Diese Kurven können nach Auszeichnung einer passenden uneigentlichen Geraden in einem geeigneten cartesischen Koordinatensystem in der Form $y = f(x)$ dargestellt werden, wo $f(x)$ eine eindeutige und einmal stetig differenzierbare Funktion auf der reellen Achse ist. Entsprechend lassen sich die Dualen der Kurven C_r in einem geeigneten cartesischen Koordinatensystem in der Form

$$y^2 + 2 f_1(x) \cdot y + f_2(x) = 0$$

darstellen, wo $f_1(x)$ und $f_2(x)$ eindeutige und einmal stetig differenzierbare Funktionen sind und wo die Funktion $f_1^2(x) - f_2(x)$ nur zwei reelle Nullstellen hat und diese Nullstellen einfach sind. Die Dualen der Kurven C_r müssen den Klassenindex Null haben.

(Eingegangen am 15. Februar 1940.)

Über den Zusammenhang einiger Reihensätze.

Von

Gerhard Lyra in Göttingen.

1. Der zuerst von K. Knopp 1917 bewiesene Grenzwertsatz[1])

Es ist $C_1\text{-}\sum_0^\infty \alpha_n = s$ *dann und nur dann, wenn*

$$\sigma_n + (n+1)\left[\frac{\alpha_{n+1}}{n+2} + \frac{\alpha_{n+2}}{n+3} + \ldots\right] \to s$$

strebt (wo $\sigma_n = \alpha_0 + \ldots + \alpha_n$ gesetzt ist), geht in einen Hardy-Littlewoodschen Satz über, wenn er als eine Aussage über die als gegeben betrachtete Zahlenfolge $a_n = \frac{\alpha_n}{n+1} + \frac{\alpha_{n+1}}{n+2} + \ldots$ aufgefaßt wird. Da nämlich die Identitäten

$$\alpha_0 + \ldots + \alpha_n = \sum_0^n (\nu+1)(a_\nu - a_{\nu+1})$$

$$\sigma_n + (n+1)\left[\frac{\alpha_{n+1}}{n+2} + \frac{\alpha_{n+2}}{n+3} + \ldots\right] = \sum_0^n a_\nu$$

bestehen und die Aussage $\sum_0^\infty (n+1)\,\Delta a_n = s$ ungeändert bleibt, wenn a_n durch $a_n - A$ ersetzt wird, so hat der Knoppsche Satz in den a_n die folgende Form:

Es ist $C_1\text{-}\sum_0^\infty (n+1)\,\Delta a_n = s$ *dann und nur dann, wenn eine Konstante* A *existiert, so daß* $\sum_0^\infty (a_n - A) = s$ *ist.*

Diesen Satz enthält aber für $p = 0$ der folgende für alle ganzzahligen $p \geqq -1$ gültige

Satz von Hardy-Littlewood[2]). *Es ist* $C_{p+1}\text{-}\sum_0^\infty (n+1)\,\Delta a_n = s$ *dann und nur dann, wenn eine Konstante* A *existiert, so daß*

$$C_p\text{-}\sum_0^\infty (a_n - A) = s$$

ist.

---

[1]) K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 3. Aufl., Berlin 1931, S. 504, daselbst auch Literaturangaben. Hier und in den folgenden Ausführungen soll „$C_p\text{-}\sum_0^\infty a_n = s$" besagen, daß die Reihe $\sum_0^\infty a_n$ C_p-summierbar zur Summe s ist, d. h. $\lim_{n=\infty} s_n^{(p)} \Big/ \binom{n+p}{p} = s$ mit $s_n^{(-1)} = a_n$, $s_n^{(0)} = s_n$ und $s_n^{(\lambda)} = s_0^{(\lambda-1)} + \ldots + s_n^{(\lambda-1)}$ für $\lambda \geqq 0$.

[2]) Math. Zeitschr. **19** (1924), S. 72, Lemma 2 und Lemma 3.

Setzt man $a_0 + \ldots + a_n = s_n$, so kann dieser Satz wegen der einfachen Umformungen

$$\sum_0^n (\nu + 1)\, \Delta a_\nu = s_n - (n+1)\, a_{n+1},$$

$$\sum_0^n (a_\nu - A) \qquad = s_n - (n+1)\, A$$

auch so formuliert werden:

Es ist $C_{p+1}\text{-}\lim (s_n - (n+1)\, a_{n+1}) = s$ *dann und nur dann, wenn eine Konstante* A *vorhanden ist, so daß* $C_p\text{-}\lim (s_n - (n+1)\, A) = s$ *ist.*

Dabei ist unter C_{-1}-Summierbarkeit einer Reihe, wie üblich, zu verstehen, daß diese Reihe konvergiert und deren Glieder $= o\left(\frac{1}{n}\right)$ sind. Beschränkt man sich auf solche Folgen a_n, für die $V\text{-}\lim a_n = 0$ ist, wo V irgendein permanentes und mit dem C-Verfahren verträgliches[3]) Limitierungsverfahren bezeichnet, und berücksichtigt, daß aus $C_p\text{-}\lim (s_n - (n+1) A) = s$, d. h. $C_p\text{-}\sum_0^\infty (a_n - A) = s$, insbesondere $C_p\text{-}\lim a_n = A$ folgt, so geht der Hardy-Littlewoodsche Satz in den spezielleren Satz über:

Eine Reihe $\sum_0^\infty a_n$, *für deren Glieder* $V\text{-}\lim a_n = 0$ *gilt, ist dann und nur dann* C_p*-summierbar zur Summe* s, *wenn*

$$C_{p+1}\text{-}\lim (s_n - (n+1)\, a_{n+1}) = s$$

ist.

Da hier insbesondere die Aussagen „Aus $\sum_0^\infty a_n = s$ und $n a_n \to 0$ folgt $s_n - (n+1)\, a_{n+1} \to s$“ und „Aus $C_1\text{-}\lim (s_n - (n+1)\, a_{n+1}) = s$ und $V\text{-}\lim a_n = 0$ folgt $\sum_0^\infty a_n = s$“ enthalten sind[4]), so bedeutet dieser Satz eine Verallgemeinerung und Verschärfung beider Hälften des Ostrowskischen Satzes[5]), wonach eine Reihe $\sum_0^\infty a_n$ mit monoton nach Null abnehmenden Gliedern a_n dann und nur dann zur Summe s konvergiert, wenn

$$s_n - (n+1)\, a_{n+1} \to s$$

strebt.

---

[3]) Ein V-Verfahren heißt mit dem C-Verfahren verträglich, wenn $V\text{-}\lim a_n = C\text{-}\lim a_n$ ist für jede Folge a_n, für die beide Limites existieren.

[4]) Diese letztere Aussage hat kürzlich W. Meyer-König in seiner Arbeit „Über einige Sätze aus der Reihenlehre“ [Math. Zeitschr. **45** (1939), S. 751—755] bemerkt, jedoch nur unter der stärkeren Voraussetzung $\lim (s_n - (n+1)\, a_{n+1}) = s$ statt $C_1\text{-}\lim (s_n - (n+1)\, a_{n+1}) = s$.

[5]) A. Ostrowski, Mathematische Miszellen III, Jahresber. d. Deutschen Math.-Vereinigung **34** (1926), S. 161—171.

2. Der eingangs genannte Knoppsche Grenzwertsatz, auf dessen Zusammenhang mit dem Hardy-Littlewoodschen Satz für $p = 0$ hingewiesen wurde, ist nach verschiedenen Richtungen hin weitgehend verallgemeinert worden[6]). Nun liegt auch eine Verallgemeinerung des Hardy-Littlewoodschen Satzes insofern nahe, als die in ihm auftretende Reihe $\sum_0^\infty (n+1)\,\Delta a_n$ als eine gewisse — sogleich noch zu erklärende — Umordnung der Reihe $\sum_0^\infty a_n$ aufgefaßt werden kann; man erhält nämlich durch eine von Th. Kaluza angegebene Iteration dieser Umordnung die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+r}{r} \Delta^r a_n$, über welche ein Satz gilt, der eine Verallgemeinerung des Hardy-Littlewoodschen Satzes darstellt. Diese Verallgemeinerung steht aber, wie gezeigt werden soll, mit einer vom Verfasser gegebenen Verallgemeinerung des Knoppschen Grenzwertsatzes in demselben Zusammenhang, der auch zwischen dem Hardy-Littlewoodschen Satz für $p = 0$ und dem speziellen Grenzwertsatze von Knopp besteht.

Stellt man die Glieder der zunächst als konvergent vorausgesetzten Reihe $\sum_0^\infty a_n$ nach dem Schema

$$\begin{aligned} a_0 &= \Delta a_0 + \Delta a_1 + \Delta a_2 + \dots \\ a_1 &= \qquad \Delta a_1 + \Delta a_2 + \dots \\ a_2 &= \qquad\qquad \Delta a_2 + \dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

durch die ersten Differenzen der a_n dar und summiert — anstatt über die Zeilensummen a_n — über die Spaltensummen $(n+1)\,\Delta a_n$. so erhält man die Reihe $\sum_0^\infty (n+1)\,\Delta a_n$, welche sicher dann konvergent und $= \sum_0^\infty a_n$ ist, wenn die a_n monoton sind. Stellt man entsprechend die Glieder der so erhaltenen Reihe $\sum_0^\infty (n+1)\,\Delta a_n$ nach dem Schema

$$\begin{aligned} 1\,\Delta a_0 &= 1\,\Delta^2 a_0 + 1\,\Delta^2 a_1 + 1\,\Delta^2 a_2 + \dots \\ 2\,\Delta a_1 &= \qquad 2\,\Delta^2 a_1 + 2\,\Delta^2 a_2 + \dots \\ 3\,\Delta a_2 &= \qquad\qquad 3\,\Delta^2 a_2 + \dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

---

[6]) G. H. Hardy und J. E. Littlewood, Solution of the Cesàro summability problem for power-series and Fourier series, Math. Zeitschr. 19 (1924), S. 67–96, Theorem A; K. Knopp, Zur Theorie der C- und H-Summierbarkeit, ebenda 19 (1924), S. 97–113, Satz 4; G. Lyra, Über einen Satz zur Theorie der C-summierbaren Reihen, ebenda 45 (1939), S. 559–572, Satz I.

durch die zweiten Differenzen der a_n dar und vertauscht wieder die Reihenfolge von Zeilen- und Spaltensummation, so bekommt man die Reihentransformation $\sum_0^\infty a_n = \sum_0^\infty \binom{n+2}{2} \Delta^2 a_n$, welche wieder dem großen Umordnungssatze zufolge z. B. dann erlaubt ist, wenn die a_n eine zweifach monotone Folge bilden. Nach r-facher Iteration dieser Umordnung der konvergenten Reihe $\sum_0^\infty a_n = s$ erhält man die Reihe $\sum_{n=0}^\infty \binom{n+r}{r} \Delta^r a_n$, welche sicher dann zur selben Summe s konvergiert, wenn $\Delta^r a_n \geqq 0$ ist. Diese Reihentransformation gilt aber schon unter wesentlich geringeren Voraussetzungen über die a_n. Notwendige und hinreichende Bedingungen, unter welchen die Reihe $\sum_{n=0}^\infty \binom{n+r}{r} \Delta^r a_n$ als Transformierte der konvergenten Reihe $\sum_0^\infty a_n$ zur selben Summe konvergiert, werden im Abschnitt 3 mitgeteilt. Über diese transformierte Reihe gilt nun als eine Verallgemeinerung des Hardy-Littlewoodschen Satzes der folgende

Satz 1. *Es ist* C_{p+r}-$\sum_{n=0}^\infty \binom{n+r}{r} \Delta^r a_n = s$ *dann und nur dann, wenn* r *Konstanten* $A_1, A_2, \ldots, A_r$ *vorhanden sind, so daß*

$$C_p\text{-}\sum_{n=0}^\infty [a_n - (A_1 n^{r-1} + A_2 n^{r-2} + \ldots + A_r)] = s$$

ist.

Hierbei sind $r \geqq 1$ und $p \geqq -1$ angenommen. Macht man, wie oben in 1., über die a_n die spezielle Voraussetzung $V\text{-}\lim a_n = 0$, dann erhält man[7]) als Verallgemeinerung der aus dem Hardy-Littlewoodschen Satze gezogenen Folgerung den

Satz 1a. *Eine Reihe* $\sum_0^\infty a_n$, *für deren Glieder* $V\text{-}\lim a_n = 0$ *gilt, ist dann und nur dann* C_p*-summierbar zur Summe* s, *wenn* $\sum_{i=0}^\infty \binom{n+r}{r} \Delta^r a_n$ C_{p+r}*-summierbar zur selben Summe ist.*

Satz 1 ergibt sich aber fast unmittelbar aus dem folgenden[8]) für $0 \leqq r \leqq p+1$ gültigen

---

[7]) Wegen der Verträglichkeitsbedingung folgt aus $V\text{-}\lim a_n = 0$ und $C_p(a_n - (A_1 n^{r-1} + \ldots + A_r)) \to 0$, daß $C_p(A_1 n^{r-1} + A_2 n^{r-2} + \ldots + A_r) \to 0$ und hieraus $A_1 = A_2 = \ldots = A_r = 0$, da $C_p(n^k) \simeq n^k \Big/ \binom{k+p}{p}$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$

[8]) G. Lyra, a. a. O., S. 560.

Satz 2. *Es ist* $C_p\text{-}\sum_0^\infty a_n = s$ *dann und nur dann, wenn für* $\lambda = 0, 1, \ldots, r$ *die Zahlenfolgen* $\varrho_n^{(\lambda)}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *existieren, welche durch* $\varrho_n^{(\lambda)} = a_n \Big/ \binom{n+r}{r}$ *für* $\lambda = 0$ *und* $\varrho_n^{(\lambda)} = C_{p-r}\text{-}\sum_{\nu=n}^\infty \varrho_\nu^{(\lambda-1)}$ *für* $1 \leqq \lambda \leqq r$ *definiert sind, und wenn*

$$C_{p-r}\text{-}\sum_{n=0}^\infty \varrho_n^{(r)} = s$$

ist.

Ersetzt man nämlich p durch $p + r$ und setzt $a_n = \binom{n+r}{r} \Delta^r a_n$, dann besteht wegen

$$\Delta^r a_n = a_n \Big/ \binom{n+r}{r} = \varrho_n^{(0)} = \Delta \varrho_n^{(1)} = \Delta^2 \varrho_n^{(2)} = \cdots = \Delta^r \varrho_n^{(r)}$$

für $a_n - \varrho_n^{(r)}$ die Differenzengleichung

$$\Delta^r (a_n - \varrho_n^{(r)}) = 0,$$

deren sämtliche Lösungen durch die Gesamtheit aller Polynome höchstens $(r-1)$-ten Grades in n gegeben sind. Also ist

$$\varrho_n^{(r)} = a_n - (A_1 n^{r-1} + A_2 n^{r-2} + \ldots + A_r),$$

womit Satz 1 schon bewiesen ist.

Ist $C_{p+r}\text{-}\sum_{n=0}^\infty \binom{n+r}{r} \Delta^r a_n = s$, dann sind die Koeffizienten des Polynoms eindeutig bestimmt, da bei vorgegebenen a_n die $\alpha_n = \binom{n+r}{r} \Delta^r a_n$ und damit auch die $\varrho_n^{(r)}$ eindeutig festgelegt sind. Die Koeffizienten A_λ können auch leicht mittels einer Rekursionsformel durch die a_n ausgedrückt werden. Denn es ist für $1 \leqq \lambda \leqq r$

$$\varrho_n^{(\lambda)} = \Delta^{r-\lambda} \varrho_n^{(r)} = \Delta^{r-\lambda}[a_n - (A_1 n^{r-1} + A_2 n^{r-2} + \ldots + A_r)]$$
$$= \Delta^{r-\lambda}[a_n - (A_1 n^{r-1} + A_2 n^{r-2} + \ldots + A_{\lambda-1} n^{r-\lambda+1})] - (-1)^{r-\lambda}(r-\lambda)! A_\lambda.$$

Andererseits ist

$$\varrho_n^{(\lambda)} = C_p\text{-}\sum_{\nu=n}^\infty \varrho_\nu^{(\lambda-1)} = C_p\text{-}\sum_{\nu=n}^\infty \Delta^{r-\lambda+1}[a_\nu - (A_1 \nu^{r-1} + A_2 \nu^{r-2} + \ldots + A_{\lambda-1} \nu^{r-\lambda+1})]$$
$$= C_p\text{-}\lim_{m=\infty} \sum_{\nu=n}^{m-1} \Delta^{r-\lambda+1}[a_\nu - (A_1 \nu^{r-1} + A_2 \nu^{r-2} + \ldots + A_{\lambda-1} \nu^{r-\lambda+1})]$$
$$= \Delta^{r-\lambda}[a_n - (A_1 n^{r-1} + \ldots + A_{\lambda-1} n^{r-\lambda+1})]$$
$$- C_p\text{-}\lim_{m=\infty} \Delta^{r-\lambda}[a_m - (A_1 m^{r-1} + \ldots + A_{\lambda-1} m^{r-\lambda+1})].$$

Daher ist

$$A_\lambda = \frac{(-1)^{r-\lambda}}{(r-\lambda)!} C_p\text{-}\lim_{m=\infty} \Delta^{r-\lambda}\left[a_m - (A_1 m^{r-1} + \ldots + A_{\lambda-1} m^{r-\lambda+1})\right]$$

und insbesondere

$$A_1 = \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!} C_p\text{-}\lim_{m=\infty} \Delta^{r-1} a_m.$$

Wie aus dem Beweis hervorgeht, kann Satz 1 als eine andere Formulierung des Satzes 2 aufgefaßt werden, wenn man in diesem — anstatt die α_n vorzugeben — die Folge $\varrho_n^{(r)}$ als gegeben betrachtet. Denn dann ist $\alpha_n = \binom{n+r}{r} \Delta^r \varrho_n^{(r)}$, und es folgt aus $C_{p-r}\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} \varrho_n^{(r)} = s$, daß $C_p\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+r}{r} \Delta^r \varrho_n^{(r)} = s$ ist. Da aber die Aussage $C_p\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+r}{r} \Delta^r \varrho_n^{(r)} = s$ ungeändert bleibt, wenn $\varrho_n^{(r)}$ durch $\varrho_n^{(r)} + P_{r-1}(n)$ ersetzt wird (wo $P_{r-1}(n)$ ein willkürliches Polynom höchstens $(r-1)$-ten Grades in n ist), so folgt $C_p\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+r}{r} \Delta^r \varrho_n^{(r)} = s$ auch aus $C_{p-r}\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} [\varrho_n^{(r)} + P_{r-1}(n)] = s$ für beliebiges $P_{r-1}(n)$. Dagegen folgt $C_{p-r}\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} \left[\varrho_n^{(r)} + P_{r-1}(n)\right] = s$ aus $C_p\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+r}{r} \Delta^r \varrho_n^{(r)} = s$ offenbar nur für ein bestimmtes Polynom $P_{r-1}(n)$.

Satz 1 kann auch aus dem folgenden Satz erschlossen werden, worin $\lambda \geqq 0$ und $p \geqq -1$ ist:

Satz 3. *Es ist* $C_{p+1}\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\lambda+1}{\lambda+1} \Delta a_n = s$ *dann und nur dann, wenn eine Konstante* A *existiert, so daß* $C_p\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\lambda}{\lambda} (a_n - A) = s$ *ist.*

Denn ist für ein gewisses Polynom $P_{r-1}(n)$ (höchstens $(r-1)$-ten Grades in n) $C_p\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} [a_n - P_{r-1}(n)] = s$, dann folgt aus diesem Satz 3 für $\lambda = 0$, daß $C_{p+1}\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{1} \Delta [a_n - P_{r-1}(n)] = s$ ist. Nach nochmaliger Anwendung desselben Schlusses folgt $C_{p+2}\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} \Delta^2 [a_n - P_{r-1}(n)] = s$ usw., schließlich $C_{p+r}\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+r}{r} \Delta^r [a_n - P_{r-1}(n)] = s$ oder

$$C_{p+r}\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+r}{r} \Delta^r a_n = s,$$

da $\Delta^r P_{r-1}(n) \equiv 0$ ist. Ist aber $C_{p+r} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+r}{r} \Delta^r a_n = s$, dann gibt es (nach Satz 3 für $\lambda = r-1$) eine Konstante A_1, so daß

$$C_{p+r-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r-1} [\Delta^{r-1} a_n - (-1)^{r-1}(r-1)! A_1]$$

$$\equiv C_{p+r-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r-1} \Delta^{r-1}(a_n - A_1 n^{r-1}) = s$$

ist.

Nach r-maliger Wiederholung desselben Schlusses folgt die Existenz eines Polynoms $P_{r-1}(n)$, so daß

$$C_p \cdot \sum_{n=0}^{\infty} [a_n - P_{r-1}(n)] = s$$

ist.

Der Satz 3 seinerseits kann wieder nur als eine andere Formulierung des folgenden [9]) für $p \geqq -1$ gültigen Satzes aufgefaßt werden.

Satz 4. *Es ist* $C_p \cdot \sum_{0}^{\infty} \alpha_n = s$ *dann und nur dann, wenn*

$$C_{p-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[\binom{n+\lambda}{\lambda} \cdot C_{p-\lambda} \cdot \sum_{\nu=n}^{\infty} \alpha_\nu \Big/ \binom{\nu+\lambda+1}{\lambda+1} \right] = s$$

ist.

Man hat nur $\alpha_n = \binom{n+\lambda+1}{\lambda+1} \Delta a_n$ zu setzen; dann folgt

$$\Delta \left[a_n - C_{p-\lambda} \sum_{\nu=n}^{\infty} \alpha_\nu \Big/ \binom{\nu+\lambda+1}{\lambda+1} \right] = 0,$$

also $C_{p-\lambda} \cdot \sum_{\nu=n}^{\infty} \alpha_\nu \Big/ \binom{\nu+\lambda+1}{\lambda+1} = a_n - A$, wo A eine Konstante ist. Ersetzt man noch p durch $p+1$, dann hat man Satz 3.

3. Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß Satz 1 und entsprechend auch die anderen Sätze auf den Fall negativ-ganzzahliger p erweitert werden können. An Stelle von Satz 1 tritt z. B. für $p = -r$ der

Satz 5. *Es ist* $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+r}{r} \Delta\ a_n = s$ *dann und nur dann konvergent, wenn ein Polynom* $P_{r-1}(n)$ *(höchstens* $(r-1)$*-ten Grades in* n*) existiert, so daß*

$$\sum_{n=0}^{\infty} [a_n - P_{r-1}(n)] = s$$

konvergiert und $n^r \Delta^{r-1} [a_n - P_{r-1}(n)] \to 0$ *strebt.*

---

[9]) G. Lyra, a. a. O., S. 561, Satz II

Dieser Satz enthält eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die auf S. 630 angegebene Reihentransformation erlaubt ist; denn ist $\sum_0^\infty a_n = s$ konvergent, dann ist wegen $\lim a_n = 0$ für die Konvergenz der transformierten Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+r}{r} \Delta^r a_n$ zur selben Summe s notwendig und hinreichend, daß $n^r \Delta^{r-1} a_n \to 0$ strebt. Ein Vergleich der Sätze 1 und 5 legt es nahe, unter C_{-r}-Summierbarkeit einer Reihe zu verstehen, daß diese Reihe konvergiert und die $(r-1)$-ten Differenzen ihrer Glieder $= o(n^{-r})$ sind. Indessen soll der Nachweis für die Widerspruchsfreiheit dieser Definition erst demnächst in anderem Zusammenhang mitgeteilt werden, wo auch der Beweis für Satz 5 gegeben wird.

Zusatz bei der Korrektur (1. Juni 1940).

Beschränkt man sich, wie in Satz 1a, auf solche Reihenglieder a_n, für welche $V\text{-}\lim a_n = 0$ ist, so erhält Satz 5 die folgende spezielle Form:

Ist $V\text{-}\lim a_n = 0$, *so konvergiert* $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+r}{r} \Delta^r a_n = s$ *dann und nur dann, wenn* $\sum_0^\infty a_n = s$ *konvergiert und* $n^r \Delta^{r-1} a_n \to 0$ *strebt.*

Diesen Satz hat A. F. Andersen zwar für beliebige reelle $r \geqq 0$ bewiesen, jedoch nur unter der stärkeren Einschränkung $\lim a_n = 0$ statt $V\text{-}\lim a_n = 0$; vgl. A. F. Andersen, Sur des suites régulières, Berichte über Den sjette skandinaviske Matematikerkongres i København (1925), S. 460. Ferner war mir bei Abfassung der vorliegenden Arbeit leider noch nicht bekannt, daß A. F. Andersen den wesentlichen Inhalt der hier abgeleiteten Sätze 1 und 3 bereits 1926 in seiner Abhandlung „Comparison theorems in the theory of Cesàro summability", Proceedings of the London Math. Soc. (2) **27** (1927), S. 44, bewiesen hat.

(Eingegangen am 20. Februar 1940.)

Darstellung der Eigenwerte von $\Delta u + \lambda u = 0$ durch ein Randintegral.

Von

Franz Rellich in Dresden.

Es sei $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in einem Gebiet G mit dem Rand Γ eine Lösung der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ und es sei $u = 0$ auf Γ und[1]) $\iiint_G u^2 \, d\tau = 1$. Dann soll gezeigt werden:

$$\lambda = \frac{1}{4} \iint_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 \frac{\partial (r^2)}{\partial \nu} \, d\Omega; \tag{1}$$

$\frac{\partial}{\partial \nu}$ Differentiation nach der äußeren Normalen von Γ, $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$.

Die Möglichkeit einer solchen Darstellung beruht darauf, daß λ der Wert des Dirichletschen Integrals $\iiint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2\right] d\tau$ ist, genommen für eine Funktion, die dieses Integral unter den Nebenbedingungen $u = 0$ auf Γ und $\iiint_G u^2 d\tau = 1$ stationär macht. Auf demselben Prinzip beruht z. B. die bekannte Darstellung von H. A. Schwarz für den Flächeninhalt σ einer von einer geschlossenen Raumkurve $\mathfrak{x}$ begrenzten Minimalfläche durch ein Randintegral; die Formel lautet[2]) $\sigma = \frac{1}{2} \oint (\mathfrak{x}, d\mathfrak{x}, \xi)$ und es bedeutet darin ξ den Einheitsvektor der Normalen der Minimalfläche und $(\mathfrak{x}, d\mathfrak{x}, \xi)$ die Determinante der drei Vektoren $\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{x}$, ξ.

---

[1]) Für ein n-dimensionales Integral wird $\iiint$ und für ein $(n-1)$-dimensionales Integral wird $\iint$ geschrieben; $d\tau$ Volumelement in G, $d\Omega$ Oberflächenelement auf Γ.

[2]) Vgl. W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie I, 3. Aufl., § 110.

Zum Beweise von (1) benutze man die für beliebige Funktionen $v = v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gültigen Identitäten

$$\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}\, x_k \frac{\partial v}{\partial x_k} = \sum_{i,k=1}^{n} \Big[x_k \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_k}\Big) - \frac{1}{2}\, x_k \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big)^2 \Big],$$

$$\sum_{k=1}^{n} v\, x_k \frac{\partial v}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial (v^2)}{\partial x_k},$$

$$(2)\quad \iiint\limits_G (\Delta v + \lambda v)\cdot\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial v}{\partial x_k}\Big)\, d\tau = \iint\limits_\Gamma \Big[\sum_{i,k=1}^{n} x_k \frac{\partial v}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial \nu}\Big]\, d\Omega -$$

$$- \frac{1}{2}\iint\limits_\Gamma \Big[\sum_{i,k=1}^{n} x_k \Big(\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big)^2 \frac{\partial x_k}{\partial \nu}\Big]\, d\Omega + \frac{1}{2}\lambda \iint\limits_\Gamma \Big[\sum_{k=1}^{n} x_k v^2 \frac{\partial x_k}{\partial \nu}\Big]\, d\Omega -$$

$$- \iiint\limits_G \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{\partial v}{\partial x_k}\Big)^2 d\tau + \frac{1}{2}\iiint\limits_G n\cdot \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big)^2 d\tau - \frac{1}{2}\lambda \iiint\limits_G n\cdot v^2\, d\tau.$$

Setzt man $v = u$ und beachtet $\Delta u + \lambda u = 0$, $\iiint u^2\, d\tau = 1$ und $u = 0$ auf Γ, also $\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial \nu}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial \nu}$ auf Γ, so ergibt sich

$$0 = \iint\limits_\Gamma \Big(\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big)^2\cdot\Big[\sum_{i,k=1}^{n} x_k \Big(\frac{\partial x_i}{\partial \nu}\Big)^2 \frac{\partial x_k}{\partial \nu} - \frac{1}{2}\, x_k \Big(\frac{\partial x_i}{\partial \nu}\Big)^2\cdot\frac{\partial x_k}{\partial \nu}\Big]\, d\Omega +$$

$$+ \Big(\frac{n}{2} - 1\Big)\iiint\limits_G \sum_k \Big(\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big)^2 d\tau - \frac{n}{2}\lambda.$$

Wegen $\iiint\limits_G \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big)^2 d\tau = \lambda$ ergibt sich dann die behauptete Formel

$$\lambda = \frac{1}{2}\iint\limits_\Gamma \Big(\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big)^2 \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial x_k}{\partial \nu}\Big)\, d\Omega$$

(Eingegangen am 8. Juli 1939.)

Klassifikation der halblinearen Transformationen.

Von

Wilhelm Specht in Breslau.

Die Aufgabe der Klassifikation der halblinearen Transformationen

$$y_\varkappa = \sum_\lambda a_{\varkappa\lambda} x_\lambda^G \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

mit einer Matrix

$$A = (a_{\varkappa\lambda})$$

aus Elementen $a_{\varkappa\lambda}$ eines Körpers der Charakteristik 0 und einem Automorphismus G endlicher Ordnung dieses Körpers[1]), die bereits mehrfach durchgeführt worden ist[2]), kann auf die folgende, rein matrizentheoretische Fragestellung zurückgeführt werden:

Es sei Z ein zyklischer Körper des Grades k über einem Körper K der Charakteristik 0 als Grundkörper; der Körper Z besitzt dann einen Automorphismus G der Ordnung k, der die Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$ des Körpers Z über K erzeugt. Ist

$$X = (\xi_{\mu\nu}) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m;\ \nu = 1, 2, \ldots, n)$$

eine in Z rationale Matrix in m Zeilen und n Spalten, d. h. eine Matrix, deren Elemente sämtlich aus Z stammen, so bezeichne X^G die Matrix

$$X^G = (\xi_{\mu\nu}^G),$$

die aus X durch elementweise Anwendung des Automorphismus G von Z hervorgeht.

Zwei in Z rationale Matrizen A, B des Grades n mögen nun *G-ähnlich* genannt werden, wenn es eine in Z rationale, reguläre Matrix P des gleichen Grades gibt, so daß die Gleichung

$$P^{-1} A P^G = B \tag{2}$$

[1]) Wie üblich bezeichne ich mit x^G das Bild des Elementes x beim Automorphismus G des Körpers.

[2]) Vgl. N. Jacobson, On pseudo-linear transformations, Proceedings Nat. Acad. of Sciences **21** (1935), S. 667—670; N. Jacobson, Pseudo-linear transformations, Annals of Math. **38** (1937), S. 484—507; J. Haantjes, Klassifikation der antilinearen Transformationen, Math. Annalen **112** (1936), S. 98—106; J. Haantjes, Halblineare Transformationen, Math. Annalen **114** (1937), S. 293—304; T. Nakayama, Über die Klassifikation halblinearer Transformationen, Proceedings Phys.-Math. Soc. Japan **19** (1937), S. 99—107; K. Asano und T. Nakayama, Über halblineare Transformationen, Math. Annalen **115** (1938), S. 87—114.

besteht. Man überzeugt sich leicht davon, daß durch diesen Begriff eine Einteilung der Menge aller in Z rationaler Matrizen des Grades n in elementfremde Klassen G-ähnlicher Matrizen eingeführt wird, da die Eigenschaften der Symmetrie, Reflexivität und Transitivität erfüllt sind. Es erhebt sich daher die Frage nach kennzeichnenden Invarianten für diese Klassen G-ähnlicher Matrizen; die Beantwortung dieser Frage ist der wesentlichste Teil der Aufgabe der Klassifikation der halblinearen Transformationen in einem Körper der Charakteristik 0.

Wie schon erwähnt, sind kennzeichnende Invarianten für die Klassen G-ähnlicher Matrizen bereits angegeben worden. Da bei diesen Untersuchungen indes ziemlich allgemeine abstrakte algebraische Hilfsmittel herangezogen wurden, scheint dem Verfasser eine unmittelbare, rein matrizentheoretische Lösung dieser Aufgabe nicht ohne Wert zu sein, um so mehr als dieser Weg seines Erachtens den Vorzug größerer Einfachheit und Durchsichtigkeit besitzt. Hauptsächlich aber kam es ihm bei diesen Untersuchungen darauf an nachzuweisen, daß die üblichen Methoden der Matrizentheorie durchaus zur Lösung dieses Problems ausreichen.

Im ersten Abschnitt wird nach einer allgemeinen Formulierung der Ergebnisse zunächst der Fall der regulären Matrix durchgeführt; im zweiten Abschnitt schließt sich dann die Behandlung des schwierigeren Falles der singulären Matrix an.

I.

Ist M eine beliebige im Körper Z rationale Matrix des Grades n, so bezeichnen wir mit

$$D_0(M, x),\ D_1(M, x),\ \ldots,\ D_{n-1}(M, x) \tag{3}$$

die *Determinantenteiler* von M; es ist dabei $D_{n-\nu}(M, x)$ der (normierte) größte gemeinschaftliche Teiler aller ν-reihigen Unterdeterminanten der *charakteristischen Matrix* $xE - M$, insbesondere also $D_0(M, x)$ die *charakteristische Funktion*

$$D_0(M, x) = |xE - M|$$

der Matrix M. Demnach sind die Determinantenteiler von M in Z rationale Polynome. Bekanntlich sind aber auch die Quotienten

$$\frac{D_0(M,x)}{D_1(M,x)} = E_1(M,x);\ \frac{D_1(M,x)}{D_2(M,x)} = E_2(M,x);\ \ldots;\ \frac{D_{n-1}(M,x)}{1} = E_n(M,x) \tag{4}$$

(in Z rationale) Polynome, die als die *Elementarteiler* der Matrix M bezeichnet werden. Ferner sind die Elementarteiler kennzeichnende Invarianten für die Klassen (im üblichen Sinne) *ähnlicher* Matrizen: Zu zwei in Z rationalen

Matrizen A und B gibt es dann und nur dann eine reguläre, in Z rationale Matrix P, die die Beziehung

$$P^{-1}AP = B$$

erfüllt, wenn für die Elementarteiler der Matrizen A und B die Gleichungen

$$E_\nu(A, x) = E_\nu(B, x) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

bestehen[3]).

Man bilde nun weiter für eine in Z rationale Matrix A die Matrizen

$$N_\lambda(A) = A A^G A^{G^2} \ldots A^{G^{\lambda-1}} \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots) \tag{5}$$

und setze

$$r(A) = \text{Rang } N_\lambda(A);$$

insbesondere bezeichne man die Matrix

$$N_k(A) = N(A) = A A^G A^{G^2} \ldots A^{G^{k-1}} \tag{6}$$

als die *Norm* der Matrix A. Dann gilt der folgende Satz, der eine vollständige Beantwortung der gestellten Frage bedeutet[4]):

Satz 1. *Zwei in* Z *rationale Matrizen A und B des Grades n sind dann und nur dann G-ähnlich, wenn die Gleichungen*

$$r_\nu(A) = r_\nu(B) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

und

$$E_\nu(N(A), x) = E_\nu(N(B), x) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

gelten.

Demnach sind die Rangzahlen der Matrizen $N_\nu(A)$ und die Elementarteiler der Norm $N(A)$ kennzeichnende Invarianten der Klassen G-ähnlicher Matrizen. Da im Falle einer regulären Matrix A stets $r_\nu(A) = n$ gilt, und zwei G-ähnliche Matrizen sicherlich gleichzeitig regulär oder singulär sind, nimmt der Satz für reguläre Matrizen die folgende Gestalt an:

Satz 1*. *Zwei reguläre, in* Z *rationale Matrizen A und B des Grades n sind dann und nur dann G-ähnlich, wenn die Gleichungen*

$$E_\nu(N(A), x) = E_\nu(N(B), x) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

gelten, wenn also die Normen $N(A)$, $N(B)$ im gewöhnlichen Sinne ähnlich sind.

Zunächst werden wir diesen Sonderfall behandeln, wobei wir, um den Gang des Beweises übersichtlicher zu gestalten, einige Bemerkungen vorausschicken.

Hilfssatz 1. *Die Elementarteiler*

$$E_\nu(N(A), x) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

---

[3]) Vgl. G. Frobenius, Über lineare Substitutionen und bilineare Formen, Crelle-Journal **84** (1878), S. 1—63.

[4]) Vgl. die in [2]) genannte Arbeit von T. Nakayama.

der Norm $N(A)$ einer beliebigen in Z rationalen Matrix A des Grades n sind im Grundkörper K rational.

Es empfiehlt sich, für den Beweis eine abkürzende Bezeichnung einzuführen: Für jede in Z rationale Matrix M werde

$$M^{G^\lambda} = M^{(\lambda)} \qquad \text{für jedes ganze } \lambda$$

gesetzt; dabei gilt

$$M^{(\alpha)} = M^{(\beta)} \qquad \text{für } \alpha \equiv \beta \pmod{k}.$$

Die gleiche Bezeichnung verwenden wir auch für Elemente ξ des Körpers Z. Es ist dann

$$N_\lambda(A) = A^{(0)}A^{(1)} \dots A^{(\lambda-1)};\ N_\lambda(A^G) = A^{(1)}A^{(2)} \dots A^{(\lambda)},$$

und da $N_\lambda(A^G)$ aus $N_\lambda(A)$ durch Anwendung des Automorphismus G hervorgeht, in der oben eingeführten Bezeichnung für jedes λ

$$r_\lambda(A) = r_\lambda(A^G).$$

Insbesondere gilt dies für die Vielfachen $\lambda = \nu k$ mit $\nu = 1, 2, \dots, n$; dabei ist aber

$$N_{\nu k}(A) = (N(A))^\nu;\ N_{\nu k}(A^G) = (N(A^G))^\nu,$$

weshalb für die Potenzen der Normen $N(A)$, $N(A^G)$ die Gleichungen

$$\text{Rang}\,(N(A))^\nu = \text{Rang}\,(N(A^G))^\nu \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

bestehen. Setzt man nun zur Abkürzung

$$B = A^{(1)}A^{(2)} \dots A^{(k-1)},$$

so gelten die Gleichungen

$$N(A) = AB;\ N(A^G) = BA$$

und

$$\text{Rang}\,(AB)^\nu = \text{Rang}\,(BA)^\nu \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n).$$

Daher sind nach einem Satze von L. Autonne[5]) die beiden Matrizen AB und BA einander ähnlich, weshalb ihre Elementarteiler übereinstimmen:

$$E_\nu(N(A), x) = E_\nu(N(A^G), x) \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n).$$

Da nun aber die Elementarteiler der Matrix $N(A^G)$ aus den entsprechenden Elementarteilern der Matrix $N(A)$ durch Anwendung des Automorphismus G auf die Koeffizienten hervorgehen, besagen diese Gleichungen nichts anderes, als daß die Koeffizienten der Polynome $E_\nu(N(A), x)$ bei Anwendung des Automorphismus G ungeändert bleiben, also dem Grundkörper K angehören.

---

[5]) Vgl. L. Autonne, Sur une propriété des matrices linéaires, Nouv. Ann. de Math. (4) **12** (1912), S. 118–127.

Hilfssatz 2. *Zu jeder in* Z *rationalen Matrix* A *gibt es eine* G*-ähnliche Matrix* A_**, deren Norm* $N(A_*)$ *eine in* K *rationale Matrix ist:* $N(A_*) = N(A_*^G) = (N(A_*))^G$.

Da nämlich die Elementarteiler $E_\nu(N(A), x)$ der Matrix $N(A)$, wie wir gesehen haben, in K rationale Polynome sind, gibt es eine zu $N(A)$ ähnliche, in K rationale Matrix $M = R^{-1}N(A)R$. Setzen wir dann

$$A_* = R^{-1}AR^G = R^{-1}AR^1,$$

so ist für jedes λ

$$A_*^{(\lambda)} = (R^{-1})^{(\lambda)}A^{(\lambda)}R^{(\lambda+1)}$$

und daher

$$N(A_*) = (R^{-1})^{(0)}A^{(0)}R^{(1)}(R^{-1})^{(1)}A^{(1)}R^{(2)}\ldots(R^{-1})^{(k-1)}A^{(k-1)}R^{(k)} = R^{-1}N(A)R = M.$$

Da M in K rational ist, folgt weiter

$$(N(A_*))^G = N(A_*^G) = N(A_*).$$

Hilfssatz 3. *Sind* $M_0, M_1, \ldots, M_{k-1}$ *in* Z *rationale Matrizen in der Anzahl* k *der Ordnung des Automorphismus* G*, für die die Determinante* $D(x) = |x_0M_0 + x_1M_1 + \cdots + x_{k-1}M_{k-1}|$ *nicht identisch verschwindet, so kann man stets eine Größe* ξ *aus* Z *angeben, für die die Determinante* $D(\xi) = |\xi^{(0)}M_0 + \xi^{(1)}M_1 + \cdots + \xi^{(k-1)}M_{k-1}|$ *nicht verschwindet, wobei*

$$\xi^{(\varkappa)} = \xi^{G^\varkappa} \qquad \text{für } \varkappa = 0, 1, \ldots, k-1$$

zu setzen ist.

Setzen wir in der Determinante $D(x)$ mit einer Basis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ des Körpers Z über K mit neuen Unbestimmten $y_1, y_2, \ldots, y_k$

$$x_\varkappa = \alpha_1^{(\varkappa)}y_1 + \alpha_2^{(\varkappa)}y_2 + \ldots + \alpha_k^{(\varkappa)}y_k \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, k-1),$$

so geht die Funktion $D(x)$ in eine Funktion $D^*(y)$ über, die gleichfalls nicht identisch verschwindet, da die Matrix

$$(\alpha_{\varkappa+1}^{(\lambda)}) \qquad (\varkappa, \lambda = 0, 1, \ldots, k-1)$$

bekanntlich vom Rang k ist. Daher kann man für die Unbestimmten $y_1, y_2, \ldots, y_k$ auch Werte aus K angeben, für die $D^*(y)$ von Null verschieden ist. Dann wird aber, wenn

$$\xi = \alpha_1y_1 + \alpha_2y_2 + \cdots + \alpha_ky_k$$

gesetzt wird, offenbar

$$x_0 = \xi = \xi^{(0)}; \quad x_1 = \xi^{(1)}; \quad x_2 = \xi^{(2)}; \quad \ldots; \quad x_{k-1} = \xi^{(k-1)}$$

und demnach

$$D(\xi) = |\xi^{(0)}M_0 + \xi^{(1)}M_1 + \ldots + \xi^{(k-1)}M_{k-1}| \neq 0.$$

Mit diesen Hilfsmitteln können wir den Beweis des Satzes 1* nun leicht durchführen. Sind A, B zwei reguläre, in Z rationale Matrizen, die einander G-ähnlich sind, so gilt mit einer geeigneten, in Z rationalen Matrix P die Beziehung

$$P^{-1} A P^G = B \quad \text{oder} \quad A P^{(1)} = P^{(0)} B.$$

Hieraus folgt weiter für alle λ

$$A^{(\lambda)} P^{(\lambda+1)} = P^{(\lambda)} B^{(\lambda)}$$

und daher

$$N(A) P = A^{(0)} A^{(1)} \dots A^{(k-1)} P^{(k)} = P^{(0)} B^{(0)} B^{(1)} \dots B^{(k-1)} = P N(B).$$

Demnach sind die Normen $N(A)$, $N(B)$ ähnlich, die Elementarteiler dieser beiden Matrizen also gleich.

Sind umgekehrt A, B zwei reguläre, in Z rationale Matrizen, deren Normen $N(A)$ und $N(B)$ die gleichen Elementarteiler besitzen, so gibt es nach Hilfssatz 2 Matrizen A_* und B_* mit den folgenden Eigenschaften: Die Matrix A_* ist zu A G-ähnlich; ihre Norm $N(A_*)$ ist im Körper K rational und besitzt die gleichen Elementarteiler wie die Matrix $N(A)$. Ebenso ist die Matrix B_* zu B G-ähnlich; ihre Norm $N(B_*)$ ist im Körper K rational und besitzt die gleichen Elementarteiler wie die Matrix $N(B)$. Daher sind auch die beiden Matrizen $N(A_*)$ und $N(B_*)$ einander ähnlich, und es genügt zu zeigen, daß die beiden Matrizen A_* und B_* einander G-ähnlich sind.

Sind demgemäß A, B zwei reguläre, in Z rationale Matrizen, deren Normen $N(A)$ und $N(B)$ in K rational sind und die gleichen Elementarteiler besitzen, so gibt es eine in K rationale, reguläre Matrix P, die die Beziehung

$$P^{-1} N(A) P = N(B)$$

erfüllt. Demnach ist wegen $P^G = P$ die Matrix $C = P^{-1} A P$ zur Matrix A G-ähnlich. Hieraus folgt

$$N(C) = P^{-1} N(A) P = N(B)$$

und daher

$$N(C) = N(C^G) = N(B) = N(B^G). \tag{7}$$

Wir haben nunmehr nur noch eine G-Transformation anzugeben, durch die die Matrix C in die Matrix B übergeht, also eine Matrix X zu bestimmen, die die Gleichung

$$X^{-1} C X^G = B$$

erfüllt. Zu diesem Zwecke setzen wir mit einer Unbestimmten ξ aus Z die Matrix

$$X = \xi^{(0)} B^{(1)} B^{(2)} \dots B^{(k-1)} + \xi^{(1)} C^{(0)} B^{(2)} \dots B^{(k-1)} + \xi^{(2)} C^{(0)} C^{(1)} B^{(3)} \dots B^{(k-1)} + \dots$$
$$+ \xi^{(k-2)} C^{(0)} C^{(1)} \dots C^{(k-3)} B^{(k-1)} + \xi^{(k-1)} C^{(0)} C^{(1)} \dots C^{(k-2)}$$

an und wählen ξ derart, daß die Determinante $|X|$ von Null verschieden ist, was nach dem Hilfssatz 3 stets möglich ist, da alle in X auftretenden Matrizen regulär sind. Dann gilt

$$XB = \xi^{(0)} B^{(1)} B^{(2)} \dots B^{(k)} + \xi^{(1)} C^{(0)} B^{(2)} \dots B^{(k)} + \xi^{(2)} C^{(0)} C^{(1)} B^{(3)} \dots B^{(k)} + \dots$$
$$+ \xi^{(k-2)} C^{(0)} C^{(1)} \dots C^{(k-3)} B^{(k-1)} B^{(k)} + \xi^{(k-1)} C^{(0)} C^{(1)} \dots C^{(k-2)} B^{(k)}$$

und wegen (7) weiter

$$XB = C(\xi^{(0)} C^{(1)} \dots C^{(k-1)} + \xi^{(1)} B^{(2)} \dots B^{(k)} + \xi^{(2)} C^{(1)} B^{(3)} \dots B^{(k)} + \dots$$
$$+ \xi^{(k-2)} C^{(1)} \dots C^{(k-3)} B^{(k-1)} B^{(k)} + \xi^{(k-1)} C^{(1)} \dots C^{(k-2)} B^{(k)}),$$

also, wie behauptet worden ist,

$$XB = CX^G.$$

Damit ist der Satz 1* vollständig bewiesen.

II.

Um unsere Untersuchungen auf den Fall einer singulären Matrix auszudehnen, haben wir noch weitere Hilfsmittel heranzuziehen. Zu diesem Zwecke beweisen wir den folgenden Satz, der auch für sich wohl nicht ohne Interesse ist:

Satz 2. *Ist A eine in Z rationale Matrix, deren Norm eine charakteristische Funktion von der Gestalt*

$$|xE - N(A)| = f_1(x) f_2(x)$$

mit zwei teilerfremden, in K rationalen Polynomen besitzt, so kann man eine zu A G-ähnliche Matrix $B = P^{-1} A P^G$ der Gestalt

$$B = P^{-1} A P^G = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

angeben, so daß für die Normen der Teilmatrizen B_1, B_2 die Gleichungen

$$|xE_1 - N(B_1)| = f_1(x); \quad |xE_2 - N(B_2)| = f_2(x)$$

bestehen.

Da die charakteristische Funktion $|xE - N(A)|$ im Körper K rational ist und in die teilerfremden Polynome $f_1(x)$, $f_2(x)$ zerfällt, kann man auf Grund des Hilfssatzes 1 mit einer regulären, in Z rationalen Matrix P eine Zerlegung

$$P^{-1} N(A) P = \begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{pmatrix}$$

mit zwei in K rationalen Matrizen N_1 und N_2 finden, deren charakteristischen Funktionen

$$|xE_1 - N_1| = f_1(x); \quad |xE_2 - N_2| = f_2(x)$$

sind. Setzen wir nun $P^{-1}AP^G = B$, so wird

$$P^{-1}N(A)\,P = N(B) = \begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{pmatrix},$$

und da N_1 und N_2 in K rational sind,

$$N(B) = N(B^G).$$

Andererseits ist

$$N(B)B = BN(B^G) = BN(B)$$

und daher, wenn

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

in der $N(B)$ entsprechenden Zerlegung gesetzt wird:

$$\begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{pmatrix},$$

insbesondere also

$$N_1B_{12} = B_{12}N_2; \quad N_2B_{21} = B_{21}N_1.$$

Hieraus und aus der Teilerfremdheit der charakteristischen Funktionen $|xE_1 - N_1| = f_1(x)$ und $|xE_2 - N_2| = f_2(x)$ entnimmt man in bekannter Weise[6])

$$B_{12} = 0; \quad B_{21} = 0.$$

Schließlich ist noch

$$B^G = \begin{pmatrix} B_{11}^G & 0 \\ 0 & B_{22}^G \end{pmatrix}; \quad N(B) = \begin{pmatrix} N(B_{11}) & 0 \\ 0 & N(B_{22}) \end{pmatrix}$$

und daher

$$N(B_{11}) = N_1; \quad N(B_{22}) = N_2.$$

Unter einer *nilpotenten* Matrix des Grades n verstehen wir in der üblichen Bezeichnung eine Matrix, deren n-te Potenz die Nullmatrix ist; dagegen wollen wir eine Matrix A *G-nilpotent* nennen, wenn ihre Norm $N(A)$ nilpotent ist. Wie man leicht durch Beispiele belegen kann, ist eine G-nilpotente Matrix nicht notwendig nilpotent. Indes gilt der

Satz 3. *Eine in* Z *rationale, G-nilpotente Matrix ist zu einer in* K *rationalen, nilpotenten Matrix G-ähnlich.*

Eine in Z rationale, G-nilpotente Matrix A ist sicherlich singulär, da die Norm einer regulären Matrix gleichfalls regulär ist. Daher lassen sich vom Nullvektor verschiedene, n-zahlige, in Z rationale Vektoren $\mathfrak{x}$ angeben, die die Gleichung

$$A\mathfrak{x}^G = \mathfrak{o}$$

---

[6]) Vgl. A. Voß, Über die mit einer bilinearen Form vertauschbaren Formen, Sitzungsber. München **19** (1889), S. 283—300.

erfüllen. Bilden $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_r$ ein volles linear unabhängiges Lösungssystem aus Z, so ergänze man, was stets möglich ist, diese Vektoren zu einer in Z rationalen, regulären Matrix

$$X = (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_r, \mathfrak{x}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{x}_n)$$

des Grades n. Man erhält dann

$$B = X^{-1} A X^G = (0\, B_*)$$

mit einer Matrix B_* in n Zeilen und $n - r$ Spalten vom Range $n - r$. Man trenne nun in B in der linken oberen Ecke eine Nullmatrix vom Grade r ab; dann nimmt B die Gestalt

$$B = X^{-1} A X^G = \begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

an, worin nun wegen

$$N(B) = X^{-1} N(A) X = \begin{pmatrix} 0 & N_1 \\ 0 & N(B_2) \end{pmatrix}$$

die Matrix B_2 gleichfalls G-nilpotent ist. Daher können wir das Verfahren noch einmal auf die Matrix B_2 anwenden; es entsteht dann mit einer geeigneten, in Z rationalen, regulären Matrix P

$$C = P^{-1} A P^G = \begin{pmatrix} 0 & C_{12} & C_{13} \\ 0 & 0 & C_{23} \\ 0 & 0 & C_{33} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

worin C_{33} eine G-nilpotente Matrix ist. Dabei besitzt C den Rang $n - r$, weshalb für die Teilmatrix C_{12} Rang und Spaltenzahl übereinstimmen, so daß insbesondere die Spaltenzahl der Matrix C_{12} die Zeilenzahl nicht übertreffen kann. Es gibt daher eine linke Inverse zu C_{12}, d. h. eine in Z rationale Matrix Y, so daß

$$Y C_{12} = E_2,$$

also eine Einheitsmatrix vom Grade des Ranges von C_{12} wird. Man bilde nunmehr $Z = -Y^G C_{13}^G$ und entsprechend der Zerlegung (8) von C die Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & Z \\ 0 & 0 & E_3 \end{pmatrix}.$$

Durch eine einfache Rechnung, die ich hier übergehe, findet man dann

$$D = Q^{-1} C Q^G = \begin{pmatrix} 0 & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & D_{23} \\ 0 & 0 & D_{33} \end{pmatrix}.$$

Durch Anwendung dieses Verfahrens auf die Matrizen D_{23} und D_{33}, die keine Änderung der Matrix D_{12} herbeiführt, erhält man schließlich eine zu A G-ähnliche, in Z rationale, nilpotente Matrix der Gestalt

$$M^{-1}AM^G = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{m-1,m} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

wobei für jede Teilmatrix $A_{u-1,u}$ Rang und Spaltenzahl übereinstimmen, also die Spaltenzahl die Zeilenzahl nicht übertrifft.

Man hätte natürlich auf weniger umständliche Art das Resultat erhalten können, daß eine G-nilpotente Matrix zu einer in Z rationalen, nilpotenten Matrix G-ähnlich ist. Es ist dieses umständlichere Verfahren aber notwendig, um den letzten Schritt durchzuführen, nämlich zu zeigen, daß die Matrix (9) durch eine in K rationale Matrix ersetzt werden kann. Ist M eine beliebige, in Z rationale Matrix, deren Rang gleich der Spaltenzahl ist, so können wir sie durch eine geeignete Matrix M_1 zu einer regulären, in Z rationalen Matrix (M, M_1) ergänzen und zu dieser Matrix die Inverse Z bilden:

$$Z(M, M_1) = E.$$

Insbesondere ist dann ZM eine in K rationale Matrix; demnach läßt sich zu einer Matrix M mit den angegebenen Eigenschaften stets eine reguläre, in Z rationale Matrix Z angeben, so daß ZM in K rational ist. Man bestimme nun zu den Matrizen $A_{12}, A_{23}, \dots, A_{m-1,m}$ der Reihe nach reguläre, in Z rationale Matrizen $Z_{m-1}, Z_{m-2}, \dots, Z_2, Z_1$ derart, daß die Matrizen

$$Z_{m-1}^{-1} A_{m-1,m},\ Z_{m-2}^{-1} A_{m-2,m-1} Z_{m-1}^G, \dots, Z_2^{-1} A_{23} Z_3^G, Z_1^{-1} A_{12} Z_2^G$$

in K rational ist, was stets möglich ist, da für die Matrizen

$$A_{m-1,m},\ A_{m-2,m-1} Z_{m-1}^G, \dots, A_{23} Z_3^G, A_{12} Z_2^G$$

gleichfalls Rang und Spaltenzahl übereinstimmen. Setzt man nun

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Z_{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & E_m \end{pmatrix},$$

so folgt

$$(10)\quad Z^{-1}M^{-1}AM^GZ^G = \begin{pmatrix} 0 & Z_1^{-1}A_{12}Z_2^G & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_2^{-1}A_{23}Z_3^G & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & Z_{m-1}^{-1}A_{m-1,m} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

womit der Satz 3 vollständig bewiesen ist.

Für die Behandlung des Falles einer singulären Matrix entscheidend ist der nachstehende

Satz 4. *Zu jeder in* $\mathfrak{Z}$ *rationalen, singulären Matrix* A *läßt sich eine* G*-ähnliche Matrix* A_* *angeben, die die Gestalt*

$$A_* = P^{-1}AP^G = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

besitzt, wobei A_1 *regulär,* A_2 G*-nilpotent ist. Die Teilmatrizen* A_1, A_2 *sind dabei (bis auf* G*-Transformationen) eindeutig bestimmt.*

Da die Matrix A singulär ist, ist auch ihre Norm $N(A)$ singulär, weshalb die charakteristische Funktion die Gestalt

$$|xE - N(A)| = x^m f(x)$$

besitzt mit $m \geqq 1$ und einem Polynom $f(x)$, für das $f(0)$ von Null verschieden ist. Daher gibt es nach Satz 2 eine zu A G-ähnliche Matrix

$$A_* = P^{-1}AP^G = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

so daß die charakteristischen Funktionen

$$|xE_1 - N(A_1)| = f(x); \quad |xE_2 - N(A_2)| = x^m$$

sind. Demnach ist $N(A_1)$, also auch A_1 regulär; ferner ist $N(A_2)$ nilpotent, also A_2 G-nilpotent. Ist andererseits

$$B = Q^{-1}AQ^G = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

eine Zerlegung von A, in der B_1 regulär und B_2 G-nilpotent ist, so gilt

$$N(B) = Q^{-1}N(A)Q = \begin{pmatrix} N(B_1) & 0 \\ 0 & N(B_2) \end{pmatrix}.$$

Demnach ist

$$|xE_1 - N(B_1)| = f(x); \quad |xE_2 - N(B_2)| = x^m$$

und $N(A_1)$ zu $N(B_1)$, $N(A_2)$ zu $N(B_2)$ ähnlich. Ist weiter R eine Matrix, die die Gleichungen

$$R^{-1}A_*R^G = B \quad \text{und} \quad R^{-1}N(A_*)R = N(B)$$

erfüllt, so folgt bei passender Zerlegung von R

$$\begin{pmatrix} N(A_1) & 0 \\ 0 & N(A_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N(B_1) & 0 \\ 0 & N(B_2) \end{pmatrix},$$

insbesondere also

$$N(A_1) R_{12} = R_{12} N(B_2); \quad N(A_2) R_{21} = R_{21} N(B_1),$$

weshalb

$$R_{12} = 0; \quad R_{21} = 0$$

ist. Somit erhält man schließlich

$$R^{-1} A_* R^G = \begin{pmatrix} R_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & R_{22}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11}^G & 0 \\ 0 & R_{22}^G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

und

$$R_{11}^{-1} A_1 R_{11}^G = B_1; \quad R_{22}^{-1} A_2 R_{22}^G = B_2,$$

wie zu zeigen war.

Schließlich geben wir noch ein einfaches Kriterium für die Ähnlichkeit nilpotenter Matrizen an, das aus dem allgemeinen, früher angegebenen Kriterium leicht abgeleitet werden kann, so daß wir hier seinen Beweis übergehen können:

Hilfssatz 4. *Zwei nilpotente Matrizen A und B gleichen Grades n sind dann und nur dann ähnlich, wenn*

$$\text{Rang } A^\nu = \text{Rang } B^\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$$

gilt.

Mit dieser letzten Bemerkung sind nun die Hilfsmittel für den Beweis des Satzes 1 vollständig zusammengetragen. Sind A, B zwei in $\mathfrak{Z}$ rationale, einander G-ähnliche Matrizen des Grades n, gilt also mit einer in $\mathfrak{Z}$ rationalen, regulären Matrix P die Gleichung

$$P^{-1} A P^G = B,$$

so ist

$$N_\lambda(B) = B B^G \ldots B^{G^{\lambda-1}} = P^{-1} A P^{(\lambda)},$$

weshalb die Gleichungen

$$\text{Rang } N_\lambda(B) = \text{Rang } N_\lambda(A) \quad \text{oder} \quad r_\lambda(B) = r_\lambda(A)$$

bestehen. Ferner ist für $\lambda = k$

$$N(B) = P^{-1} N(A) P,$$

so daß die Elementarteiler der Matrizen $N(B)$ und $N(A)$ übereinstimmen.

Es seien nun umgekehrt A, B zwei Matrizen, deren Normen ähnlich sind, und für die die Gleichungen

$$r_\nu(A) = r_\nu(B) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

gelten. Wir können dann zwei in Z rationale, reguläre Matrizen P, Q angeben, so daß die Zerfällungen

$$(11) \qquad A_* = P^{-1} A P^G = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}; \quad B_* = Q^{-1} B Q^G = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

eintreten, worin A_1, B_1 regulär und A_2, B_2 G-nilpotent sind. Dabei läßt sich aber nach Satz 3 durch geeignete Abänderung der Matrizen P und Q erzielen, daß die Matrizen A_2 und B_2 im Körper K rational und nilpotent sind. Es genügt dann nachzuweisen, daß unter den Voraussetzungen der Ähnlichkeit der Normen $N(A_*)$, $N(B_*)$ und der Gleichungen

$$r_\nu(A_*) = r_\nu(B_*) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

die beiden Matrizen A_* und B_* G-ähnlich sind. Dies ergibt sich aber sogleich, wenn wir beweisen können, daß in der Zerlegung (11) die Teilmatrizen A_1 und B_1, sowie A_2 und B_2 einander G-ähnlich sind. Nun ist

$$N(A_*) = \begin{pmatrix} N(A_1) & 0 \\ 0 & N(A_2) \end{pmatrix} \text{ zu } N(B_*) = \begin{pmatrix} N(B_1) & 0 \\ 0 & N(B_2) \end{pmatrix}$$

ähnlich, also sind, da $N(A_1)$, $N(B_1)$ beide regulär, $N(A_2)$, $N(B_2)$ beide nilpotent sind, die Matrizen $N(A_1)$ und $N(B_1)$ einander ähnlich. Nach Satz 1* folgt daraus die G-Ähnlichkeit der beiden Matrizen A_1 und B_1. Weiter haben wir, da A_2, B_2 beide in K rational sind, zu zeigen, daß A_2, B_2 ähnlich sind, da sie dann schon in K ähnlich sind, d. h. daß es eine in K rationale, reguläre Matrix R_2 gibt so daß

$$R_2^{-1} A_2 R_2 = B_2 \quad \text{oder} \quad R_2^{-1} A_2 R_2^G = B_2$$

ist. Da nun nach Voraussetzung

$$\operatorname{Rang} N_\nu(A_*) = \operatorname{Rang} N_\nu(B_*) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

ist, erhalten wir, wenn noch $\operatorname{Rang} A_1 = \operatorname{Rang} B_1 = s$ gesetzt wird, da A_2 und B_2 in K rational sind:

$$\operatorname{Rang} N_\nu(A_*) = \operatorname{Rang} N_\nu(A_1) + \operatorname{Rang} N_\nu(A_2) = s + \operatorname{Rang} A_2^\nu$$

$$= \operatorname{Rang} N_\nu(B_*) = \operatorname{Rang} N_\nu(B_1) + \operatorname{Rang} N_\nu(B_2) = s + \operatorname{Rang} B_2^\nu,$$

woraus die Gleichungen

$$\operatorname{Rang} A_2^\nu = \operatorname{Rang} B_2^\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n - s - 1)$$

folgen, die für die Ähnlichkeit der nilpotenten Matrizen A_2, B_2 notwendig und hinreichend sind.

Damit ist der Satz 1 in vollem Umfange bewiesen.

(Eingegangen am 22. Januar 1940.)

Über das Verhalten Dirichletscher Reihen am Rande des Konvergenzgebietes.

Von

Vojislav G. Avakumović in Beograd.

Im folgenden wird ein Tauberscher Satz funktionentheoretischer Art[1]) bewiesen, der gewissermaßen die Hardy-Littlewoodschen Umkehrsätze für Dirichletsche Reihen[2]) mit den Sätzen von Fatou-Rieszschem[3]) Typus verbindet[4]).

Der hier zu beweisende Satz lautet:

Satz I. *Sei*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{n-1} < \lambda_n \to \infty \quad \text{bei } n \to \infty$$

und die durch

$$J(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-s\lambda_\nu}$$

für $R(s) > 0$ definierte Funktion genüge den Voraussetzungen: I. *$J(s)$ ist gleichmäßig beschränkt in einem konvexen Gebiet*[5]), *dessen Begrenzung im Punkte $s = 0$ eine Berührung von der Ordnung $k - 1$, $k > 1$ mit der imaginären Achse hat. Also, wenn dieses Gebiet mit D_k bezeichnet wird, so ist*

$$(A) \qquad |J(s)| < M, \quad \text{wenn } s \in D_k.$$

II. *Es ist*

$$(B) \qquad \lim_{\delta = 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin yt}{t} J(\delta + s)\, dt = A + o(1) \quad \text{bei } y \to \infty,$$

wobei $s = |t|^k + iat$ (a reell $\neq 0$) in D_k liegt.

[1]) Dies sind nach G. Doetsch (Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin 1937) Taubersche Sätze, deren Voraussetzungen über $J(s)$ funktionentheoretischer Natur sind.

[2]) Vgl. N. Wiener, Tauberian theorems, Annals of Math. (2), **33** (1932), S. 1—100.

[3]) Vgl. A. E. Ingham, On Wiener's method in Tauberian theorems, Proc. London Math. Soc. **38** (1935), S. 458—480.

[4]) Andererseits steht Satz I in naher Beziehung zu den Sätzen, die eine Vereinfachte Behandlung gewisser Fragen der „partitio numerorum" ermöglichen. Den diesbezüglich Interessierten verweise ich auf meine Note „Bemerkungen über Laplacesche Integrale, deren Wachstum von Exponentialcharakter ist I" und „II", Math. Zeitschr. **46** (1940), S. 62—69, insbesondere auf die Einleitung des ersten Teiles; weitere Literatur ergibt sich hieraus durch Fortsetzung rückwärts.

[5]) Gebiet nenne ich wie üblich einen Bereich, dem nicht alle Punkte seiner Begrenzung angehören; in unserem Falle bezieht sich dies insbesondere auf den Punkt $s = 0$.

Ferner sei, wenn $A_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$ *gesetzt wird,*

$$\liminf_{n=\infty} \operatorname*{Min}_{\lambda_n \leqq \lambda_\nu \leqq \lambda_n + \varepsilon \lambda_n^{1/k}} \{A_\nu - A_n\} = -w(\varepsilon) \to 0, 0 < \varepsilon \to 0.$$

Dann ist

$$A_n = A + o(1) \quad \textit{bei } n \to \infty \text{ [5a]}.$$

Ich beweise gleich den nicht wesentlich allgemeineren

Satz A. *Die durch*

$$J(s) = s \int_0^\infty e^{-su} A(u)\, du$$

für $R(s) > 0$ *definierte Funktion genüge den Voraussetzungen* I. *und* II. *des vorigens Satzes und es sei*

$$(C_k - o) \quad \liminf_{u=\infty} \operatorname*{Min}_{u \leqq u' \leqq u + \varepsilon u^{1/k}} \{A(u') - A(u)\} = -w(\varepsilon) \to 0,\ 0 < \varepsilon \to 0.$$

Dann ist

$$A(u) = A + o(1) \quad \textit{bei } u \to \infty.$$

Zugleich beweise ich folgenden, für den Beweis des Satzes A nötigen

Satz B. *Alles wie in* Satz A *nur anstatt der Voraussetzung* II., *d. h. der Formel* (B), *sei*

$$(C) \qquad \lim_{\delta = 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin yt}{t} J(\delta + s)\, dt = O(1) \quad \textit{bei } y \to \infty$$

5a) Denjenigen Fall des Satzes I bzw. A, der dem Ikehara-Heilbronn-Landauschen Satz entspricht, habe ich schon im Jahre 1937 in der Note „Théorèmes, relatifs aux integrales de Laplace sur leur frontiere de convergence" (C. R. Acad. Paris, t. 240, S. 224, Sitzung von 25. I. 1937) veröffentlicht. Im Jahre 1937, anläßlich des zweiten Mathematikerkongresses der Balkanländer in Bukarest (12. IX. 1937), habe ich in einer Sektionsmitteilung weitgehende Verallgemeinerungen dieses Satzes dargelegt. Diese Mitteilung erschien (ohne Beweise) unter dem Titel „Über das Verhalten Laplacescher Integrale an der Konvergenzgrenze mit neuem Beweis eines Satzes von Hardy-Ramanujan über das asymptotische Verhalten der Zerfällungskoeffizienten" im „C. R. du 2me Congr. interbalkan. des Math. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 40, Nr. 1/2 (1938), S. 101—106". Die (in dieser Note reichlich enthaltenen) Sätze I bzw. A decken sich im wesentlichen mit den Sätzen des ersten Kapitels meiner (noch nicht im Druck befindlichen) Doktordissertation „Über das Verhalten Laplacescher Integrale am Rande des Konvergenzgebietes" (serbisch), die ich am 12. X. 1938 der Universität in Beograd überreichte. Hier gebe ich aber einen in manchen Punkten vereinfachten Beweis. Währenddessen kamen, wie mir von privater Seite brieflich mitgeteilt wurde, die Herren N. Wiener und H. R. Pitt in der Abhandlung „An extension of Ikehara's theorem, Journ. of Math. and Phys. of the Mass. Inst. of Technology (1939)", die mir bisher nicht zur Kenntnis kam, zu fast denselben Ergebnissen. Da aber, der genannten brieflichen Mitteilung nach, ihre Beweismethode eine andersartige ist, so hoffe ich darin eine Berechtigung für die Veröffentlichung des Beweises der Sätze I und A zu finden.

und anstatt $(C_k - o)$ *sei*

$(C_k - O)$ $A(u') - A(u) > -w(\varepsilon)$ *für ein* $\varepsilon > 0$ *und* $u \leqq u' \leqq u + \varepsilon u^{1/k}$.

Dann ist

$$A(u) = O(1) \quad \text{bei } u \to \infty.$$

Die Beweise der Sätze A und B stützen sich auf folgende Hilfssätze:

Hilfssatz I. *Aus* $(C_k - O)$ *folgt*

$$A(y) - A(x) > -w_1 - w_2\left\{y^{\frac{k-1}{k}} - x^{\frac{k-1}{k}}\right\} \quad \text{für} \quad y > x. \tag{1}$$

Also insbesondere

$$A(u') - A(u) > -w_3 u^{\frac{k-1}{k}} \quad \text{für} \quad u \leqq u' \leqq 2u. \tag{2}$$

Beweis. Sei $\alpha(t) = \exp\left[t^{\frac{k-1}{k}}\right]$ gesetzt und mit $\alpha^*(t)$ die inverse Funktion von $\alpha(t)$ bezeichnet. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert dann ein $l > 1$ derart, daß

$$t + \varepsilon t^{\frac{1}{k}} > \alpha^*(l\alpha(t)) = \left\{\lg l + t^{\frac{k-1}{k}}\right\}^{\frac{k}{k-1}}$$

ist. Aus der Ungleichung $(C_k - O)$ folgt die Existenz eines $w_1 > w(\varepsilon)$, so daß

$$A(t') - A(t) > -w_1 \quad \text{für} \quad t \leqq t' \leqq \alpha^*(l\alpha(t))$$

ist. Wird nun

$$x = x_0,\ x_\nu = \alpha^*(l\alpha(x_{\nu-1})) = \alpha^*(l^\nu \alpha(x_0)), \quad \nu = 0, 1, \ldots, n,$$

gesetzt und n durch

$$x_n \leqq y < \alpha^*(l\alpha(x_n)),$$

d. h. durch

$$\lg \frac{\alpha(x_n)}{\alpha(x_0)} \leqq \lg \frac{\alpha(y)}{\alpha(x)} < n \lg l$$

festgesetzt, so folgt aus der vorstehenden Ungleichung, daß

$$A(y) - A(x) > -w_1 - w_1 n > -w_1 - \frac{w_1}{\lg l}\left(y^{\frac{k-1}{k}} - x^{\frac{k-1}{k}}\right)$$

ist.

Hilfssatz II. *Für jedes* $k > 1$ *und* $\lambda < \frac{\pi}{2k}$ *ist*

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-t^k} \cos x t \, dt \\
&= \frac{k}{x^{k+1}}\left\{\int_0^\infty \exp\left[-r\sin\lambda - \left(\frac{r}{x}\right)^k \cos k\lambda\right] \sin\left(r\cos\lambda + \lambda k\right) \cos\left(\left(\frac{r}{x}\right)^k \sin k\lambda\right) r^{k-1} dr\right. \\
&\left. - \int_0^\infty \exp\left[-r\sin\lambda - \left(\frac{r}{x}\right)^k \cos k\lambda\right] \cos\left(r\cos\lambda + \lambda k\right) \sin\left(\left(\frac{r}{x}\right)^k \sin k\lambda\right) r^{k-1} dr\right\}
\end{aligned} \tag{3}$$

also insbesondere

$$\int_0^\infty e^{-t^k} \cos xt\, dt = O\left(\frac{1}{x^{k+1}}\right), \quad x \to \infty. \tag{4}$$

Beweis. Partielle Integration ergibt

$$R\left\{\int_0^\infty e^{-t^k + ixt}\, dt\right\} = R\left\{-\frac{ik}{x}\int_0^\infty e^{-t^k+ixt}\, t^{k-1}\, dt\right\}.$$

Wird jetzt $t = \frac{\mu}{x}$ gesetzt und der Integrationsweg um den (erlaubten) Winkel $0 < \lambda < \frac{\pi}{2k}$ gedreht, so folgt die Behauptung. (4) folgt unmittelbar aus (3).

Hilfssatz III. *Sei*

$$\alpha_0 = \frac{k-1}{k},$$

$$B(y) = O(y^b) \quad \textit{bei } y \to \infty,\ 0 \leqq b \leqq 1 \tag{5}$$

und

$$\varphi(y,\xi) = B(y+\xi)\int_0^\infty e^{-\eta^k}\left\{\cos\xi\eta - \cos\left[\alpha_0\left(y^{\frac{k}{k-1}} - (y+\xi)^{\frac{k}{k-1}}\right)(y+\xi)^{\frac{1}{1-k}}\eta\right]\right\} d\eta. \tag{6}$$

Dann ist

$$\int_{-y}^\infty \varphi(y,\xi)\, d\xi = O(y^{b-1}) \quad \textit{bei } y \to \infty.$$

Beweis. Sei $0 < \varepsilon < 1$. Wir beweisen: Es existiert ein $0 < \vartheta < 1$ derart, daß, wenn

$$\int_{-y}^\infty \varphi(y,\xi)\, d\xi = \int_{-y}^{-\vartheta y} + \int_{-\vartheta y}^{-\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\vartheta y} + \int_{\vartheta y}^\infty = \sum_{\nu=1}^{\nu=5} H_\nu(y)$$

gesetzt wird,

$$H_\nu(y) = O(y^{b-1}) \quad \text{bei } y \to \infty, \quad \nu = 1, 2, \ldots, 5$$

ist.

a) Wegen (4) und (5) ist

$$|H_1(y)| < C_0 \int_{\vartheta y}^{y} (y+\xi)^b \left[\xi^{-(k+1)} + \left|\frac{(y+\xi)^{\frac{1}{k-1}}}{\alpha_0\left\{y^{\frac{k}{k-1}} - (y+\xi)^{\frac{k}{k-1}}\right\}}\right|^{k+1}\right] d\xi$$

$$< O(y^{b-1}),\ y \to \infty.$$

b) Wird

$$\Theta_\nu(\xi) = \frac{\alpha_0\left\{y^{\frac{k}{k-1}} - (y+\xi)^{\frac{k}{k-1}}\right\}}{(y+\xi)^{\frac{1}{k-1}}},$$

$$\cos k\lambda = v, \quad \sin k\lambda = w$$

gesetzt und (5) berücksichtigt, so ist

$$|H_2(y)| \prec C_1 \int_\varepsilon^{\vartheta y} (y+\xi)^b \, d\xi \left| \int_0^\infty e^{-\eta^k} \{\cos \Theta_\nu(-\xi)\eta - \cos \xi\eta\} \, d\eta \right|,$$

also wegen (3), wenn zur Abkürzung noch $\Theta_\nu = \Theta_\nu(-\xi)$ gesetzt wird,

$$(7)\left\{\begin{aligned} |H_2(y)| < C_2 \int_\varepsilon^{\vartheta y} (y+\xi)^b d\xi \Bigg| & \frac{1}{\Theta_y^{k+1}} \int_0^\infty \exp\left[-wr - v\left(\frac{r}{\Theta_\nu}\right)^k\right] r^{k-1} \sin(vr+\lambda k) \cos w\left(\frac{r}{\Theta_\nu}\right)^k dr \\ & - \frac{1}{\xi^{k+1}} \int_0^\infty \exp\left[-wr - v\left(\frac{r}{\xi}\right)^k\right] r^{k-1} \sin(vr+\lambda k) \cos w\left(\frac{r}{\xi}\right)^k dr \\ + C_3 \int_\varepsilon^{\vartheta y} (y+\xi)^b d\xi \Bigg| & \frac{1}{\Theta_y^{k+1}} \int_0^\infty \exp\left[-wr - v\left(\frac{r}{\Theta_\nu}\right)^k\right] r^{k-1} \cos(vr+\lambda k) \sin w\left(\frac{r}{\Theta_\nu}\right)^k dr \\ & - \frac{1}{\xi^{k+1}} \int_0^\infty \exp\left[-wr - v\left(\frac{r}{\xi}\right)^k\right] r^{k-1} \cos(vr+\lambda k) \sin w\left(\frac{r}{\xi}\right)^k dr \Bigg| \\ = C_2 I_1(y) + C_3 I_2(y). & \end{aligned}\right.$$

Wird in $I_1(y)$, $\xi = ty$ gesetzt, so ist

$$I_1(y) = \frac{1}{y^{k-b}} \int_{\varepsilon/y}^{\vartheta} \frac{(1+t)^b}{t^{k+1}} dt \Bigg| \left(\frac{t}{\Theta_1}\right)^{k+1} \int_0^\infty \exp\left[-wr - v\left(\frac{r}{\Theta_1 y}\right)^k\right] r^{k-1} \sin(vr+\lambda k)$$

$$\times \cos w\left(\frac{r}{\Theta_1 y}\right)^k dr - \int_0^\infty \exp\left[-wr - v\left(\frac{r}{yt}\right)^k\right] r^{k-1} \sin(vr+\lambda k) \cos w\left(\frac{r}{yt}\right)^k dr \Bigg|.$$

In der Umgebung von $t = 0$ ist die für $|t| < 1$ gültige Entwicklung der Funktion $\left(\frac{t}{\Theta_1}\right)^{k+1}$, wegen

$$\lim_{t=0} \frac{t}{\Theta_1} = 1$$

von der Form

$$\left(\frac{t}{\Theta_1}\right)^{k+1} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu t^\nu.$$

Also ist

$$I_1(y) < \frac{1}{y^{k-b}} \int_{\varepsilon/y}^{\vartheta} \frac{(1+t)^b}{t^{k+1}}\, dt \Big| \int_0^{\infty} \exp\Big[-wr - v\Big(\frac{r}{\Theta_1 y}\Big)^k\Big] r^{k-1} \sin(vr+\lambda k) \cos w\Big(\frac{r}{\Theta_1 y}\Big)^k dr$$

$$- \int_0^{\infty} \exp\Big[-wr - v\Big(\frac{r}{yt}\Big)^k\Big] r^{k-1} \sin(vr+\lambda k) \cos w\Big(\frac{r}{yt}\Big)^k dr \Big|$$

$$+ \frac{1}{y^{k-b}} \int_{\varepsilon/y}^{\vartheta} \frac{(1+t)^b}{t^{k+1}} dt \Big| \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu t^\nu \int_0^{\infty} \exp\Big[-wr - v\Big(\frac{r}{\Theta_1 y}\Big)^k\Big] r^{k-1} \sin(vr+\lambda k) \cos w\Big(\frac{r}{\Theta_1 y}\Big)^k dr \Big|$$

$$= I_3(y) + I_4(y).$$

Weiter ist

$$I_3(y) < \frac{1}{y^{k-b}} \int_{\varepsilon/y}^{\vartheta} \frac{(1+t)^b}{t^{k+1}} dt \Big| \int_0^{\infty} \exp\Big[-wr - v\Big(\frac{r}{yt}\Big)^k\Big] r^{k-1} \sin(vr+\lambda k) \Big\{\exp\Big[-v\Big(\frac{r}{\Theta_1 y}\Big)^k + v\Big(\frac{r}{yt}\Big)^k\Big]$$

$$\times \cos w\Big(\frac{r}{\Theta_1 y}\Big)^k - \cos w\Big(\frac{r}{yt}\Big)^k\Big\} dr \Big|$$

$$< \frac{1}{y^{k-b}} \int_{\varepsilon/y}^{\vartheta} \frac{(1+t)^b}{t^{k+1}} dt \Big| \int_0^{\infty} \exp\Big[-wr - v\Big(\frac{r}{yt}\Big)^k\Big] r^{k-1} \sin(vr+\lambda k)$$

$$\times \Big\{\cos w\Big(\frac{r}{\Theta_1 y}\Big)^k - \cos w\Big(\frac{r}{yt}\Big)^k\Big\} dr \Big|$$

$$+ \frac{1}{y^{k-b}} \int_{\varepsilon/y}^{\vartheta} \frac{(1+t)^b}{t^{k+1}} dt \Big| \int_0^{\infty} \exp\Big[-wr - v\Big(\frac{r}{yt}\Big)^k\Big] r^{k-1} \sin(vr+\lambda k) \cos w\Big(\frac{r}{\Theta_1 y}\Big)^k$$

$$\times \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{v^\nu}{\nu!} \Big\{\Big(\frac{r}{yt}\Big)^k - \Big(\frac{r}{\Theta_1 y}\Big)^k\Big\}^\nu dr \Big|$$

$$= I_5(y) + I_6(y).$$

Dies alles zusammen ergibt

$$I_1(y) < I_4(y) + I_5(y) + I_6(y). \tag{8}$$

Ich schätze jetzt die $I_\nu(y)$, $\nu = 4, 5, 6$ ab.

Es ist

$$\begin{cases} I_4(y) < \dfrac{C_5}{y^{k-b}} \displaystyle\int_{\varepsilon/y}^{\vartheta} \frac{dt}{t^{k+1}} \sum_{\nu=1}^{\infty} t^\nu |\gamma_\nu| = \frac{C_5}{y^{k-b}} \sum_{\nu=1}^{\infty} |\gamma_\nu| \int_{\varepsilon/y}^{\vartheta} t^{\nu-k-1}\, dt \\ \quad = O(y^{b-1}),\ y \to \infty, \end{cases} \tag{9}$$

da die Reihe $\Sigma \gamma_\nu t$ für $|t| \leqq \vartheta < 1$ absolut konvergiert.

Weiter ist

$$I_5(y) < \frac{C_6}{y^{k-b}} \int_{\varepsilon/y}^{\vartheta} \frac{dt}{t^{k+1}} \int_0^{\infty} e^{-\omega r} r^{k-1} \left| \cos w \left(\frac{r}{\Theta_1 y}\right)^k - \cos w \left(\frac{r}{yt}\right)^k \right| dr.$$

Wegen $|\sin x| \leqq |x|$ ist

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega r} r^{k-1} |\cos c r^k - \cos d r^k| \, dr = 2 \int_0^{\infty} e^{-\omega r} r^{k-1} \left| \sin\left(\frac{c+d}{2}\right) r^k \sin\left(\frac{c-d}{2}\right) r^k \right| dr$$
$$< C_7 (c - d),$$

also

$$I_5(y) < \frac{C_8}{y^{2k-b}} \int_{\varepsilon/y}^{\vartheta} \left| \frac{\Theta_1^k - t^k}{(\Theta_1 t)^k} \right| \frac{dt}{t^{k+1}}$$

Nun ist

$$\left| \frac{\Theta_1^k - t^k}{(\Theta_1 t)^k} \right| = \left| \frac{\alpha_0^k \left\{1 - (1-t)^{\frac{k}{k-1}}\right\}^k - t^k (1-t)^{\frac{k}{k-1}}}{\alpha_0^k t^k \left\{1 - (1-t)^{\frac{k}{k-1}}\right\}^k} \right| \tag{10}$$
$$< C_9 t^{1-k}, \; t \to 0,$$

also

$$I_5(y) < \frac{C_{10}}{y^{2k-b}} \int_{\varepsilon/y}^{\vartheta} \frac{dt}{t^{2k}} = O(y^{b-1}), \; y \to \infty. \tag{11}$$

Ferner ist

$$I_6(y) < \frac{C_{11}}{y^{k-b}} \int_{\varepsilon/y}^{\vartheta} \frac{dt}{t^{k+1}} \int_0^{\infty} \exp\left[-wr - v\left(\frac{r}{yt}\right)^k\right] r^{k-1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{r}{y}\right)^{k\nu} \frac{v^\nu}{\nu!} \left| \frac{\Theta_1^k - t^k}{(\Theta_1 t)^k} \right|^\nu dr,$$

d. h. wegen (10), wenn noch $r = yt\xi$ gesetzt wird,

$$I_6(y) < C_{11} y^b \int_{\varepsilon/y}^{\vartheta} \frac{dt}{t} \int_0^{\infty} \exp[-wyt\xi] \xi^{k-1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \exp[-v\xi^k] \xi^{k\nu} t^\nu \frac{C_9^\nu}{\nu!} d\xi.$$

Wegen der für alle $\xi \geqq 0$ gültigen Ungleichung $\exp[-v\xi^k] \leqq \left(\frac{\nu}{v}\right)^\nu \exp[-\nu]$ und der Stirlingschen Formel für $\nu!$ folgt

$$I_6(y) < C_{12} y^b \int_{\varepsilon/y}^{\vartheta} \frac{dt}{t} \int_0^{\infty} \exp[-wyt\xi] \xi^{k-1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-1/2} C_9^\nu t^\nu \, d\xi.$$

Für genügend kleines ϑ darf hier gliedweise integriert werden und man erhält

$$I_6(y) < C_{13} y^{b-k} \sum_{\nu=1}^{\infty} C_9^\nu \nu^{-1/2} \int_{\varepsilon/y}^{\vartheta} t^{\nu-k-1} \, dt = O(y^{b-1}), \; y \to \infty. \tag{12}$$

Aus (8), (9), (11) und (12) folgt

$$I_1(y) = O(y^{b-1}),\ y \to \infty. \tag{13}$$

Auf dieselbe Weise beweist man, daß

$$I_2(y) = O(y^{b-1}),\ y \to \infty \tag{14}$$

ist. Also ergeben (7), (13) und (14) zusammen

$$H_2(y) = O(y^{b-1}),\ y \to \infty.$$

c) Sei $|\xi| \leqq \varepsilon < 1$. Dann ist

$$|\xi + \Theta_y(\xi)| = \left| \xi + \frac{\alpha_0 \left\{ y^{\frac{k}{k-1}} - (y+\xi)^{\frac{k}{k-1}} \right\}}{(y+\xi)^{\frac{1}{k-1}}} \right| < \frac{C_{14}}{y},$$

also (vgl. den Beweis zu (11))

$$\begin{aligned} |H_3(y)| &< C_1 \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} (y+\xi)^b \, d\xi \int_0^\infty \exp[-\eta^k] \, |\cos \xi\eta - \cos \Theta_y(\xi)\eta| \, d\eta \\ &< 2 C_1 \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} (y+\xi)^b \, d\xi \int_0^\infty \exp[-\eta^k] \left| \sin \frac{\xi + \Theta_y(\xi)}{2} \eta \sin \frac{\xi - \Theta_y(\xi)}{2} \eta \right| d\eta \\ &< C_{15} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} (y+\xi)^b \, |\xi + \Theta_y(\xi)| \, d\xi = O(y^{b-1}),\ y \to \infty. \end{aligned}$$

d) Wie beim Beweis zu b) schließt man, daß

$$H_4(y) = O(y^{b-1}),\ y \to \infty$$

und

e) wie beim Beweis zu a), daß

$$H_5(y) = O(y^{b-1}),\ y \to \infty.$$

Hilfssatz IV. *Aus*

$$\Psi(y) = \int_0^\infty B(u) \, du \int_0^\infty e^{-t^k} \cos(u-y)t \, dt = O(1) \tag{15}$$

und

$$B(u) = O(u) \quad \textit{bei } u \to \infty \tag{16}$$

folgt

$$\int_0^\infty B(u) \left\{ \frac{\sin(y-u)}{y-u} \right\}^4 du = O(1), \quad y - \infty.$$

Beweis. Es werde

$$p(x) = \begin{cases} 2/3 - 4x^2 + 4x^3 & \text{für } 0 \leqq x \leqq 1/2, \\ 4/3\,(1-x)^3 & \text{für } 1/2 \leqq x \leqq 1, \\ 0 & \text{für } 1 \leqq x < \infty, \end{cases}$$

$$R(x) = \int_{-4}^{+4} e^{ix\xi} e^{|\xi|^k} p(|\xi|/4) \, d\xi$$

und

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} e^{-|\xi|^k} d\xi$$

gesetzt.

Wird $R(x)$ zweimal partiell integriert, so ergibt sich wegen $p'(0) = 0$ und $p(1) = 0$

$$\frac{x^2}{2} R(x) = -\int_0^4 \{e^{\xi^k} p(\xi/4)\}'' \cos x\xi \, d\xi.$$

Für $k \geqq 2$ ist $\{\exp[\xi^k] p(\xi/4)\}'''$ in $(0, 4)$ von beschränkter Schwankung. Also folgt auf Grund eines klassischen Satzes über die Größenordnung Fourierscher Integrale [6]), daß

$$\frac{x^2}{2} R(x) = O\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to \infty.$$

Ist aber $1 < k < 2$, so existiert eine Funktion $\Phi(\xi)$ von beschränkter Schwankung derart, daß

$$\{e^{\xi^k} p(\xi/4)\}'' = \frac{\Phi(\xi)}{\xi^{2-k}}$$

und auf Grund folgenden Satzes von Darboux: *Für jede Funktion $\Phi(\xi)$ von beschränkter Schwankung und $0 < \mu < 1$ ist*

$$\int_0^\infty \frac{\Phi(\xi)}{\xi^\mu} \cos \xi x \, d\xi = O\left(\frac{1}{x^\mu}\right) \quad \textit{bei } x \to \infty \text{ [7])},$$

folgt

$$\frac{x^2}{2} R(x) = O\left(\frac{1}{x^{2-k}}\right), \quad x \to \infty, \quad 1 < k < 2.$$

Also existiert für jedes $k > 1$ ein $\varepsilon = \varepsilon(k) > 0$ derart, daß

$$|R(x)| < \frac{\text{Const.}}{1 + x^{2+\varepsilon}}. \tag{17}$$

$R(x)$ ist absolut integrierbar über $(-\infty, +\infty)$. Wegen (4) ist auch $g(x)$ im selben Intervall absolut integrierbar. Also gelten für $R(x)$ und $g(x)$ die üblichen Transformations- und Faltungsregeln der Fourierschen Integrale. Daraus folgt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iat} g(t) \, dt = 2\pi e^{-|a|^k},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iat} R(t) \, dt = \begin{cases} 2\pi e^{|a|^k} p(|a|/4) & \text{für } |a| \leqq 4, \\ 0 & \text{für } |a| > 4, \end{cases}$$

---

[6]) Vgl. S. Bochner, Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Leipzig 1932, S. 9.

[7]) Vgl. S. Bochner, l. c. [6]), S. 10.

also

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)R(x-\xi)\,d\xi = \dfrac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iax}\,da\Big\{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iat}g(t)\,dt\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iat}R(t)\,dt\Big\} \\ \qquad = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax}\,p(|a|/4)\,da \\ \qquad = 4\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^4. \end{cases}$$

Nun bilden wir das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\xi)\,R(x-\xi)\,d\xi.$$

Es ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\xi)\,R(x-\xi)\,d\xi = \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} + \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{\infty} = I_1 + I_2 + I_3.$$

Wegen (15) sieht man ganz leicht ein, daß

$$I_\nu = O(1), \quad x \to \infty, \quad \nu = 1, 2, 3,$$

also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\xi)\,R(x-\xi)\,d\xi = O(1),\ x \to \infty.$$

Wird in diesem Ausdruck für $\Psi(\xi)$ die Formel (15) eingesetzt und im resultierenden wiederholten Integral die Folge der Integration vertauscht (was sich, wie wir zeigen werden, rechtfertigen läßt), so entsteht

$$\int_0^{\infty} B(u)\,du \int_{-\infty}^{+\infty} R(x-\xi)\,g(u-\xi)\,d\xi = O(1), \quad x \to \infty,$$

d. h. wegen (18)

$$\int_0^{\infty} B(u)\left\{\frac{\sin(u-x)}{u-x}\right\}^4 du = O(1). \quad x \to \infty.$$

Nun zeigen wir noch, daß die Vertauschung der Integration erlaubt ist. Dies geschieht auf Grund folgenden Satzes: *Es ist*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,\xi)\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,\xi)\,d\xi,$$

vorausgesetzt, daß die beiden Integrale

$$(19)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(u,\xi)|\,du \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(u,\xi)|\,d\xi$$

und wenigstens eines der beiden Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} |f(u,\xi)|\, d\xi, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(u,\xi)|\, du \tag{20}$$

konvergieren[8]).

Es werde

$$f_x(u,\xi) = f(u,\xi) = B(u) \int_0^{\infty} e^{-t^k} \cos(u-\xi)\, t\, dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{|t|^k + i(x-\xi)t} p(|t|/4)\, dt$$

gesetzt. Wegen (4), (7) und (16) ist

$$|f(u,\xi)| < \frac{C_{16}\, u}{(1+|u-\xi|^{k+1})\,(1+|x-\xi|^{2+\varepsilon})},$$

so daß (19) erfüllt ist, und wegen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(u,\xi)|\, du < \frac{C_{16}}{1+|x-\xi|^{2+\varepsilon}} \int_0^{\infty} \frac{u}{1+|u-\xi|^{k+1}}\, du < \frac{C_{17}\,\xi}{1+|x-\xi|^{2+\varepsilon}}$$

ist auch (20) erfüllt, womit die Behauptung bewiesen ist.

Hilfssatz V. *Aus*

$$\Psi(y) = \int_0^{\infty} B(u)\, du \int_0^{\infty} e^{-t^k} \cos(u-y)\, t\, dt = o(1), \quad y \to \infty \tag{21}$$

und

$$B(u) = O(1), \quad u \to \infty \tag{22}$$

folgt

$$\mu \int_0^{\infty} B(u) \left\{\frac{\sin \mu(y-u)}{\mu(y-u)}\right\}^2 du = o(1) \quad \textit{bei } y \to \infty \textit{ für jedes } \mu > 0.$$

Beweis. Sei

$$R_1(x) = \int_{-\mu}^{+\mu} e^{ix\xi} e^{|\xi|^k} (1 - |\xi|/\mu)\, d\xi$$

und

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} e^{-|\xi|^k}\, d\xi.$$

Wegen

$$\frac{x^2}{2} R_1(x) = -\int_0^{u} \{e^{\xi^k}(1 - \xi/\mu)\}'' \cos x\xi\, d\xi = O(1), \quad x \to \infty$$

---

[8]) Vgl. T. J. I'A. Bromwich, An introduction to the theory of infinite series London 1926, S. 500.

ist

$$R_1(x) < \frac{\text{Const.}}{1+x^2},$$

also wegen (21)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\xi) R(x-\xi)\, d\xi = O(1) \quad \text{bei } x \to \infty.$$

Wird hier für $\Psi(\xi)$ die Formel (21) eingesetzt und im gewonnenen wiederholten Integral die Reihenfolge der Integration vertauscht (was wegen (4) und (22) erlaubt ist), so entsteht

$$\int_0^{\infty} B(u)\, du \int_{-\infty}^{+\infty} R_1(x-\xi)\, g(u-\xi)\, d\xi = o(1),\ x \to \infty.$$

Hieraus folgt wegen

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)\, R_1(x-\xi)\, d\xi = \mu\left(\frac{\sin \mu x}{\mu x}\right)^2$$

die Behauptung.

Hilfssatz VI. *Aus*

$$\int_0^{\infty} B(u) \left\{\frac{\sin(y-u)}{y-u}\right\}^4 du = O(1),\ y \to \infty$$

und

(23) $$B(u') - B(u) > -w_4 \quad \textit{für } u \leqq u' \leqq u+1$$

folgt

$$B(u) = O(1),\ u \to \infty.$$

Hilfssatz VII. *Aus*

$$\mu \int_0^{\infty} B(u) \left\{\frac{\sin \mu(y-u)}{\mu(y-u)}\right\}^2 du = o(1),\ y \to \infty,$$

$$B(u) = O(1),\ u \to \infty$$

und

(24) $$\liminf_{u=\infty} \operatorname*{Min}_{u \leqq u' \leqq u+\varepsilon} \{B(u') - B(u)\} = -w(\varepsilon) \to 0,\ 0 < \varepsilon \to 0$$

folgt

$$\limsup_{u=\infty} |B(u)| < W(\mu) \to 0 \quad \textit{bei } \mu \to \infty.$$

Beweis. Bekannt[9]).

Beweis der Sätze A und B.

a) Ich beweise zunächst, daß aus den Voraussetzungen des Satzes A bzw. B, wenn

(25) $$H(y) = \lim_{\delta=0} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin y t}{t} J(\delta+s)\, dt,\ s = |t|^k + iat$$

[9]) Vgl. A. E. Ingham, l. c.[3]).

gesetzt wird, die für den Beweis der Sätze A und B grundlegende Formel

$$(26)\quad H(y\alpha_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty A(u)\,du \int_0^\infty e^{-t^k u}\cos\alpha_0(y-u)\,t\,dt + o(1),\quad y\to\infty$$

folgt.

Aus (2) und (A)[10]) folgt nach einem bekannten Satz Tauberscher Art

$$(27)\qquad A(u) = O\left(u^{\frac{k-1}{k}}\right),\ u\to\infty.$$

Folglich, wenn o. B. d. A., $A(u) = 0$ für $0 \leqq u \leqq 1$ gesetzt wird,

$$(28)\quad \left|J(|t|^k + i\alpha_0 t)\right| < C_{18}|t|^k \int_1^\infty e^{-|t|^k u}\,u^{k'/k}\,du = O\left(\frac{1}{t^{k'}}\right), t\to\infty, k' \geqq k-1.$$

O. B. d. A. liege $s = |t|^k + i\alpha_0 t$, $\alpha_0 = \frac{k-1}{k}$ in D_k und das in der Voraussetzung II vorkommende a sei gleich α_0. Dann ist wegen (A) und (28)

$$H(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin y t}{t}\,J(s)\,dt,$$

denn $\lim_{\delta=\infty} J(\delta + s)$ existiert überall außer eventuell im Punkte $s = 0$ und ist gleich $J(s)$.

Wird

$$H^*(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin y t}{t}\,\frac{i\alpha_0 t}{|t|^k + i\alpha_0 t}\,J(s)\,dt$$

gesetzt, so ist wegen (A), (28) und

$$\frac{i\alpha_0 t}{|t|^k + i\alpha_0 t} - 1 = O(t^{k-1}),\ t\to 0$$

nach einem bekannten Satz über Dirichletsche Integrale[11])

$$(29)\quad H^*(y) - H(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin y t}{t}\left\{\frac{i\alpha_0 t}{|t|^k + i\alpha_0 t} - 1\right\} J(|t|^k + i\alpha_0 t)\,dt$$
$$= o(1),\ y\to\infty.$$

---

[10]) Gebraucht wird nur $\delta\int_0^\infty e^{-\delta u}A(u)\,du = O\left(\sigma^{\frac{1-k}{k}}\right)$ bei $\sigma\to 0$.

[11]) Vgl. S. Bochner, l. c.[6]), S. 23.

Nun ist

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin y\,\alpha_0 t}{t}\,\frac{i\,\alpha_0 t}{\delta+|t|^k+i\,\alpha_0 t}\,J(\delta+|t|^k+i\,\alpha_0 t)\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\delta u}A(u)\,du\int_0^\infty e^{-t^k u}\{\cos\alpha_0(y-u)t-\cos\alpha_0(y+u)t\}\,dt.$$

Da der Grenzübergang $\delta\to 0$ links und wegen (27) auch rechts durchführbar ist, so folgt

$$H^*(y)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty A(u)\,du\int_0^\infty e^{-t^k u}\cos\alpha_0(y-u)t\,dt-K(y). \tag{30}$$

Wegen (4) und (27) ist

$$\left\{\begin{aligned}|K(y)|&=\frac{1}{\pi}\left|\int_0^\infty A(u)\,\frac{du}{u^{1/k}}\int_0^\infty e^{-t^k}\cos\alpha_0\left(\frac{y+u}{u^{1/k}}\right)dt\right|\\&<C_{19}\int_0^\infty u^{\frac{k-1}{k}-\frac{1}{k}}\,\frac{du}{\left|\frac{y+u}{u^{1/k}}\right|^{k+1}}=o(1),\ y\to\infty.\end{aligned}\right. \tag{31}$$

Aus (29), (30) und (31) folgt schließlich die Behauptung.

Ich führe nun folgende Bezeichnungen ein:

Es ist

$$\Psi_1\left(x^{\frac{k-1}{k}}\right)=\frac{k-1}{k}\int_0^\infty A(u)\,du\int_0^\infty e^{-t^k u}\cos\alpha_0(x-u)t\,dt. \tag{32}$$

Also wenn

$$x=y^{\frac{k}{k-1}},$$

$$t=\eta/u^{\frac{1}{k}},$$

$$u=(y+\xi)^{\frac{k}{k-1}}$$

und

$$A\left(u^{\frac{k}{k-1}}\right)=B(u) \tag{33}$$

gesetzt wird,

$$\Psi_1(y)=\int_{-y}^\infty B(y+\xi)\,d\xi\int_0^\infty e^{-\eta^k}\cos\left[\alpha_0\left\{y^{\frac{k}{k-1}}-(y+\xi)^{\frac{k}{k-1}}\right\}(y+\xi)^{\frac{1}{1-k}}\eta\right]d\eta.$$

Ferner

$$\Psi(y) = \int_{-y}^{\infty} B(y+\xi)\,d\xi \int_{0}^{\infty} e^{-\eta^k}\cos\xi\eta\,d\eta. \tag{34}$$

Also

$$\Psi(y) - \Psi_1(y) = \int_{-y}^{\infty} \varphi(y,\xi)\,d\xi, \tag{35}$$

wo $\varphi(y,\xi)$ dieselbe Funktion bezeichnet wie in Hilfssatz III.

b) Wegen (26), (32) und (35) ist

$$\frac{1}{\pi}\Psi(y) = \frac{k-1}{k} H\left(\alpha_0\, y^{\frac{k}{k-1}}\right) + \frac{1}{\pi}\int_{-y}^{\infty} \varphi(y,\xi)\,d\xi + o(1),\ y\to\infty. \tag{36}$$

Beweis des Satzes B. Wegen (C), (27) und (36) ist nach Hilfssatz III (mit $b=1$)

$$\Psi(y) = O(1),\quad y\to\infty.$$

Also nach Hilfssatz IV:

$$\int_{0}^{\infty} B(u)\left\{\frac{\sin(y-u)}{y-u}\right\}^4 du = O(1), y\to\infty.$$

Die durch (33) definierte Funktion $B(u)$ genügt wegen $(C_k - O)$ der Bedingung (23). Nach Hilfssatz VI ist also

$$B(u) = O(1),\quad u\to\infty, \tag{37}$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Beweis des Satzes A. O. B. d. A. sei $A=0$. Wegen (B), (36) und (37) ist nach Hilfssatz III (mit $b=0$)

$$\Psi(y) = o(1),\quad y\to\infty. \tag{38}$$

Also wegen (37) nach Hilfssatz V:

$$\mu\int_{0}^{\infty} B(u)\left\{\frac{\sin\mu(y-u)}{\mu(y-u)}\right\}^2 du = o(1),\ y\to\infty.$$

Wegen $(C_k - o)$ genügt $B(u)$ der Bedingung (24). Nach Hilfssatz VII ist also

$$B(u) = o(1),\quad u\to\infty,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

(Eingegangen am 24. Januar 1940.)

Invariante Charakterisierung von Kurvennetzen.

Von

Karl Heinrich Weise in Jena.

Einleitung.

Die geometrischen Eigenschaften von Kurvennetzen im zweidimensionalen Riemannschen Raum R_2 können dadurch untersucht werden, daß man den R_2 auf das Netz als Parameternetz bezieht. Maß- und Krümmungsverhältnisse des Netzes lassen sich dann aus dem so spezialisierten Linienelement des Raumes ermitteln. Wenn von dem Netz nur die Tangentenrichtungsfelder in Gestalt einer Differentialgleichung bekannt sind, so ist diese Methode im allgemeinen nicht anwendbar und es entsteht die Aufgabe, aus den Koeffizienten der Differentialgleichung auf die Eigenschaften des Netzes zu schließen. Läßt man dabei das Parametersystem des R_2 bis auf gewisse Differenzierbarkeitseigenschaften willkürlich, so wird es sich darum handeln, *parameterinvariante* Größen aus den erwähnten Koeffizienten und den Komponenten des metrischen Fundamentaltensors des R_2 zu bilden und ihre geometrische Bedeutung für die Netze zu ermitteln. Zu einem systematischen Aufbau gelangt man nun auf folgende Weise:

Der Differentialgleichung des Netzes wird mit Hilfe des metrischen Tensors ein Vektorfeld $\mathfrak{v}$ zugeordnet. Da der „Netzvektor" $\mathfrak{v}$ jetzt zum Träger der Netzeigenschaften wird, hat man in den Ableitungsgleichungen dieses Feldes und in dem Vergleich mit den Tangentenvektoren an die Netzlinien und deren Ableitungen die Grundlage für die gesuchten invarianten bzw. tensoriellen Größen[1]). Durch die bei dieser Methode häufig auftretende Rotationsbildung gelangt man zwangsläufig zu Integralsätzen im Netz. Werden Netze mit geforderten Eigenschaften gesucht, so kann das diesen Eigenschaften zugeordnete System von invarianten Größen unter Umständen nur für eine spezielle Metrik widerspruchsfrei sein, und man erhält somit eine invariante Charakterisierung derjenigen Riemannschen Räume, die Netze der geforderten Art tragen können; als Beispiel hierzu die Liouvilleschen Netze im § 6.

Naturgemäß ergeben sich viele Zusammenhänge mit bekannten Netzeigenschaften, die hier nicht alle aufgezählt werden können. Doch hoffe ich, daß man aus den ausgewählten Fällen die Fruchtbarkeit dieser Methode ersehen kann.

[1]) Die Grundgedanken dieser Arbeit habe ich in einem Vortrag auf der Mathematiker-Tagung in Baden-Baden (1938) dargestellt.

Die Beschränkung auf Riemannsche Räume erfolgte, um zunächst einmal diejenigen invarianten Bildungen und damit geometrischen Eigenschaften zu erfassen, die durch Differentialgleichung und Metrik *allein* bestimmt sind. Bei der Einbettung in den euklidischen Raum kommt noch die zweite Fundamentalform, die Einbettungsform, hinzu. Diese ohne weiteres durchführbare Erweiterung des Kalküls soll in einer späteren Arbeit angeschlossen werden.

Die Stellung dieser Abhandlung innerhalb der Netzliteratur ist durch das Gesagte schon gekennzeichnet. Im Gegensatz zu den zahlreichen Untersuchungen über spezielle Netze handelt es sich hier um einen Beitrag zur allgemeinen Netz-Invariantentheorie. Dabei wird durch die Verwendung des obenerwähnten Vektorfeldes an Stelle des Netztensors eine einfache Darstellung ermöglicht.

§ 1.

Kurvennetz und Vektorfeld.

Zugrunde liegt ein zweidimensionaler Riemannscher Raum R_2, dessen Punkte auf die Parameter u^α, $\alpha = 1, 2$ bezogen sind und dessen Metrik durch das Quadrat des Linienelements gegeben ist:

$$(1,1) \qquad ds^2 = g_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta\ ^{2}).$$

Eine quadratische Differentialgleichung

$$(1,2) \qquad \varphi_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta = 0$$

definiert in jedem Punkt des Bereiches, in welchem die Diskriminante von Null verschieden ist, ein Paar von Richtungen. Wir wollen uns nun im folgenden auf ein Gebiet G beschränken, in dem $|\varphi_{\alpha\beta}| \neq 0$ ist und die Ortsfunktionen $g_{\alpha\beta}(u^1, u^2)$, $\varphi_{\alpha\beta}(u^1, u^2)$ genügend oft stetig differenzierbar sind[3]).

Die Integration dieser Richtungsfelder in G ergibt ein Kurvennetz. Man nennt deshalb $\varphi_{\alpha\beta}$ die Komponenten des *Netztensors*; dieser ist durch das Netz bis auf einen skalaren Faktor eindeutig bestimmt. Die zu wünschende Eineindeutigkeit der Beziehungen läßt sich in naheliegender Weise durch *Normierung* des Netztensors erreichen, z. B. durch $|\varphi_{\alpha\beta}| = -|g_{\alpha\beta}|$. Auf folgende Weise läßt sich indessen die für den Kalkül etwas unbequeme Normierung vermeiden:

Ist λ eine Wurzel der Gleichung $|\varphi_{\alpha\beta} - \lambda g_{\alpha\beta}| = 0$, so ist $(\varphi_{\alpha\beta} - \lambda g_{\alpha\beta})\, du^\alpha du^\beta$ das Quadrat einer linearen Differentialform und damit hat das Gleichungssystem

$$(1,3) \qquad \varphi_{\alpha\beta} = \lambda (g_{\alpha\beta} - v_\alpha v_\beta)$$

[2]) Über gleiche Indizes verschiedener Stellung ist zu summieren.

[3]) Die genauen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen sind für die einzelnen Abschnitte verschieden.

eine bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmte Lösung v_α. Der Vektor $\mathfrak{v}$ mit den kovarianten Komponenten v_α hängt offenbar nicht von der Normierung des Netztensors ab. Umgekehrt ist durch Vorgabe von v_α der Netztensor $g_{\alpha\beta} - v_\alpha v_\beta = \frac{1}{\lambda}\varphi_{\alpha\beta}$ und damit das Netz eindeutig bestimmt. Wegen $|\varphi_{\alpha\beta}| \neq 0$ ist $\lambda = 0$ ausgeschlossen. Zwei gleiche charakteristische Wurzeln haben $\varphi_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta}$ zur Folge. Wegen Gleichung (1, 2) handelt es sich hierbei um ein Netz aus Minimalkurven: $g_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta = 0$. Für dieses Netz ist $\mathfrak{v} = 0$. Zwei verschiedene charakteristische Wurzeln $\lambda \neq \mu$ führen bis auf das Vorzeichen eindeutig zu den Vektoren $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ mit den kovarianten Komponenten v_α, w_α und den kontravarianten Komponenten $v^\alpha = g^{\alpha\beta}v_\beta$, $w^\alpha = g^{\alpha\beta}w_\beta$[4]). Aus $\varphi_{\alpha\beta} = \lambda(g_{\alpha\beta} - v_\alpha v_\beta) = \mu(g_{\alpha\beta} - w_\alpha w_\beta)$ folgt durch Multiplikation mit $v^\alpha w^\beta$ und Summation:

$$v^\alpha w_\alpha[\lambda(1 - \mathfrak{v}^2)] = v^\alpha w_\alpha[\mu(1 - \mathfrak{w}^2)]; \quad \mathfrak{v}^2 = g_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta \text{ usw.}$$

Ferner gilt nach (1, 3): $|\varphi_{\alpha\beta}| = \lambda^2|g_{\alpha\beta}|(1 - \mathfrak{v}^2) = \mu^2|g_{\alpha\beta}|(1 - \mathfrak{w}^2)$. In G ist somit $\mathfrak{v}^2 \neq 1$, $\mathfrak{w}^2 \neq 1$ und oben eingesetzt $v^\alpha w_\alpha\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = 0$, d. h. $v^\alpha w_\alpha = \mathfrak{v} \circ \mathfrak{w} = 0$[5]). Die Vektoren $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ stehen aufeinander senkrecht. Multiplikation der Ausgangsgleichung mit v^α bzw. w^α führt zu:

$$\lambda v_\alpha(1 - \mathfrak{v}^2) = \mu v_\alpha; \quad \lambda w_\alpha = \mu(1 - \mathfrak{w}^2)w_\alpha$$

oder

$$\mathfrak{v}^2 = \frac{\lambda - \mu}{\lambda}; \qquad \mathfrak{w}^2 = \frac{\mu - \lambda}{\mu}; \qquad (\mathfrak{v}^2 - 1)(\mathfrak{w}^2 - 1) = 1.$$

Die Längen dieser Eigenvektoren $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ stehen in einfacher Beziehung zum Netzwinkel ω. Aus (1, 2) berechnet sich der Winkel zwischen dem Richtungspaar zu

$$\operatorname{ctg}\omega = \pm\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta}\sqrt{-\frac{|g_{\alpha\beta}|}{|\varphi_{\alpha\beta}|}}.$$

Unter Verwendung von (1, 3) und den daraus gezogenen Folgerungen erhält man nach leichter Zwischenrechnung:

$$\mathfrak{v}^2 = \frac{2}{1 \pm \cos\omega}, \qquad \mathfrak{w}^2 = \frac{2}{1 \mp \cos\omega}.$$

Da weder der Netzwinkel ω noch die Reihenfolge der Wurzeln λ, μ und damit der Vektoren $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ eindeutig festgelegt ist, wollen wir folgende Zuordnung treffen:

$$(1,41) \qquad \mathfrak{v}^2 = \frac{2}{1 + \cos\omega} = \frac{1}{\cos^2\frac{\omega}{2}}; \qquad \mathfrak{w}^2 = \frac{2}{1 - \cos\omega} = \frac{1}{\sin^2\frac{\omega}{2}}.$$

---

[4]) Die Matrix $(g^{\alpha\beta})$ ist zu $(g_{\alpha\beta})$ komplementär, d. h. die transponierte der reziproken Matrix.

[5]) Der Kreis $\circ$ kennzeichnet das skalare Produkt:

$$\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b} = g_{\alpha\beta}a^\alpha b^\beta = a_\alpha b^\alpha.$$

Mit Hilfe des Tensors $\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta^{12}_{\alpha\beta}\sqrt{|g_{\lambda\mu}|}$, [$\delta^{12}_{12} = -\delta^{12}_{21} = 1$, $\delta^{12}_{11} = \delta^{12}_{22} = 0$, verallgem. Kronecker-Symbol] läßt sich $\mathfrak{w}$ als zu $\mathfrak{v}$ orthogonal bequem durch $\mathfrak{v}$ ausdrücken und wir wollen das Vorzeichen des Vektors $\mathfrak{w}$ im folgenden stets so wählen, daß gilt:

$$\begin{aligned} w_\alpha &= -\operatorname{ctg}\frac{\omega}{2}\varepsilon_\alpha^{\cdot\lambda} v_\lambda \\ v_\alpha &= +\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\varepsilon_\alpha^{\cdot\lambda} w_\lambda \end{aligned} \qquad \text{mit } \varepsilon_\alpha^{\cdot\lambda} = \varepsilon_{\alpha\beta} g^{\lambda\mu}. \tag{1,42}$$

Ergebnis. Einem gegebenen Vektorfeld $\mathfrak{v}$ mit $|\mathfrak{v}| \neq 1$ ist eindeutig ein Netz zugeordnet: $(g_{\alpha\beta} - v_\alpha v_\beta)\,du^\alpha\,du^\beta = 0$. Ist für ein gegebenes Netz $\varphi_{\alpha\beta}du^\alpha\,du^\beta = 0$, welches nicht aus Minimalkurven besteht, festgelegt, was man unter dem Netzwinkel ω zu verstehen hat, so ist ihm bis auf das Vorzeichen eindeutig ein Vektorfeld $\mathfrak{v}$ zugeordnet. Die Geometrie des Netzes ist gleichwertig mit der Geometrie des Vektorfeldes $\mathfrak{v}$. Der zweite Eigenvektor des Netzes $\mathfrak{w}$ ist nach (1, 42) durch $\mathfrak{v}$ eindeutig bestimmt. Wir wollen daher $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ *Netzvektoren* nennen.

Mit Hilfe der Netzvektoren läßt sich eine übersichtliche Darstellung der Netzrichtungen erreichen. Es ist

$$(g_{\alpha\beta} - v_\alpha v_\beta)\left(\frac{v^\alpha}{\mathfrak{v}^2} \mp \frac{w^\alpha}{\mathfrak{w}^2}\right)\left(\frac{v^\beta}{\mathfrak{v}^2} \mp \frac{w^\beta}{\mathfrak{w}^2}\right) = 0,$$

d. h. die Vektoren $\frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}^2} \mp \frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{w}^2}$ gehören dem durch die Differentialgleichung des Netzes gegebenen Richtungsfeld an. Wir wollen nun stets die Netzkurven so numerieren und orientieren, daß für ihre in positiver Richtung gelegenen Tangenteneinheitsvektoren gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}^{(1)} &= \frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}^2} - \frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{w}^2}; & \mathfrak{t}^{(1)} \circ \mathfrak{t}^{(1)} &= 1, \\ \mathfrak{t}^{(2)} &= \frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}^2} + \frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{w}^2}; & \mathfrak{t}^{(1)} \circ \mathfrak{t}^{(2)} &= \cos\omega, \\ & & \mathfrak{t}^{(2)} \circ \mathfrak{t}^{(2)} &= 1. \end{aligned} \tag{1,5}$$ [5]

Aus $\mathfrak{t}^{(1)} \circ \mathfrak{v} = \mathfrak{t}^{(2)} \circ \mathfrak{v}$ und $\mathfrak{t}^{(1)} \circ \mathfrak{w} = -\mathfrak{t}^{(2)} \circ \mathfrak{w}$ folgt, daß $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ die Netzrichtungen halbieren.

§ 2.

Die Krümmungsvektoren des Netzes.

Da das Netz durch das Vektorfeld $\mathfrak{v}$ vollständig beschrieben wird, hat man in den Koeffizienten der Ableitungsgleichungen von $\mathfrak{v}$ die Grundlage für ein Invariantensystem des Netzes. Die Änderung des Vektors $\mathfrak{v}$ muß sich durch die Netzvektoren $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ darstellen lassen. Dabei verwenden wir für $\mathfrak{w}$ Gleichung (1, 42) und erhalten:

$$v_{\alpha,\beta} = c_\beta v_\alpha - k_\beta \varepsilon_\alpha^{\cdot\lambda} v_\lambda, \tag{2,1}$$

wenn man ctg $\frac{\omega}{2}$ in den Koeffizienten k_β aufnimmt und durch das Komma wie üblich die kovariante Differentiation abkürzend bezeichnet. Aus (2, 1) folgt $v_{\alpha,\beta} v^\alpha = c_\beta \mathfrak{v}^2$ und wegen $\mathfrak{v}^2{}_{,\beta} = 2\, v_{\alpha,\beta} v^\alpha$

$$c_\beta = \frac{\partial \lg \sqrt{\mathfrak{v}^2}}{\partial u^\beta} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \frac{\partial \omega}{\partial u^\beta}. \tag{2, 21}$$

Durch Multiplikation mit $\varepsilon^{\alpha\mu} v_\mu$, ($\varepsilon^{\alpha\mu} = \varepsilon_\lambda{}^\mu g^{\alpha\lambda}$) und Addition folgt aus (2, 1

$$\varepsilon^{\alpha\mu} v_{\alpha,\beta} v_\mu = - k_\beta \varepsilon_\alpha{}^\lambda \varepsilon^{\alpha\mu} v_\mu v_\lambda$$

oder wegen $\varepsilon_\alpha{}^\lambda \varepsilon^{\alpha\mu} = g^{\lambda\mu}$

$$k_\beta = \frac{1}{\mathfrak{v}^2} \varepsilon^{\lambda\mu} v_\lambda v_{\mu,\beta} = \frac{\begin{vmatrix} v_1 & v_{1,\beta} \\ v_2 & v_{2,\beta} \end{vmatrix}}{\mathfrak{v}^2 \sqrt{g}} \quad \text{mit} \quad g = |g_{\alpha\beta}|. \tag{2, 22}$$

Wir fragen jetzt nach der geometrischen Bedeutung von k_β. Sei allgemein t ein Feld von Einheitsvektoren $\mathfrak{t}^2 = 1$ mit den Komponenten t^α und $\bar{\mathfrak{t}}$ als zu t orthogonaler Einheitsvektor eindeutig durch $g_{\alpha\beta} t^\alpha \bar{t}^\beta = 0$, $\varepsilon_{\alpha\beta} t^\alpha \bar{t}^\beta = 1$ festgelegt, dann gilt:

$$\frac{\partial \mathfrak{t}}{\partial u^\alpha} = f_\alpha \bar{\mathfrak{t}}.$$

In üblicher Verwendung des Krümmungsbegriffes wollen wir f_α die (kovarianten) Komponenten des *Feldkrümmungsvektors* $\mathfrak{f}$ nennen. Die „Feldkrümmung" in Richtung des Einheitsvektors e mit den Komponenten e^α wird dann durch $\mathfrak{f} \circ \mathfrak{e} = f_\alpha e^\alpha$ gegeben. Es ist nun nach (1, 5):

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}^{(\varrho)} &= \frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}^2} \mp \frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{w}^2} = \cos^2 \frac{\omega}{2} \mathfrak{v} \mp \sin^2 \frac{\omega}{2} \mathfrak{w}, \\ \bar{\mathfrak{t}}^{(\varrho)} &= \frac{\pm \mathfrak{v} + \mathfrak{w}}{+ \sqrt{\mathfrak{v}^2 \mathfrak{w}^2}} = \sin \frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega}{2} (\pm \mathfrak{v} + \mathfrak{w}). \end{aligned} \qquad \varrho = 1,2$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} f_\alpha^{(\varrho)} &= \frac{\partial \mathfrak{t}^{(\varrho)}}{\partial u^\alpha} \circ \bar{\mathfrak{t}}^{(\varrho)} \\ &= \mp \frac{\partial \omega}{\partial u^\alpha} + \sin \frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega}{2} (\pm \mathfrak{v} + \mathfrak{w}) \circ \left(\cos^2 \frac{\omega}{2} \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial u^\alpha} \mp \sin^2 \frac{\omega}{2} \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial u^\alpha} \right). \end{aligned}$$

Aus (2, 1) erhält man

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial u^\alpha} \circ \mathfrak{w} = - \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial u^\alpha} \circ \mathfrak{v} = g^{\lambda\mu} v_{\lambda,\alpha} w_\mu = \frac{1}{\sin \frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega}{2}} k_\alpha,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial u^\alpha} \circ \mathfrak{v} = \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{2 \cos^3 \frac{\omega}{2}} \frac{\partial \omega}{\partial u^\alpha}; \qquad \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial u^\alpha} \circ \mathfrak{w} = - \frac{\cos \frac{\omega}{2}}{2 \sin^3 \frac{\omega}{2}} \frac{\partial \omega}{\partial u^\alpha}$$

und eingesetzt ergibt sich:

$$(2,3) \qquad f_\alpha^{(\varrho)} = \mp \frac{1}{2} \frac{\partial \omega}{\partial u^\alpha} + k_\alpha \quad \text{oder} \quad \mathfrak{f}^{(\varrho)} = \mp \frac{1}{2} \operatorname{grad} \omega + \mathfrak{k}.$$

(Das obere Vorzeichen ist für $\varrho = 1$, das untere für $\varrho = 2$ gültig). Die im Netz vorkommenden Richtungen werden durch die beiden Felder der Tangenteneinheitsvektoren beschrieben. Die auftretenden Änderungen dieser Richtungen beim Fortschreiten längs der Koordinatenlinien und damit auch längs einer beliebigen Kurve werden durch die Feldkrümmungsvektoren der Tangentenvektorfelder erfaßt. Gleichung (2, 3) zeigt, wie sich diese aus der Änderung des Netzwinkels und dem Vektor $\mathfrak{k}$ mit den kovarianten Komponenten k_α zusammensetzen, so daß dieser in gewisser Weise die Krümmungsverhältnisse im Netz beschreibt, nach Abzug der durch variablen Netzwinkel bedingten Richtungsänderung. Diese Eigenschaft rechtfertigt die Bezeichnung *Netzkrümmungsvektor* für $\mathfrak{k}$. Von besonderem geometrischen Interesse sind nun die Werte der Feldkrümmungen in den Netzrichtungen. Wenn die Krümmung des Feldes $\mathfrak{t}^{(\varrho)}$ in Richtung der ϱ-ten Netzkurven verschwindet, $\mathfrak{f}^{(\varrho)} \circ \mathfrak{t}^{(\varrho)} = 0$, so bilden diese Tangentenvektoren hinsichtlich ihrer Trägerkurven ein Parallelfeld; die betreffende Netzkurvenschar besteht also aus geodätischen Linien. Die Feldkrümmung

$$(2,41) \qquad g^{(\varrho)} = \mathfrak{f}^{(\varrho)} \circ \mathfrak{t}^{(\varrho)}$$

pflegt man daher als Maß der Abweichung „geodätische Krümmung" der Scharkurven (ϱ) zu nennen. Bei einem Tchebycheffnetz sind die Tangentenvektorfelder $\mathfrak{t}^{(\varrho)}$ jeweils bezüglich der anderen, $(3 - \varrho)$-ten Netzkurvenschar parallel. Ich möchte daher die Feldkrümmungen

$$(2,42) \qquad h^{(\varrho)} = \mathfrak{f}^{(3-\varrho)} \circ \mathfrak{t}^{(\varrho)}$$

als Maß der Abweichung von dieser Eigenschaft mit „Tchebycheff-Krümmungen" des Netzes bezeichnen.

Wir wollen $g^{(\varrho)}$, $h^{(\varrho)}$ unmittelbar durch die Netzvektoren $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ ausdrücken. Es ist nach (1, 5), (2, 3), (2, 4):

$$g^{(\varrho)} = \left(\mp \frac{1}{2} \frac{\partial \omega}{\partial u^\alpha} + k_\alpha \right) \left(\cos^2 \frac{\omega}{2} v^\alpha \mp \sin^2 \frac{\omega}{2} w^\alpha \right),$$

ferner nach (2, 22):

$$k_\alpha v^\alpha = \frac{1}{\mathfrak{v}^2 \sqrt{g}} (v_1 v_{2,\alpha} v^\alpha - v_2 v_{1,\alpha} v^\alpha)$$

und wegen $v^\alpha v_{\alpha,\lambda} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathfrak{v}^2}{\partial u^\lambda}$:

$$k_\alpha v^\alpha = \frac{1}{\mathfrak{v}^2 \sqrt{g}} \left[\frac{v_1}{2} \frac{\partial \mathfrak{v}^2}{\partial u^2} - \frac{v_2}{2} \frac{\partial \mathfrak{v}^2}{\partial u^1} + v_\alpha v^\alpha (v_{2,1} - v_{1,2}) \right].$$

Damit wird unter Verwendung von (1, 4):

$$\frac{1}{2}(g^{(1)} + g^{(2)}) = \cos^2\frac{\omega}{2}\, k_\alpha v^\alpha + \frac{1}{2}\sin^2\frac{\omega}{2}\frac{\partial\omega}{\partial u^\alpha} w^\alpha$$

$$= \frac{1}{\mathfrak{v}^2\sqrt{g}}\left[\frac{v_1}{2\mathfrak{v}^2}\frac{\partial \mathfrak{v}^2}{\partial u^2} - \frac{v_2}{2\mathfrak{v}^2}\frac{\partial \mathfrak{v}^2}{\partial u^1} + v_{2,1} - v_{1,2}\right] - \frac{1}{2}\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2}\frac{\partial\omega}{\partial u^\alpha}\varepsilon^{\alpha\lambda} v_\lambda$$

$$= \frac{v_{2,1} - v_{1,2}}{\mathfrak{v}^2\sqrt{g}} + \frac{1}{\mathfrak{v}^4\sqrt{g}}\left(v_1\frac{\partial \mathfrak{v}^2}{\partial u^2} - v_2\frac{\partial \mathfrak{v}^2}{\partial u^1}\right).$$

$$\frac{1}{2}(g^{(1)} + g^{(2)}) = \frac{1}{\sqrt{g}}\left\{\left(\frac{v_2}{\mathfrak{v}^2}\right)_{,1} - \left(\frac{v_1}{\mathfrak{v}^2}\right)_{,2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left\{\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{v_2}{\mathfrak{v}^2}\right) - \frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{v_1}{\mathfrak{v}^2}\right)\right\}.$$

In der Klammer steht eine Rotationsbildung, $\operatorname{rot}\frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}^2}$, der sogenannte Stokessche Tensor des Vektors $\frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}^2}$. Im hier vorliegenden zweidimensionalen Fall ist $\operatorname{rot}\frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}^2}$ eine relative Invariante. Multiplikation mit $\frac{1}{\sqrt{g}}$ führt zu einer absoluten Invariante. Für diesen *absolut invarianten Differentialoperator* $\frac{1}{\sqrt{g}}\operatorname{rot}$ angewendet auf einen Vektor $\mathfrak{a}$ wollen wir die Abkürzung $R(\mathfrak{a})$ einführen:

$$(2,5)\quad R(\mathfrak{a}) = \frac{1}{\sqrt{g}}\operatorname{rot}\mathfrak{a} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial a_2}{\partial u^1} - \frac{\partial a_1}{\partial u^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{g}}(a_{2,1} - a_{1,2}) = \varepsilon^{\alpha\beta} a_{\beta,\alpha}.$$

Nun ist also

$$(2,61)\qquad \frac{1}{2}(g^{(1)} + g^{(2)}) = R\left(\frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}^2}\right).$$

Entsprechend folgt

$$(2,62)\qquad \frac{1}{2}(g^{(1)} - g^{(2)}) = -R\left(\frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{w}^2}\right).$$

Für die Tchebycheff-Krümmungen gilt nach (1, 5), (2, 3), (2, 42):

$$h^{(\varrho)} = \left(\pm\frac{1}{2}\frac{\partial\omega}{\partial u^\alpha} + k_\alpha\right)\left(\cos^2\frac{\omega}{2}v^\alpha \mp \sin^2\frac{\omega}{2}w^\alpha\right)$$

oder

$$\frac{1}{2}(h^{(1)} + h^{(2)}) = \cos^2\frac{\omega}{2}k_\alpha v^\alpha - \frac{1}{2}\sin^2\frac{\omega}{2}\frac{\partial\omega}{\partial u^\alpha}w^\alpha$$

und unter Verwendung obiger Resultate

$$(2,71)\qquad \frac{1}{2}(h^{(1)} + h^{(2)}) = \frac{1}{\mathfrak{v}^2}R(\mathfrak{v}),$$

$$(2,72)\qquad \frac{1}{2}(h^{(1)} - h^{(2)}) = -\frac{1}{\mathfrak{w}^2}R(\mathfrak{w}).$$

Wir wollen jetzt die geodätischen Krümmungen der beiden Netzkurven in einem Punkt als Projektionen eines Vektors $\mathfrak{g}$ auf das Tangentenvektorzweibein auffassen:

$$g^{(\varrho)} = \mathfrak{g} \circ \mathfrak{t}^{(\varrho)}.$$

Aus (1, 5), (2, 61), (2, 62) folgt

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{v}\, R\left(\frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}^2}\right) + \mathfrak{w}\, R\left(\frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{w}^2}\right). \tag{2,8}$$

Jedem Netz ist ein solcher Vektor $\mathfrak{g}$ nach Festlegung des Netzwinkels eindeutig zugeordnet. Sein Verschwinden ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das Netz geodätisch ist, d. h. aus geodätischen Linien besteht. Diese Eigenschaft rechtfertigt für $\mathfrak{g}$ die Bezeichnung: *geodätischer Netzvektor*.

In entsprechender Weise erhält man für die Tchebycheff-Krümmungen eine Darstellung durch den „*Tchebycheff-Netzvektor*“

$$h^{(\varrho)} = \mathfrak{h} \circ \mathfrak{t}^{(\varrho)},$$

$$\mathfrak{h} = \frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}^2} R(\mathfrak{v}) + \frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{w}^2} R(\mathfrak{w}). \tag{2,9}$$

Für ein Tchebycheff-Netz ist das Verschwinden des Vektors $\mathfrak{h}$ notwendig und hinreichend.

§ 3.

Ableitungsgleichungen des Netzes.

Infolge der in § 1 durchgeführten Zuordnung zwischen Netz und Vektorfeld $\mathfrak{v}$ können wir die Ableitungsgleichungen des Feldes

$$v_{\alpha,\beta} = c_\beta v_\alpha - k_\beta \varepsilon_\alpha^{\cdot\lambda} v_\lambda \tag{2,1}$$

auch als „Ableitungsgleichungen des Netzes“ ansehen. Bei gegebenen Koeffizienten c_β, k_β ist das ein lineares Differentialgleichungssystem für die Komponenten von $\mathfrak{v}$. Seine Integrabilitätsbedingungen geben Aufschluß über die Frage, inwieweit das Netz durch seinen Krümmungsvektor $\mathfrak{k}$ und den Netzwinkel ω bestimmt ist.

Es ist

$$v_{\alpha,\beta\gamma} = c_{\beta,\gamma} v_\alpha + c_\beta [c_\gamma v_\alpha - k_\gamma \varepsilon_\alpha^{\cdot\lambda} v_\lambda] - \\ - k_{\beta,\gamma} \varepsilon_\alpha^{\cdot\lambda} v_\lambda - k_\beta \varepsilon_\alpha^{\cdot\lambda} [c_\gamma v_\lambda - k_\gamma \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu} v_\nu]$$

wegen $\varepsilon_{\alpha,\gamma}^{\cdot\lambda} = 0$. Ist $R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\lambda} = \dfrac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda}{\partial u^\gamma} - \dfrac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^\lambda}{\partial u^\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^u \Gamma_{\mu\gamma}^\lambda - \Gamma_{\alpha\gamma}^u \Gamma_{\mu\beta}^\lambda$ der Riemann-Christoffelsche Krümmungstensor des Riemannschen Raumes, so folgt

$$v_{\alpha,12} - v_{\alpha,21} = -v_\lambda R_{\alpha\cdot 12}^{\cdot\lambda} = v_\alpha (c_{1,2} - c_{2,1}) - \varepsilon_\alpha^{\cdot\lambda} v_\lambda (k_{1,2} - k_{2,1})$$

oder

$$v^\lambda R_{\alpha\lambda 12} = -v_\alpha (c_{1,2} - c_{2,1}) + \varepsilon_{\alpha\lambda} v^\lambda (k_{1,2} - k_{2,1}).$$

Da nach (2, 21) c_β Komponenten eines Gradienten sind, ist

$$c_{1,2} - c_{2,1} = 0.$$

Für $\alpha = 1, 2$ ergibt sich aus der schiefen Symmetrie $R_{\alpha\lambda 12} = -R_{\lambda\alpha 12}$, $\varepsilon_{\alpha\lambda} = -\varepsilon_{\lambda\alpha}$:

$$[R_{1212} + \sqrt{g}\,(k_{2,1} - k_{1,2})]\,v^\lambda = 0.$$

Sei K die Gaußsche Krümmung des R_2, $K = \frac{R_{1212}}{g}$, so erhält man schließlich wegen $\mathfrak{v} \neq 0$

(3, 1) $$R(\mathfrak{k}) + K = 0.$$

Für die Krümmungsvektoren $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$ zweier beliebiger Netze gilt somit

$$R(\mathfrak{k}_1) - R(\mathfrak{k}_2) = R(\mathfrak{k}_1 - \mathfrak{k}_2) = 0$$

oder aber

(3, 2) $$\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k}_2 + \operatorname{grad} \Phi.$$

Eine Lösung $\mathfrak{v}$ des Differentialgleichungssystems (2, 1) wird durch einen Anfangsvektor $\mathfrak{v}_0$ im Punkte P_0 eindeutig festgelegt. Dabei ist $\mathfrak{v}_0$ aber nur der Richtung nach willkürlich wählbar, sein Betrag wird nach (1, 41) durch den Netzwinkel ω_0 in P_0 bestimmt. Seien $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ zwei Netzvektorfelder mit gleichem Netzwinkel ω und gleichem Krümmungsvektor $\mathfrak{k}$, aber verschiedenen Anfangsvektoren $\mathfrak{v}_{10} \neq \mathfrak{v}_{20}$, $|\mathfrak{v}_1| = |\mathfrak{v}_2| = |\mathfrak{v}|$, so gilt:

$$\mathfrak{v}_1 \circ \mathfrak{v}_2 = \mathfrak{v}^2 \cos\vartheta; \qquad \mathfrak{v}_{1,\alpha} \circ \mathfrak{v}_2 + \mathfrak{v}_1 \circ \mathfrak{v}_{2,\alpha} = \frac{\partial\, \mathfrak{v}^2 \cos\vartheta}{\partial u^\alpha}.$$

Nach (2, 1), (1, 4) ist

$$\mathfrak{v}_{\varrho,\alpha} = c_\alpha \mathfrak{v}_\varrho + k_\alpha \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\,\mathfrak{w}_\varrho$$

und damit wird

$$\mathfrak{v}_{1,\alpha} \circ \mathfrak{v}_2 + \mathfrak{v}_1 \circ \mathfrak{v}_{2,\alpha} = 2\,c_\alpha\, \mathfrak{v}_1 \circ \mathfrak{v}_2 = \frac{\partial \lg \mathfrak{v}^2}{\partial u^\alpha}\,\mathfrak{v}^2 \cos\vartheta.$$

Für den Winkel ϑ folgt die Gleichung $\frac{\partial \cos\vartheta}{\partial u^\alpha} = 0$, d. h. $\vartheta = \vartheta_0$.

Ergebnis. Gibt man den Netzvektor $\mathfrak{v}$ in einem Punkt P_0 seiner Richtung nach willkürlich vor, so ist das Netz durch Netzwinkel ω und Krümmungsvektor $\mathfrak{k}$ mit der Integrabilitätsbedingung (3, 1) eindeutig bestimmt. Bei Änderung der Anfangsrichtung um den Winkel ϑ_0 sind alle Netzrichtungen in jedem Punkt des Bereiches um den konstanten Winkel zu verschwenken. Netzwinkel und Netzkrümmungsvektor charakterisieren also das Netz bis auf isometrische Abbildungen und konstante Netzverschwenkungen.

§ 4.

Integralsätze im Netz.

Wir wollen von einem positiv orientierten Netz sprechen, wenn die in § 1 festgelegte Zuordnung zwischen Netztangentenvektoren $\mathfrak{t}^{(\varrho)}$, Netzwinkel ω und Netzvektor $\mathfrak{v}$ eine solche ist, daß $\mathfrak{t}^{(1)}$, $\mathfrak{t}^{(2)}$ ein Rechtssystem bilden. Im positiven Sinne erstreckte Kurvenintegrale längs einer Netzkurve (ϱ) seien

mit $\int_{(\varrho)}$, solche über ein Netzviereck mit $\int_{\square}$ bezeichnet. Es ist nach dem Gaußschen Integralsatz

$$(4,1) \qquad \int_{\square} v_\alpha du^\alpha = \iint_{\square} \left(\frac{\partial v_2}{\partial u^1} - \frac{\partial v_1}{\partial u^2}\right) du^1 du^2 = \iint_{\square} R(\mathfrak{v})\, d0.$$

In einem positiv orientierten Netz gilt nach (1, 5):

$$\int_{(\varrho)} v_\alpha du^\alpha = \int_{(\varrho)} \mathfrak{v} \circ \mathfrak{t}^{(\varrho)} ds = \int_{(\varrho)} ds.$$

Die linke Seite der Gleichung (4, 1) stellt die algebraische Summe der Seitenlängen des Netzviereckes, den sogenannten „Umweg" dar. Die Invariante $R(\mathfrak{v})$ hat damit die Bedeutung eines „Umwegs im Kleinen", d. h. $\iint_{\square} R(\mathfrak{v})\, d0$ ergibt den Umweg im Netzviereck. Da man nach (2, 71) $R(\mathfrak{v})$ durch Netzwinkel und die Tchebycheff-Krümmungen ausdrücken kann, ergibt sich für ein Netzviereck $ABCD$ folgender Integralsatz:

$$(4,21) \qquad \int_{\square} v_\alpha du^\alpha = \int_A^B ds + \int_B^C ds - \int_C^D ds - \int_D^A ds = \iint_{\square} \frac{1}{2} \frac{h^{(1)} + h^{(2)}}{\cos^2 \frac{\omega}{2}} d0.$$

Ist $\int_{\square} v_\alpha du^\alpha = 0$ für *jedes* Netzviereck im betrachteten Bereich, so folgt $R(\mathfrak{v}) = 0$, d. h. $\mathfrak{v} = \operatorname{grad} \varphi$, ferner $h^{(1)} + h^{(2)} = 0$. Entsprechend gilt:

$$\int_{\square} w_\alpha du^\alpha = \iint_{\square} R(\mathfrak{w})\, d0,$$

$$\int_{(\varrho)} w_\alpha du^\alpha = \int_{(\varrho)} \mathfrak{w} \circ \mathfrak{t}^{(\varrho)} ds = \mp \int_{(\varrho)} ds$$

(für $\varrho = 1$ ist das obere, für $\varrho = 2$ das untere Vorzeichen zu nehmen) und damit nach (2, 72):

$$(4,22) \qquad \int_{\square} w_\alpha du^\alpha = -\int_A^B ds + \int_B^C ds + \int_C^D ds - \int_D^A ds = \iint_{\square} \frac{1}{2} \frac{h^{(2)} - h^{(1)}}{\sin^2 \frac{\omega}{2}} d0.$$

Die Invariante $R(\mathfrak{w})$ stellt ebenfalls einen „Umweg im Kleinen" dar, nur sind jetzt die Bögen der Kurvenschar (1) mit entgegengesetztem Vorzeichen zu nehmen.

Sind die Tchebycheff-Krümmungen eines Netzes gleich oder entgegengesetzt gleich, so ist das Netz bei geeigneter Orientierung der Netzkurven ohne Umwege. Ein Tchebycheff-Netz ist unabhängig von der Orientierung der Netzkurven ohne Umwege und umgekehrt.

Aus dem Integralsatz

$$\int_{\square} \frac{v_\alpha d u^\alpha}{\mathfrak{v}^2} = \iint_{\square} R\left(\frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}^2}\right) d0$$

folgt nach (2, 6) wie oben für ein Netzviereck:

$$(4,31)\quad \int_{\square} \frac{v_\alpha d u^\alpha}{\mathfrak{v}^2} = \int_A^B \cos^2\frac{\omega}{2} ds + \int_B^C \cos^2\frac{\omega}{2} ds - \int_C^D \cos^2\frac{\omega}{2} ds - \int_D^A \cos^2\frac{\omega}{2} ds$$
$$= \frac{1}{2}\iint_{\square} [g^{(1)} + g^{(2)}] d0$$

und entsprechend

$$(4,32)\quad \int_{\square} \frac{w_\alpha d u^\alpha}{\mathfrak{w}^2} = -\int_A^B \sin^2\frac{\omega}{2} ds + \int_B^C \sin^2\frac{\omega}{2} ds + \int_C^D \sin^2\frac{\omega}{2} ds - \int_D^A \sin^2\frac{\omega}{2} ds$$
$$= \frac{1}{2}\iint_{\square} (g^{(2)} - g^{(1)}) d0.$$

Die geometrische Bedeutung dieser Sätze ist unmittelbar abzulesen. Man erhält so für geodätische Netze auch eine interessante Charakterisierung „im Großen“:

Für jedes Viereck $ABCD$ eines Netzes sei

$$(4,33)\quad \begin{aligned} &\int_A^B \cos^2\frac{\omega}{2} ds + \int_B^C \cos^2\frac{\omega}{2} ds - \int_C^D \cos^2\frac{\omega}{2} ds - \int_D^A \cos^2\frac{\omega}{2} ds = 0,\\ &-\int_A^B \sin^2\frac{\omega}{2} ds + \int_B^C \sin^2\frac{\omega}{2} ds + \int_C^D \sin^2\frac{\omega}{2} ds - \int_D^A \sin^2\frac{\omega}{2} ds = 0. \end{aligned}$$

Dann ist das Netz geodätisch, d. h. seine Kurven sind geodätische Linien.

Geodätischer Vektor $\mathfrak{g}$ und Tchebycheff-Vektor $\mathfrak{h}$ eines Netzes sind in den Formeln (2, 8), (2, 9) durch die Netzvektoren $\mathfrak{v}$. $\mathfrak{w}$ dargestellt. Wir wollen sie jetzt mit dem Krümmungsvektor $\mathfrak{k}$ des Netzes vergleichen. Nach (2, 3), (2, 4) ist:

$$g^{(\varrho)} = \mathfrak{f}^{(\varrho)} \circ \mathfrak{t}^{(\varrho)} = \mathfrak{g} \circ \mathfrak{t}^{(\varrho)},\ h^{(\varrho)} = \mathfrak{f}^{(3-\varrho)} \circ \mathfrak{t}^{(\varrho)} = \mathfrak{h} \circ \mathfrak{t}^{(\varrho)},$$
$$(\mathfrak{g} - \mathfrak{f}^{(\varrho)}) \circ \mathfrak{t}^{(\varrho)} = 0,\ (\mathfrak{h} - \mathfrak{f}^{(3-\varrho)}) \circ \mathfrak{t}^{(\varrho)} = 0$$

und damit

$$(4,4)\quad \mathfrak{g} - \mathfrak{f}^{(\varrho)} = \lambda^{(\varrho)}\mathfrak{k}^{(\varrho)},\ \mathfrak{h} - \mathfrak{f}^{(3-\varrho)} = \mu^{(\varrho)}\mathfrak{k}^{(\varrho)}.$$

Folglich ist

$$\mathfrak{f}^{(2)} - \mathfrak{f}^{(1)} = \operatorname{grad}\omega = \lambda^{(1)}\bar{\mathfrak{t}}^{(1)} - \lambda^{(2)}\bar{\mathfrak{t}}^{(2)} = \mu^{(2)}\bar{\mathfrak{t}}^{(2)} - \mu^{(1)}\bar{\mathfrak{t}}^{(1)},$$

$$\lambda^{(\varrho)} = -\mu^{(\varrho)}.$$

Zur Berechnung der Faktoren $\lambda^{(\varrho)}$ gehen wir von der Zerlegung des Vektors $\operatorname{grad}\omega$ im Netzzweibein $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ aus. Es sei

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{grad}\omega = \Omega_1\mathfrak{v} + \Omega_2\mathfrak{w}. \tag{4, 5}$$

Aus (1, 5) findet man

$$\lambda^{(1)}\bar{\mathfrak{t}}^{(1)} - \lambda^{(2)}\bar{\mathfrak{t}}^{(2)} = \frac{1}{+\sqrt{\mathfrak{v}^2\,\mathfrak{w}^2}}\{(\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)})\,\mathfrak{v} + (\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)})\,\mathfrak{w}\} = 2\,\Omega_1\mathfrak{v} + 2\,\Omega_2\mathfrak{w},$$

$$\lambda^{(\varrho)} = \sqrt{\mathfrak{v}^2\,\mathfrak{w}^2}\,[\Omega_1 \pm \Omega_2].$$

Schließlich wird nach (1, 5), (2, 3), (4, 4) unter Verwendung dieser Werte:

$$\mathfrak{g} = -\tfrac{1}{2}\operatorname{grad}\omega + \bar{\mathfrak{t}} + (\Omega_1 + \Omega_2)\,(\mathfrak{v} + \mathfrak{w}),$$

$$\mathfrak{h} = +\tfrac{1}{2}\operatorname{grad}\omega + \bar{\mathfrak{t}} - (\Omega_1 + \Omega_2)\,(\mathfrak{v} + \mathfrak{w})$$

oder

$$\mathfrak{g} = \bar{\mathfrak{t}} + (\Omega_2\mathfrak{v} + \Omega_1\mathfrak{w}), \tag{4, 6}$$

$$\mathfrak{h} = \bar{\mathfrak{t}} - (\Omega_2\mathfrak{v} + \Omega_1\mathfrak{w}).$$

Diese Formeln stellen ein Gegenstück zu der Aufspaltung der Feldkrümmungsvektoren in (2, 3) dar. Der hierbei auftretende Vektor $\Omega_2\mathfrak{v} + \Omega_1\mathfrak{w}$ hat eine einfache geometrische Bedeutung. Wir berechnen das Integral über ein Netzviereck $ABCD$:

$$\int_{\square}(\Omega_2 v_\alpha + \Omega_1 w_\alpha)\,du^\alpha = \int_A^B(\Omega_2 - \Omega_1)\,ds + \int_B^C(\Omega_2 + \Omega_1)\,ds +$$

$$- \int_C^D(\Omega_2 - \Omega_1)\,ds - \int_D^A(\Omega_2 + \Omega_1)\,ds.$$

Aus (4, 5) liest man ab

$$\Omega_1 = \frac{1}{2\,\mathfrak{v}^2}\mathfrak{v} \circ \operatorname{grad}\omega = \frac{1}{4}(\mathfrak{t}^{(1)} + \mathfrak{t}^{(2)}) \circ \operatorname{grad}\omega,$$

$$\Omega_2 = \frac{1}{2\,\mathfrak{w}^2}\mathfrak{w} \circ \operatorname{grad}\omega = \frac{1}{4}(\mathfrak{t}^{(1)} - \mathfrak{t}^{(2)}) \circ \operatorname{grad}\omega.$$

$$\Omega_1 + \Omega_2 = \frac{1}{2}\mathfrak{t}^{(2)} \circ \operatorname{grad}\omega,$$

$$\Omega_2 - \Omega_1 = -\frac{1}{2}\mathfrak{t}^{(1)} \circ \operatorname{grad}\omega.$$

Für die einzelnen Integrale erhalten wir so

$$\int_A^B (\Omega_2 - \Omega_1)\, ds = -\frac{1}{2}\int_A^B \operatorname{grad}\omega \circ \mathfrak{t}^{(1)}\, ds = -\frac{1}{2}\int_A^B \frac{\partial \omega}{\partial u^\alpha}\, du^\alpha = -\frac{1}{2}(\omega_B - \omega_A),$$

$$\int_B^C (\Omega_2 + \Omega_1)\, ds = +\frac{1}{2}\int_B^C \operatorname{grad}\omega \circ \mathfrak{t}^{(2)}\, ds = +\frac{1}{2}\int_B^C \frac{\partial \omega}{\partial u^\alpha}\, du^\alpha = +\frac{1}{2}(\omega_C - \omega_B),$$

$$\int_C^D (\Omega_2 - \Omega_1)\, ds = -\frac{1}{2}(\omega_D - \omega_C); \qquad \int_D^A (\Omega_2 + \Omega_1)\, ds = +\frac{1}{2}(\omega_A - \omega_D).$$

Damit wird

$$(4,7) \qquad \int_{\square} (\Omega_2 v_\alpha + \Omega_1 w_\alpha)\, du^\alpha = \omega_A - \omega_B + \omega_C - \omega_D = \Sigma - 2\pi,$$

wenn man die Winkelsumme im Netzviereck mit Σ bezeichnet. Nach (4, 7) können wir den Exzeß im Netzviereck $\Sigma - 2\pi$ durch ein Doppelintegral über das Netzviereck ausdrücken

$$\Sigma - 2\pi = \iint_{\square} R\,(\Omega_2 \mathfrak{v} + \Omega_1 \mathfrak{w})\, d0.$$

In der bisher verwendeten Sprechweise heißt das, daß die Netzinvariante $R\,(\Omega_2 \mathfrak{v} + \Omega_1 \mathfrak{w})$ die Bedeutung eines „Exzesses im Kleinen" hat.

Die Relationen (4, 6) führen nun zu zwei weiteren Integralsätzen. Berechnen wir zunächst $\int_{\square} g_\alpha du^\alpha$. Nach (2, 8), (2, 6) ist unter Verwendung der Ergebnisse dieses Abschnitts

$$\begin{aligned}\int_{\square} g_\alpha\, du^\alpha &= \int_{\square} \tfrac{1}{2}(g^{(1)} + g^{(2)})\, v_\alpha\, du^\alpha - \int_{\square} \tfrac{1}{2}(g^{(1)} - g^{(2)})\, w_\alpha\, du^\alpha \\ &= \int_A^B g^{(1)}\, ds + \int_B^C g^{(2)}\, ds + \int_C^D -g^{(1)}\, ds + \int_D^A -g^{(2)}\, ds.\end{aligned}$$

Das ist aber das in der Flächentheorie bekannte Integral der geodätischen Krümmung über eine geschlossene Kurve abzüglich der durch die Unstetigkeit der Tangentenrichtung in den Ecken bedingten Zusatzglieder! Die negativen Vorzeichen werden durch die verschiedene Orientierung des Netzes einerseits und der Normalen der geschlossenen Kurve andererseits hervorgerufen. Das Integral über den Krümmungsvektor $\int_{\square} k_\alpha du^\alpha = \iint_{\square} R\ (\mathfrak{k})\, d0$ können wir nach (3, 1) durch die negative Gesamtkrümmung $-\iint_{\square} K d0$ ersetzen. Damit folgt aus (4, 6) der Gauß-Bonnetsche Integralsatz für das Netzviereck:

$$(4,81) \qquad \int_{\square} g_\alpha\, du^\alpha + \iint_{\square} K\, d0 = \Sigma - 2\pi.$$

„Im Kleinen" lautet dieser Satz nach (4, 6):

$$R(\mathfrak{g}) + K = R(\Omega_2 \mathfrak{v} + \Omega_1 \mathfrak{w}). \tag{4, 82}$$

Das ist eine invariante Formulierung des sogenannten Liouvilleschen Satzes, der sonst nur für das Parameternetz ausgesprochen wird[6]). Nach (2, 7), (2, 9) ist entsprechend

$$\int_{\square} h_\alpha \, du^\alpha = \int_A^B h^{(1)} \, ds + \int_B^C h^{(2)} \, ds - \int_C^D h^{(1} \, ds - \int_D^A h^{(2)} \, ds.$$

Neben den Gauß-Bonnetschen Satz tritt daher im Netz ein ganz entsprechender Integralsatz für die Tchebycheff-Krümmung:

$$\int_{\square} h_\alpha \, du^\alpha + \iint_{\square} K \, d0 = 2\pi - \Sigma. \tag{4, 91}$$

Als eine Anwendung dieser Sätze beantworten wir die Frage: In welchen Netzen läßt sich die Gesamtkrümmung im Netzviereck durch die Winkelsumme bestimmen? Nach unseren Ergebnissen ist notwendig und hinreichend dafür das Verschwinden der Invariante $R(\mathfrak{g})$ oder der Invariante $R(\mathfrak{h})$. Im Fall $R(\mathfrak{g}) = 0$ folgt $\iint_{\square} K \, d0 = \Sigma - 2\pi$, aus $R(\mathfrak{h}) = 0$ folgt $\iint_{\square} K \, d0 = 2\pi - \Sigma$. Aus $R(\mathfrak{g}) = R(\mathfrak{h}) = 0$ findet man $K = 0$ und damit $\Sigma = 2\pi$. Speziell gehören zu den gesuchten Netzen die geodätischen ($\mathfrak{g} = 0$) und die Tchebycheff-Netze ($\mathfrak{h} = 0$). [Aus $\mathfrak{g} = 0$ folgt $R(\mathfrak{g}) = 0$, aber nicht umgekehrt.]

Entsprechend werden alle Netze, deren Winkelsumme im Netzviereck stets 2π ist, durch das Verschwinden der Invariante $R(\Omega_2 \mathfrak{v} + \Omega_1 \mathfrak{w})$ charakterisiert. Speziell sind darin die Netze mit $\Omega_2 \mathfrak{v} + \Omega_1 \mathfrak{w} = 0$ enthalten, d. h. aber $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$ und damit $\operatorname{grad} \omega = 0$, also Netze mit konstantem Netzwinkel.

§ 5.

Netz und Metrik.

Über die Maßverhältnisse im Netz gibt uns der Netzvektor $\mathfrak{v}$ unmittelbar Auskunft. Nach § 4 stimmte die Pfaffsche Form $v_\alpha du^\alpha$ längs der Netzrichtungen mit dem Bogenelement der Netzkurven überein; nach (1, 41) ist der Netzwinkel eine Funktion der Länge des Netzvektors. Die Metrik des Riemannschen Raumes R_2 kann mit der Netzmetrik am einfachsten dadurch verglichen werden, daß man das Linienelement auf das Netz als Parameternetz bezieht. Man erhält dann für die Differentialgleichung des Netzes (1, 2): $du^1 du^2 = 0$ und damit $\varphi_{11} = \varphi_{22} = 0$ oder nach (1, 3)

$$g_{11} = (v_1)^2 = (w_1)^2; \; g_{22} = (v_2)^2 = (w_2)^2 \tag{5, 11}$$

[6]) Darboux, Lecons sur la theorie generale des surfaces III, S. 130.

Die Vorzeichen wählen wir in Übereinstimmung mit den früheren Festsetzungen:

$$(5,12)\qquad \begin{aligned} v_1 &= +\sqrt{g_{11}} \qquad & w_1 &= -\sqrt{g_{11}},\\ v_2 &= +\sqrt{g_{22}} \qquad & w_2 &= +\sqrt{g_{22}}. \end{aligned}$$

Ändert man die Parameterskalen auf den Netzlinien $u^\alpha = u^\alpha(\bar{u}^\alpha)$, so werden auch die Fundamentalgrößen transformiert:

$$g_{\alpha\alpha} = \bar{g}_{\alpha\alpha}\left(\frac{d\bar{u}^\alpha}{du^\alpha}\right)^2 \qquad \text{(nicht über } \alpha \text{ summieren!)}$$

Gegenüber einer solchen „Umeichung" einer Netzkurvenschar sind offenbar die Größen $\frac{\partial \lg g_{\alpha\alpha}}{\partial u^{3-\alpha}}$ invariant, so daß ihnen eine Bedeutung für die Geometrie des Netzes zukommt. Unsere Aufgabe wird es nun sein, diese nur für das Zusammenfallen von Netz und Parameternetz erklärten Größen parameterinvariant darzustellen. Das gelingt mit Hilfe des Zusammenhanges (5, 12) zwischen Netz und Metrik. Nach (2, 5), (5, 12) ist:

$$R(\mathfrak{v}) = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial v_2}{\partial u^1} - \frac{\partial v_1}{\partial u^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{g_{11}\,g_{22}}\sin\omega}\left(\frac{\partial\sqrt{g_{22}}}{\partial u^1} - \frac{\partial\sqrt{g_{11}}}{\partial u^2}\right),$$

$$R(\mathfrak{w}) = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial w_2}{\partial u^1} - \frac{\partial w_1}{\partial u^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{g_{11}\,g_{22}}\sin\omega}\left(\frac{\partial\sqrt{g_{22}}}{\partial u^1} + \frac{\partial\sqrt{g_{11}}}{\partial u^2}\right),$$

$$\frac{1}{\sqrt{g_{11}}\sin\omega}\,\frac{\partial \lg\sqrt{g_{22}}}{\partial u^1} = \frac{1}{2}\left[R(\mathfrak{v}) + R(\mathfrak{w})\right],$$

$$\frac{1}{\sqrt{g_{22}}\sin\omega}\,\frac{\partial \lg\sqrt{g_{11}}}{\partial u^2} = \frac{1}{2}\left[R(\mathfrak{w}) - R(\mathfrak{v})\right],$$

und damit wird

$$(5,2)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial \lg\sqrt{g_{22}}}{\partial u^1} &= \frac{\sin\omega}{4}(v_1 - w_1)\left(R(\mathfrak{v}) + R(\mathfrak{w})\right),\\ \frac{\partial \lg\sqrt{g_{11}}}{\partial u^2} &= \frac{\sin\omega}{4}(v_2 + w_2)\left(-R(\mathfrak{v}) + R(\mathfrak{w})\right). \end{aligned}$$

Da die rechten Seiten von (5, 2) jeweils Komponenten eines Vektors darstellen, können wir unter Benutzung von

$$v_2 - w_2 = 0, \quad v_1 + w_1 = 0$$

zwei Vektoren $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ bilden, deren Komponenten im speziellen System: Netz = Parameternetz bis auf einen Zahlfaktor die eichinvarianten Ausgangsgrößen sind:

$$(5,31)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{r} &= \frac{\sin\omega}{2}(\mathfrak{v} - \mathfrak{w})\left(R(\mathfrak{v}) + R(\mathfrak{w})\right) + \frac{\sin\omega}{4}(\mathfrak{v} + \mathfrak{w})\left(R(\mathfrak{w}) - R(\mathfrak{v})\right),\\ \mathfrak{r} &= \frac{\sin\omega}{2}\left(\mathfrak{v}\,R(\mathfrak{w}) - \mathfrak{w}\,R(\mathfrak{v})\right) = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{v}^2\,\mathfrak{w}^2}}\left(\mathfrak{v}\,R(\mathfrak{w}) - \mathfrak{w}\,R(\mathfrak{v})\right), \end{aligned}$$

speziell:

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial u^1}, \qquad r_2 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial u^2},$$

ferner

$$\mathfrak{s} = \frac{\sin \omega}{4} (\mathfrak{v} - \mathfrak{w}) (R(\mathfrak{v}) + R(\mathfrak{w})) - \frac{\sin \omega}{4} (\mathfrak{v} + \mathfrak{w}) (R(\mathfrak{w}) - R(\mathfrak{v}))$$

(5, 32)

$$\mathfrak{s} = \frac{\sin \omega}{2} (\mathfrak{v} R(\mathfrak{v}) - \mathfrak{w} R(\mathfrak{w})) = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{v}^2 \mathfrak{w}^2}} (\mathfrak{v} R(\mathfrak{v}) - \mathfrak{w} R(\mathfrak{w})),$$

speziell:

$$s_1 = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial u^1}, \qquad s_2 = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial u^2}.$$

Damit ist aber dieses Problem gelöst, denn die Darstellungen (5, 3) der Vektoren $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ hängen nicht mehr von der Wahl des Parameternetzes ab. Die Aussage $\mathfrak{r} = 0$ oder $\mathfrak{s} = 0$ führt zu $R(\mathfrak{v}) = R(\mathfrak{w}) = 0$, ist also gleichwertig mit $\mathfrak{h} = 0$ (Tchebycheff-Netz).

Netze, in denen das Linienelement des R_2 eine besondere Gestalt annimmt, lassen sich oftmals mit Hilfe dieser Vektoren $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ parameterinvariant kennzeichnen. Betrachten wir als erstes Beispiel die rhombischen (Vossschen) Netze[7]). Im speziellen Fall, Netz = Parameternetz, gilt für sie bei geeigneter Parameternormierung: $g_{11} = g_{22}$. Das entspricht ohne Normierung der Forderung:

$$\frac{g_{11}}{g_{22}} = \frac{\Phi_1(u^1)}{\Phi_2(u^2)} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 \lg \frac{g_{11}}{g_{22}}}{\partial u^1 \partial u^2} = 0.$$

Diese Bedingung ist nach (5, 3) gleichwertig mit

$$2\left(\frac{\partial r_2}{\partial u^1} - \frac{\partial r_1}{\partial u^2}\right) = 0, \text{ d. h. } R(\mathfrak{r}) = 0. \tag{5, 4}$$

Nun hängt aber Gleichung (5, 4) nicht mehr von der speziellen Wahl des Parameternetzes ab, so daß für den rhombischen Charakter eines Netzes das Verschwinden der Netzinvariante $R(\mathfrak{r})$ notwendig und hinreichend ist.

Welche Bedeutung für das Netz hat das Verschwinden der Invariante $R(\mathfrak{s})$? Aus $R(\mathfrak{s}) = 0$ folgt im speziellen Fall $\frac{\partial^2 \lg g_{11} g_{22}}{\partial u^1 \partial u^2} = 0$ und damit erhält in diesem Netz bei geeigneter Normierung der Parameter das Linienelement die Gestalt:

$$ds^2 = g_{11}(du^1)^2 + 2\cos\omega\, du^1 du^2 + \frac{1}{g_{11}}(du^2)^2, \text{ d. h. } g_{11} g_{22} = 1.$$

---

[7]) Flächen mit rhombischer Teilung hat zuerst A. Voss untersucht. A. Voss, Math. Annalen **19** (1881).

Das Oberflächenelement $d0 = \sin\omega\, du^1 du^2$ hängt nur von dem Netzwinkel ab.

Wir wollen als weiteres Beispiel diejenigen Netze betrachten, in welchen sich das Linienelement in der Form schreiben läßt:

(5, 51) $ds^2 = [U_1(u^1) + U_2(u^2)]^n\,[(du^1)^2 + 2\cos\omega\, du^1 du^2 + (du^2)^2];\ n \neq 0.$

Man erhält zunächst

$$\frac{\partial \lg \sqrt{g_{22}}}{\partial u^1} = \frac{n}{2}\,\frac{U_1'}{U_1 + U_2},$$

$$\frac{\partial \lg \sqrt{g_{11}}}{\partial u^2} = \frac{n}{2}\,\frac{U_2'}{U_1 + U_2},$$

$$\frac{\partial^2 \lg \sqrt{g_{11}\, g_{22}}}{\partial u^1\, \partial u^2} = -\,n\,\frac{U_1'\, U_2'}{(U_1 + U_2)^2}$$

und unter Verwendung von (5, 3) folgt

$$\frac{\partial s_2}{\partial u^1} - \frac{\partial s_1}{\partial u^2} = \frac{2}{n}\,(s_1 r_2 - s_2 r_1)$$

oder

(5, 52) $$R(\mathfrak{s}) = \frac{2}{n}\,\frac{(s_1 r_2 - s_2 r_1)}{\sqrt{g}}.$$

Da die untersuchten Netze nach (5, 51) rhombisch sind, finden wir als notwendige Bedingungen:

(5, 53) a) $R(\mathfrak{r}) = 0$

b) $$R(\mathfrak{s}) = \frac{2}{n}\,\frac{s_1 r_2 - s_2 r_1}{\sqrt{g}}.$$

Umgekehrt seien für ein Netz die Gleichungen (5, 53) erfüllt. Dann folgt für das Netz als Parameternetz nach (5, 3)

$$\frac{\partial^2 \lg \sqrt{g_{11}}}{\partial u^1\, \partial u^2} = \frac{\partial^2 \lg \sqrt{g_{22}}}{\partial u^1\, \partial u^2} = -\,\frac{2}{n}\,\frac{\partial \lg \sqrt{g_{11}}}{\partial u^2}\,\frac{\partial \lg \sqrt{g_{22}}}{\partial u^1}$$

und aus der ersten Gleichheit

$$\sqrt{g_{11}} = \Phi_1(u^1) \cdot \Psi(u^1, u^2)$$

$$\sqrt{g_{22}} = \Phi_2(u^2) \cdot \Psi(u^1, u^2)$$

Damit wird

$$\frac{\partial^2 \lg \Psi}{\partial u^1\, \partial u^2} = -\,\frac{2}{n}\,\frac{\partial \lg \Psi}{\partial u^1}\,\frac{\partial \lg \Psi}{\partial u^2};\quad \Psi = [U_1(u^1) + U_2(u^2)]^{\frac{n}{2}}.$$

Ergebnis. Die Bedingungen (5, 53) sind notwendig und hinreichend dafür, daß das Netz ein Linienelement der Gestalt (5, 51) gestattet. Für $\omega = \frac{\pi}{2}$, $n = 1$ sind darin die Liouvilleschen Netze enthalten.

§ 6.

Spezielle Netze.

Liegen Netze vor, die gleichzeitig mehrere geometrische Eigenschaften aufweisen, so werden die ihnen zugeordneten Vektorfelder und Invarianten noch weiter spezialisiert. Dabei kann der Fall eintreten, daß die dabei auftretenden Bedingungsgleichungen nicht für jede Metrik miteinander verträglich sind. Geodätische Netze mit konstantem Netzwinkel sind z. B. trivialerweise nur auf Flächen mit $K = 0$ möglich, wie man unmittelbar aus (4, 82) abliest. Im allgemeinen wird daher die Integrabilität eines gewissen Systems eine naturgemäß parameterinvariante Charakterisierung derjenigen Metrik ergeben, die Netze der geforderten Art gestattet. Als Beispiele seien die isothermen und die Liouvilleschen Netze angeführt[8]).

Für isotherme Netze gilt:

$$\text{a)} \quad \omega = \frac{\pi}{2}, \text{ d. h. } \mathfrak{v}^2 = \mathfrak{w}^2 = 2,$$

$$\text{b)} \quad R(\mathfrak{r}) = 0.$$

Die Ableitungsgleichungen lauten:

$$(6,11) \qquad v_{\alpha,\beta} = -k_\beta \varepsilon_\alpha^{\cdot\lambda} v_\lambda, \qquad w_\alpha = -\varepsilon_\alpha^{\cdot\lambda} v_\lambda.$$

Man erhält

$$R(\mathfrak{v}) = \varepsilon^{\alpha\beta} v_{\beta,\alpha} = -\varepsilon^{\alpha\beta} k_\alpha \varepsilon_\beta^{\cdot\lambda} v_\lambda = g^{\alpha\lambda} k_\alpha v_\lambda,$$

$$R(\mathfrak{w}) = \varepsilon^{\alpha\beta} w_{\beta,\alpha} = \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon_\beta^{\cdot\lambda} k_\alpha \varepsilon_\lambda^{\cdot\mu} v_\mu = -\varepsilon^{\lambda\mu} k_\lambda v_\mu.$$

Für ein rhombisches Netz ist $R(\mathfrak{r}) = 0$, d. h. $\mathfrak{r} = \operatorname{grad} \Phi$. Aus (5, 31) folgt

$$\mathfrak{r} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{v}^2 \mathfrak{w}^2}} [\mathfrak{v} R(\mathfrak{w}) - \mathfrak{w} R(\mathfrak{v})] = \operatorname{grad} \Phi.$$

Damit wird

$$-\tfrac{1}{2} \varepsilon^{\lambda\mu} k_\lambda v_\mu \mathfrak{v} - \tfrac{1}{2} g^{\lambda\mu} k_\lambda v_\mu \mathfrak{w} = \operatorname{grad} \Phi,$$

$$-\varepsilon^{\lambda\mu} k_\lambda v_\mu = g^{\alpha\beta} \frac{\partial \Phi}{\partial u^\alpha} v_\beta,$$

$$-g^{\lambda\mu} k_\lambda v_\mu = g^{\alpha\beta} \frac{\partial \Phi}{\partial u^\alpha} w_\beta = -\varepsilon^{\alpha\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial u^\alpha} v_\lambda.$$

Diese Gleichungen werden erfüllt für

$$(6,12) \qquad k_\lambda = -\varepsilon_\lambda^{\cdot\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial u^\nu}.$$

---

[8]) Zur Frage der Liouvilleschen Netze: Darboux, II, S. 222 und G. Ricci, Atti d. r. accadem. d. Lincei Ser. V, 2 (1893).

Die Kurven $\Phi = \text{const}$ haben die Krümmungsvektoren $\mathfrak{k}$ zu Tangentialvektoren. Der Krümmungsvektor $\mathfrak{k}$ ist nicht willkürlich wählbar, er genügt der Integrabilitätsbedingung (3, 1)

$$R(\mathfrak{k}) + K = 0.$$

Nun ist

$$R(\mathfrak{k}) = \varepsilon^{\alpha\beta} k_{\beta,\alpha} = -\varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon_{\beta}^{\cdot\nu} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u^{\nu}}\right)_{,\alpha} = g^{\alpha,\beta} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u^{\alpha}}\right)_{,\beta} = \Delta \Phi,$$

folglich

(6, 13) $\qquad \Delta \Phi + K = 0 \qquad$ (Δ zweiter Beltramischer Differentialoperator).

Ist umgekehrt Φ eine Lösung von (6, 13) und $\omega = \frac{\pi}{2}$, so berechnet man nach (6, 12) den Krümmungsvektor und gewinnt aus (6, 11) durch Integration den Netzvektor eines isothermen Netzes, wobei die Anfangsrichtung $\mathfrak{v}_0$ willkürlich vorgebbar ist. Da für isotherme Netze der Krümmungsvektor $\mathfrak{k}$ aus einem Gradienten nach (6, 12) gewonnen wird, muß für Liouvillesche Netze die erzeugende Funktion Φ weiter spezialisiert werden. Für diese tritt neben Forderung a), b) noch (5, 53)

c) $\qquad R(\mathfrak{s}) = 2 \frac{s_1 r_2 - s_2 r_1}{\sqrt{g}}.$

Unter Verwendung von $\mathfrak{r} = \operatorname{grad} \Phi$ läßt sich diese Bedingung umformen:

$$R(e^{2\Phi} \mathfrak{s}) = 0.$$

Aus (5, 32) folgt:

$$\mathfrak{s} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{v}^2 \mathfrak{w}^2}} [\mathfrak{v} R(\mathfrak{v}) - \mathfrak{w} R(\mathfrak{w})] = \frac{1}{2} [\mathfrak{v} g^{\alpha\beta} k_{\alpha} v_{\beta} + \mathfrak{w} \varepsilon^{\alpha\beta} k_{\alpha} v_{\beta}],$$

damit

$$\varepsilon^{\alpha\beta} \left[\frac{e^{2\Phi}}{2} (v_{\alpha} g^{\lambda\mu} k_{\lambda} v_{\mu} - \varepsilon_{\alpha}^{\cdot\nu} v_{\nu} \varepsilon^{\lambda\mu} k_{\lambda} v_{\mu})\right]_{,\beta} = 0,$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta} \left[\frac{e^{2\Phi}}{2} \left(- v_{\alpha} \varepsilon^{\mu\nu} v_{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial u^{\nu}} + \varepsilon_{\alpha}^{\cdot\nu} v_{\nu} g^{\mu\varrho} v_{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial u^{\varrho}}\right)\right]_{,\beta} = 0.$$

Führen wir die kovariante Differentiation aus, wobei wir zur Abkürzung:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u^{\alpha}} = \Phi_{,\alpha}; \qquad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u^{\alpha}}\right)_{,\beta} = \Phi_{,\alpha\beta}$$

setzen, so ergibt sich mit Hilfe der Ableitungsgleichungen (6, 11) und der isometrischen Bedingung (6, 12):

$$\begin{aligned} & e^{2\Phi} \varepsilon^{\alpha\beta} \Phi_{,\beta} (- v_{\alpha} \varepsilon^{\mu\nu} v_{\mu} \Phi_{,\nu} + \varepsilon_{\alpha}^{\cdot\nu} v_{\nu} g^{\mu\varrho} v_{\mu} \Phi_{,\varrho}) + \\ & + \frac{e^{2\Phi}}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} (- \varepsilon_{\beta}^{\cdot\mu'} \Phi_{,\mu'} \varepsilon_{\alpha}^{\cdot\lambda'} v_{\lambda'} \varepsilon^{\mu\lambda} v_{\mu} \Phi_{,\nu} - v_{\alpha} \varepsilon^{\mu\nu} \varepsilon_{\beta}^{\cdot\mu'} \Phi_{,\mu'} \varepsilon_{\mu}^{\cdot\lambda} v_{\lambda} \Phi_{,\nu} + \\ & + \varepsilon_{\alpha}^{\cdot\nu} \varepsilon_{\beta}^{\cdot\mu'} \Phi_{,\mu'} \varepsilon_{\nu}^{\cdot\lambda} v_{\lambda} g^{\mu\nu'} v_{\mu} \Phi_{,\nu'} + \varepsilon_{\alpha}^{\cdot\nu} v_{\nu} g^{\mu\nu'} \varepsilon_{\beta}^{\cdot\mu'} \Phi_{,\mu'} \varepsilon_{\mu}^{\cdot\lambda} v_{\lambda} \Phi_{,\nu'} - \\ & - v_{\alpha} \varepsilon^{\mu\nu} v_{\mu} \Phi_{,\nu\beta} + \varepsilon_{\alpha}^{\cdot\nu} v_{\nu} g^{\mu\nu'} v_{\mu} \Phi_{,\nu'\beta}) = 0. \\ & (g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} - \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\mu\nu}) (\Phi_{,\alpha\mu} + 4 \Phi_{,\alpha} \Phi_{,\mu}) v_{\beta} v_{\nu} = 0 \end{aligned}$$

und nach Multiplikation mit $4\,e^{4\Phi}$

$$(6,2) \qquad (g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu} - \varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\mu\nu})\,(e^{4\Phi})_{,\alpha\mu}v_\beta v_\nu = 0.$$

Diese in den Komponenten von $\mathfrak{v}$ homogene quadratische Form bestimmt für $(e^{4\Phi})_{,\alpha\mu} \not\equiv 0$ zu gegebenen Φ zwei Richtungsfelder, die wegen $(g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu} - \varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\mu\nu})\,g_{\beta\nu} = 0$ orthogonal sind. Diese Vektorfelder müssen aber den Gleichungen (6, 11), (6, 12) bzw. zusammengefaßt

$$(6,14) \qquad v_{\alpha,\beta} = \varepsilon_\alpha^{\cdot\lambda}\,\varepsilon_\beta^{\cdot\mu}\,v_\lambda \Phi_{,\mu}$$

genügen.

Ergebnis. Für Liouvillesche Netze ist daher notwendig und hinreichend, daß das System (6, 14) und die Gleichungen (6, 13), (6, 2) eine gemeinsame Lösung Φ, $\mathfrak{v}$ besitzen. Der Sonderfall $(e^{4\Phi})_{\alpha\mu} = 0$ führt zusammen mit $\Delta\Phi + K = 0$ zu $K = 0$, wie man leicht nachweisen kann, so daß nur auf abwickelbaren Flächen Liouvillesche Netze existieren, die bei örtlicher Verschwenkung um konstanten Winkel Netze derselben Art bleiben.

Wenn nun auch für eine gegebene Metrik durch verschiedene Methoden die Integrabilität dieses Systems festgestellt werden kann, so wird man doch versuchen, diese zwar einfachen, aber wegen ihres nichtlinearen Charakters unübersichtlichen Gleichungen umzuformen. Kann man z. B. durch eine spezielle Parameterwahl eine Vereinfachung erreichen, so wird dies durch Rücktransformation für den allgemeinen Fall auszuwerten sein.

Beziehen wir den Riemannschen Raum R_2 auf sein Minimalkurvennetz, so folgt:

$$ds^2 = 2\,l\,(u^1 u^2)\,du^1\,du^2,$$

$$g_{11} = g_{22} = 0, \quad g_{12} = l;\ g = -\,l^2,$$

$$g^{11} = g^{22} = 0, \quad g^{12} = \frac{1}{l},$$

$$\varepsilon_{12} = il; \qquad \varepsilon^{12} = \frac{i}{l},$$

$$\varepsilon_1^{\cdot 1} = i, \quad \varepsilon_1^{\cdot 2} = \varepsilon_2^{\cdot 1} = 0, \quad \varepsilon_2^{\cdot 2} = -\,i,$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{\partial \lg l}{\partial u^1}, \qquad \Gamma^2_{22} = \frac{\partial \lg l}{\partial u^2} \quad \text{(Christoffel-Symbole 2. Art)}$$

alle übrigen $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ verschwinden

$$K = -\,\frac{1}{l}\,\frac{\partial^2 \lg l}{\partial u^1\,\partial u^2}.$$

Damit reduzieren sich die Ausgangsgleichungen (6, 13), (6, 14), (6, 2):

$$\frac{2}{l}\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^1\,\partial u^2} = \frac{1}{l}\frac{\partial^2 \lg l}{\partial u^1\,\partial u^2}, \tag{6,31}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial u_1} - v_1\frac{\partial \lg l}{\partial u^1} &= -v_1\frac{\partial\Phi}{\partial u^1} \qquad \frac{\partial v_1}{\partial u^2} = v_1\frac{\partial\Phi}{\partial u^2}, \\ \frac{\partial v_2}{\partial u^2} - v_2\frac{\partial \lg l}{\partial u^2} &= -v_2\frac{\partial\Phi}{\partial u^2} \qquad \frac{\partial v_2}{\partial u^1} = v_2\frac{\partial\Phi}{\partial u^1}, \end{aligned} \tag{6,32}$$

$$v_1 v_1\Big(\frac{\partial^2 e^{4\Phi}}{\partial u^2\,\partial u^2} - \frac{\partial e^{4\Phi}}{\partial u^2}\frac{\partial \lg l}{\partial u^2}\Big) + v_2 v_2\Big(\frac{\partial^2 e^{4\Phi}}{\partial u^1\,\partial u^1} - \frac{\partial e^{4\Phi}}{\partial u^1}\frac{\partial \lg l}{\partial u^1}\Big) = 0. \tag{6,33}$$

Durch Integration erhält man

$$\begin{aligned} e^{4\Phi} &= l^2 U_1(u^1)\,U_2(u^2);\ U_1 \neq 0,\ U_2 \neq 0, \\ \lg v_1 &= \tfrac{1}{2}\lg l - \tfrac{1}{4}\lg U_1 + \tfrac{1}{4}\lg U_2, \\ \lg v_2 &= \tfrac{1}{2}\lg l + \tfrac{1}{4}\lg U_1 - \tfrac{1}{4}\lg U_2 \end{aligned}$$

und durch Einsetzen in (6, 33) für die willkürlichen Funktionen U_1, U_2 die Bedingung:

$$\Big(\frac{U_2}{U_1}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big[\frac{\partial^2 l^2 U_1 U_2}{\partial u^2\,\partial u^2} - \frac{\partial l^2 U_1 U_2}{\partial u^2}\frac{\partial \lg l}{\partial u^2}\Big] + \Big(\frac{U_1}{U_2}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big[\frac{\partial^2 l^2 U_1 U_2}{\partial u^1\,\partial u^1} - \frac{\partial l^2 U_1 U_2}{\partial u^1}\frac{\partial \lg l}{\partial u^1}\Big] = 0$$

oder

$$\frac{\partial^2 l^2 U_2}{(\partial u^2)^2} - \frac{\partial l^2 U_2}{\partial u^2}\frac{\partial \lg l}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 l^2 U_1}{(\partial u^1)^2} - \frac{\partial l^2 U_1}{\partial u^1}\frac{\partial \lg l}{\partial u^1} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u^1}\Big[\frac{1}{l}\frac{\partial l^2 U_1}{\partial u^1}\Big] + \frac{\partial}{\partial u^2}\Big[\frac{1}{l}\frac{\partial l^2 U_2}{\partial u^2}\Big] = 0, \tag{6,34}$$

ausführlich

$$\begin{aligned} &U_1'' + U_2'' + 3\frac{\partial \lg l}{\partial u^1}U_1' + 3\frac{\partial \lg l}{\partial u^2}U_2' + \\ &\quad + 2\Big(\frac{\partial^2 \lg l}{\partial u^1\,\partial u^1} + \Big(\frac{\partial \lg l}{\partial u^1}\Big)^2\Big)U_1 + 2\Big(\frac{\partial^2 \lg l}{\partial u^2\,\partial u^2} + \Big(\frac{\partial \lg l}{\partial u^2}\Big)^2\Big)U_2 = 0. \end{aligned}$$ [9]

Diese Funktionalgleichung läßt sich für $K = 0$ separieren, so daß wir diesen Fall ausschließen können. Für das Weitere setzen wir $K \neq 0$ voraus.

Die Bedingung (6, 34) läßt sich durch das System ersetzen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{l}\frac{\partial W}{\partial u^1} &= -\frac{1}{l^2}\frac{\partial l^2 U_2}{\partial u^2} = -U_2' - 2\frac{\partial \lg l}{\partial u^2}U_2, \\ \frac{1}{l}\frac{\partial W}{\partial u^2} &= +\frac{1}{l^2}\frac{\partial l^2 U_1}{\partial u^1} = +U_1' + 2\frac{\partial \lg l}{\partial u^1}U_1. \end{aligned} \tag{6,35}$$

[9]) Zur Integration dieser Funktionalgleichung: Darboux, IV, S. 369, Note II von G. Koenigs.

Durch partielle Differentiation erhält man

$$\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{1}{l}\frac{\partial W}{\partial u^1}\right) = -2\frac{\partial^2 \lg l}{\partial u^2 \partial u^1} U_2 = +2KlU_2,$$
$$\frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{1}{l}\frac{\partial W}{\partial u^2}\right) = +2\frac{\partial^2 \lg l}{\partial u^1 \partial u^2} U_1 = -2KlU_1,$$

oder, da nach Voraussetzung $lK \neq 0$:

$$(6,36)\qquad \begin{aligned} U_1 &= -\frac{1}{2Kl^2}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial u^2 \partial u^2} - \frac{\partial \lg l}{\partial u^2}\frac{\partial W}{\partial u^2}\right), \\ U_2 &= +\frac{1}{2Kl^2}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial u^1 \partial u^1} - \frac{\partial \lg l}{\partial u^1}\frac{\partial W}{\partial u^1}\right). \end{aligned}$$

Setzt man diese Werte in (6, 35) ein und differenziert (6, 36) nach u^2 bzw. u^1, so entsteht ein der Funktionalgleichung (6, 34) äquivalentes *lineares* Differentialgleichungssystem für die Funktion W:

$$(6,37)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^3 W}{\partial u^1 \partial u^1 \partial u^1} &= \frac{\partial^2 W}{\partial u^1 \partial u^1}\left(\frac{\partial \lg K}{\partial u^1} + 3\frac{\partial \lg l}{\partial u^1}\right) + \\ &\quad + \frac{\partial W}{\partial u^1}\left(\frac{\partial^2 \lg l}{\partial u^1 \partial u^1} - \frac{\partial \lg K}{\partial u^1}\frac{\partial \lg l}{\partial u^1} - 2\left(\frac{\partial \lg l}{\partial u^1}\right)^2\right), \\ \frac{\partial^3 W}{\partial u^1 \partial u^1 \partial u^2} &= \frac{\partial^2 W}{\partial u^1 \partial u^2}\frac{\partial \lg l}{\partial u^1} + \frac{\partial^2 W}{\partial u^1 \partial u^1}\frac{\partial \lg K}{\partial u^2} - \\ &\quad - \frac{\partial W}{\partial u^1}\left(3Kl + \frac{\partial \lg K}{\partial u^2}\frac{\partial \lg l}{\partial u^1}\right), \\ \frac{\partial^3 W}{\partial u^1 \partial u^2 \partial u^2} &= \frac{\partial^2 W}{\partial u^1 \partial u^2}\frac{\partial \lg l}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial u^2 \partial u^2}\frac{\partial \lg K}{\partial u^1} - \\ &\quad - \frac{\partial W}{\partial u^2}\left(3Kl + \frac{\partial \lg K}{\partial u^1}\frac{\partial \lg l}{\partial u^2}\right), \\ \frac{\partial^3 W}{\partial u^2 \partial u^2 \partial u^2} &= \frac{\partial^2 W}{\partial u^2 \partial u^2}\left(\frac{\partial \lg K}{\partial u^2} + 3\frac{\partial \lg l}{\partial u^2}\right) + \\ &\quad + \frac{\partial W}{\partial u^2}\left(\frac{\partial^2 \lg l}{\partial u^2 \partial u^2} - \frac{\partial \lg K}{\partial u^2}\frac{\partial \lg l}{\partial u^2} - 2\left(\frac{\partial \lg l}{\partial u^2}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Im Hinblick auf die Transformation auf allgemeine Parameter ersetzen wir die partiellen durch die kovarianten Ableitungen, wobei jetzt allerdings auf die Reihenfolge der Indizes zu achten ist.

$$W_{,\alpha} = \frac{\partial W}{\partial u^\alpha}$$
$$W_{,\alpha\beta} = \frac{\partial W_{,\alpha}}{\partial u^\beta} - W_{,\lambda}\Gamma^\lambda_{\alpha\beta},$$
$$W_{,\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial W_{,\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} - W_{,\lambda\beta}\Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} - W_{,\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta\gamma}.$$

Damit wird (6, 37) zu

$$
\begin{aligned}
&W_{,111} = W_{,11}\,(\lg K)_{,1},\\
&W_{,222} = W_{,22}\,(\lg K)_{,2},\\
&W_{,112} = W_{,11}\,(\lg K)_{,2} - 2\,W_{,1}\,K g_{12},\\
&W_{,221} = W_{,22}\,(\lg K)_{,1} - 2\,W_{,2}\,K g_{12},\\
&W_{,211} = W_{,121} = W_{,11}\,(\lg K)_{,2} - 3\,W_{,1}\,K g_{12},\\
&W_{,122} = W_{,212} = W_{,22}\,(\lg K)_{,1} - 3\,W_{,2}\,K g_{12}.
\end{aligned}
\tag{6, 38}
$$

Mit Hilfe der Tensoren $\delta_\alpha^\lambda = \begin{cases} 0 \text{ für } \alpha \neq \lambda \\ 1 \;\;,, \;\; \alpha = \lambda \end{cases}$, $\varepsilon_\alpha^{\cdot\lambda}$ kann man diese verschiedenen Relationen zusammenfassend schreiben:

$$
\begin{aligned}
(6, 39)\quad W_{,\alpha\beta\gamma} = W_{,\lambda\mu}\{ &\tfrac{1}{2}\,(\delta_\alpha^\lambda \delta_\beta^\mu - \varepsilon_\alpha^{\cdot\lambda}\varepsilon_\beta^{\cdot\mu})\,(\lg K)_{,\gamma} +\\
&+ \tfrac{1}{2}\,(\delta_\alpha^\lambda \delta_\gamma^\mu - \varepsilon_\alpha^{\cdot\lambda}\varepsilon_\gamma^{\cdot\mu})\,(\lg K)_{,\beta} +\\
&+ \tfrac{1}{2}\,(\varepsilon_\beta^{\cdot\lambda}\delta_\gamma^\mu + \delta_\beta^\lambda \varepsilon_\gamma^{\cdot\mu})\,\varepsilon_\alpha^{\cdot\varrho}\,(\lg K)_{,\varrho}\} -\\
&- K\{W_{,\alpha}\,g_{\beta\gamma} + W_{,\beta}\,g_{\gamma\alpha} + 2\,W_{,\gamma}\,g_{\alpha\beta}\}.
\end{aligned}
$$

Das ist aber eine Tensorgleichung, die unmittelbar die Rückkehr zu *beliebigen* Parametern gestattet.

Ergebnis. Für Minimalparameter läßt sich die Frage nach der Widerspruchsfreiheit des Ausgangssystems zurückführen auf diejenige eines linearen Systems in einer unbekannten Funktion W (6, 39). Infolge ihrer tensoriellen Gestalt sind diese Gleichungen jedoch auch für beliebige Parameter gültig, so daß die Integrabilität von (6, 13), (6, 14), (6, 2) gleichwertig mit derjenigen von (6, 39) ist. Diese läßt sich für eine gegebene (genügend oft differenzierbare) Metrik stets feststellen.

Zum Abschluß wollen wir als Beispiel für die Auswertung der bei dieser Behandlungsmethode häufig auftretenden Rotationsbildung die geodätischen Netze betrachten. Für sie ist $\mathfrak{g} = 0$ notwendig und hinreichend. Nach (2, 8) ist das Verschwinden des geodätischen Netzvektors gleichwertig mit den Gleichungen

$$R\left(\frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}^2}\right) = 0, \qquad R\left(\frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{w}^2}\right) = 0,$$

d. h. die Vektorfelder $\frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}^2}$, $\frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{w}^2}$ sind wirbelfrei:

$$\frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}^2} = \operatorname{grad}\varphi, \qquad \frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{w}^2} = \operatorname{grad}\psi.$$

Damit werden die Funktionen φ und ψ zum Träger der Netzeigenschaften. Unter Verwendung des ersten Beltramischen Differentialoperators

$$\nabla\varphi = g^{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial u^\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial u^\beta}, \qquad \nabla(\varphi,\psi) = g^{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial u^\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial u^\beta}$$

erhält man hieraus

$$\mathfrak{v} = \frac{\operatorname{grad}\varphi}{\nabla\varphi}, \quad \mathfrak{w} = \frac{\operatorname{grad}\psi}{\nabla\psi}. \tag{6,4}$$

Nach (1, 41) ist:

$$\mathfrak{v}^2 = \frac{1}{\cos^2\frac{\omega}{2}} = \frac{1}{\nabla\varphi}, \quad \mathfrak{w}^2 = \frac{1}{\sin^2\frac{\omega}{2}} = \frac{1}{\psi}, \quad \mathfrak{v}\circ\mathfrak{w} = \frac{\nabla(\varphi,\psi)}{\nabla\varphi\,\nabla\psi} = 0.$$

Für die Funktionen φ, ψ gelten also die Differentialgleichungen:

$$\nabla\varphi + \nabla\psi = 1;\ \nabla(\varphi,\psi) = 0. \tag{6,51}$$

Sind umgekehrt in einem Gebiet G φ und ψ Lösungen von (6, 51) mit $\nabla\varphi \neq 0$, $\nabla\psi \neq 0$, so bestimmen die nach (6, 4) gebildeten Netzvektoren in G ein geodätisches Netz. Aus (6, 51) folgt

$$\nabla(\varphi \pm \psi) = \nabla\varphi + \nabla\psi \pm 2\nabla(\varphi,\psi) = 1.$$

Nach (1, 5) sind die Vektoren $\mathfrak{t}^{(\varphi)} = \operatorname{grad}(\varphi \pm \psi)$ die Tangentialvektoren der Netzkurven, die Kurven $\varphi \pm \psi = \text{const}$ daher ihre Orthogonaltrajektorien und die Funktionen $\varphi \pm \psi$ der von einer festen Trajektorie aus gerechnete Bogen auf den geodätischen Linien des Netzes.

Das System (1, 42)

$$w_\alpha = -\operatorname{ctg}\frac{\omega}{2}\,\varepsilon_\alpha^{\cdot\lambda}\,v_\lambda$$

geht über in

$$\frac{\partial\psi}{\partial u^\alpha} = -\operatorname{ctg}\frac{\omega}{2}\,\frac{\sin^2\frac{\omega}{2}}{\cos^2\frac{\omega}{2}}\,\varepsilon_\alpha^{\cdot\lambda}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u^\lambda} = -\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\,\varepsilon_\alpha^{\cdot\lambda}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u^\lambda},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial u^\alpha} = -\sqrt{\frac{1-\nabla\varphi}{\nabla\varphi}}\,\varepsilon_\alpha^{\cdot\lambda}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u^\lambda}. \tag{6,52}$$

(6, 52) ist gleichwertig mit (6, 51).

Um die Integrabilitätsbedingungen zu erhalten, differenzieren wir

$$\psi_{,\alpha\beta} = -\left(\sqrt{\frac{1-\nabla\varphi}{\nabla\varphi}}\right)_{,\beta}\varepsilon_\alpha^{\cdot\lambda}\,\varphi_{,\lambda} - \sqrt{\frac{1-\nabla\varphi}{\nabla\varphi}}\,\varepsilon_\alpha^{\cdot\lambda}\,\varphi_{,\lambda\beta}$$

und bilden

$$\varepsilon^{\alpha\beta}\psi_{,\alpha\beta} = -R(\operatorname{grad}\psi) = 0 = -g^{\lambda\beta}\varphi_{,\lambda}\left(\sqrt{\frac{1-\nabla\varphi}{\nabla\varphi}}\right)_{,\beta} - \sqrt{\frac{1-\nabla\varphi}{\nabla\varphi}}\,g^{\gamma\beta}\varphi_{,\lambda\beta}.$$

Unter Verwendung des zweiten Beltramischen Differentialoperators

$$\Delta\varphi = g^{\lambda\beta}\varphi_{,\lambda\beta}$$

erhält man die gesuchte Bedingung als Differentialgleichung für die Funktion φ in der Gestalt

$$\Delta\varphi + \sqrt{\frac{\nabla\varphi}{1-\nabla\varphi}}\,\nabla\left(\varphi, \sqrt{\frac{1-\nabla\varphi}{\nabla\varphi}}\right) = 0;$$

(6, 53)

$$\Delta\varphi + \nabla\left(\varphi, \lg\sqrt{\frac{1-\nabla\varphi}{\nabla\varphi}}\right) = 0.$$

(Die linke Seite dieser Gleichung hängt eng mit dem Bonnetschen Ausdruck für die geodätische Krümmung der Kurvenschar $\varphi = \text{const}$ zusammen.) Wie man leicht feststellt und wie auch aus der Symmetrie von (6, 51) folgt, genügt die Funktion ψ ebenfalls der Gleichung (6, 53); φ und ψ sind einander durch das System (6, 52) zugeordnet („konjugiert"). Jede Lösung von (6, 53) führt zu einem geodätischen Netz und umgekehrt.

Wir führen die Kurven $\varphi = \text{const}$, $\psi = \text{const}$ als Parameterlinien ein:

$$\bar{u}^1 = \varphi(u^1, u^2), \qquad \bar{u}^2 = \psi(u^1, u^2),$$

$$\bar{g}^{\alpha\beta} = g^{\lambda\mu}\frac{\partial\bar{u}^\alpha}{\partial u^\lambda}\frac{\partial\bar{u}^\beta}{\partial u^\mu}; \qquad \bar{g}^{11} = \nabla\varphi = \cos^2\frac{\omega}{2} \qquad \bar{g}^{12} = \nabla(\varphi,\psi) = 0,$$

$$\bar{g}^{22} = \nabla\psi = \sin^2\frac{\omega}{2}$$

$$\bar{g} = \frac{1}{\cos^2\frac{\omega}{2}\sin^2\frac{\omega}{2}} = g\left[\frac{\partial(u^1u^2)}{\partial(\bar{u}^1\bar{u}^2)}\right]^2,$$

$$\frac{\partial(\bar{u}^1\bar{u}^2)}{\partial(u^1u^2)} = \frac{\partial\varphi}{\partial u^1}\frac{\partial\psi}{\partial u^2} - \frac{\partial\varphi}{\partial u^2}\frac{\partial\psi}{\partial u^1} \neq 0.$$

Für das Linienelement des R_2 erhält man so

$$ds^2 = \frac{d\varphi^2}{\cos^2\frac{\omega}{2}} + \frac{d\psi^2}{\sin^2\frac{\omega}{2}},$$

d. h. die Kurven $\varphi = \text{const}$, $\psi = \text{const}$ bilden ein System geodätischer Ellipsen und Hyperbeln.

Wir wollen jetzt die Netzinvariante $R(\mathfrak{r})$ in diesem Parametersystem berechnen. Für die transformierten Komponenten der Netzvektoren erhält man:

$$\bar{v}_\alpha = v_\lambda\frac{\partial u^\lambda}{\partial\bar{u}^\alpha} = \sum_\lambda v_\lambda(-1)^{\lambda+\alpha}\frac{\partial\bar{u}^{3-\alpha}}{\partial u^{3-\lambda}}\frac{\partial(u^1u^2)}{\partial(\bar{u}^1\bar{u}^2)},$$

$$\bar{v}_1 = \left(\frac{\varphi_{,1}}{\nabla\varphi}\psi_{,2} - \frac{\varphi_{,2}}{\nabla\varphi}\psi_{,1}\right)\frac{\partial(u^1u^2)}{\partial(\bar{u}^1\bar{u}^2)} = \frac{1}{\nabla\varphi} = \frac{2}{\cos^2\frac{\omega}{2}},$$

$$\bar{v}_2 = \left(-\frac{\varphi_{,1}}{\nabla\varphi}\varphi_{,2} + \frac{\varphi_{,2}}{\nabla\varphi}\varphi_{,1}\right)\frac{\partial(u^1u^2)}{\partial(\bar{u}^1\bar{u}^2)} = 0$$

und entsprechend

$$\bar{w}_1 = \left(\frac{\psi_{,1}}{\nabla\psi}\varphi_{,2} - \frac{\varphi_{,1}}{\nabla\psi}\psi_{,2}\right)\frac{\partial(u^1u^2)}{\partial(\bar{u}^1\bar{u}^2)} = 0,$$

$$\bar{w}_2 = \left(\frac{\psi_{,1}}{\nabla\psi}\varphi_{,2} - \frac{\varphi_{,1}}{\nabla\psi}\varphi_{,1}\right)\frac{\partial(u^1u^2)}{\partial(\bar{u}^1\bar{u}^2)} = -\frac{1}{\nabla\psi} = -\frac{1}{\sin^2\frac{\omega}{2}}.$$

Damit findet man

$$R(\mathfrak{v}) = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial\bar{v}_2}{\partial\bar{u}_1} - \frac{\partial\bar{v}_1}{\partial\bar{u}^2}\right) = -\operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}\frac{\partial\omega}{\partial\bar{u}^2},$$

$$R(\mathfrak{w}) = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial\bar{w}_2}{\partial\bar{u}^1} - \frac{\partial\bar{w}_1}{\partial\bar{u}^2}\right) = +\operatorname{ctg}^2\frac{\omega}{2}\frac{\partial\omega}{\partial\bar{u}^1}.$$

Für die Komponenten des Vektors $\mathfrak{r} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{v}^2\mathfrak{w}^2}}(\mathfrak{v}R(\mathfrak{w}) - \mathfrak{w}R(\mathfrak{v}))$ erhalten wir

$$\bar{r}_1 = \cos\frac{\omega}{2}\sin\frac{\omega}{2}\left\{\frac{1}{\cos^2\frac{\omega}{2}}\operatorname{ctg}^2\frac{\omega}{2}\frac{\partial\omega}{\partial\bar{u}^1}\right\} = \operatorname{ctg}\frac{\omega}{2}\frac{\partial\omega}{\partial\bar{u}^1} = \frac{\partial\lg\sin^2\frac{\omega}{2}}{\partial\bar{u}^1},$$

$$\bar{r}_2 = \cos\frac{\omega}{2}\sin\frac{\omega}{2}\left\{-\frac{1}{\sin^2\frac{\omega}{2}}\operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}\frac{\partial\omega}{\partial\bar{u}^2}\right\} = -\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\frac{\partial\omega}{\partial\bar{u}^2} = \frac{\partial\lg\cos^2\frac{\omega}{2}}{\partial\bar{u}^2}$$

oder

$$R(\mathfrak{r}) = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial\bar{r}_2}{\partial\bar{u}^1} - \frac{\partial\bar{r}_1}{\partial\bar{u}^2}\right) = \cos\frac{\omega}{2}\sin\frac{\omega}{2}\frac{\partial^2\lg\operatorname{ctg}^2\frac{\omega}{2}}{\partial\bar{u}^1\partial\bar{u}^2}.$$

Das Verschwinden dieser Invariante charakterisiert ein rhombisches Netz. Für geodätische rhombische Netze ist notwendig

$$\frac{\partial^2\lg\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}{\partial\varphi\,\partial\psi} = 0. \tag{6,61}$$

Diese Aussage „im Kleinen" läßt sich durch Integration umformen. Betrachten wir ein beliebiges Netzviereck $ABCD$ im Parameternetz $\varphi = \text{const}$, $\psi = \text{const}$, d. h. also im Winkelhalbierendennetz des geodätischen Netzes, so folgt:

$$\iint_{\square}\frac{\partial^2\lg\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}{\partial\varphi\,\partial\psi}d\varphi\,d\psi = 0,$$

$$\lg\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\Big|_C - \lg\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\Big|_B - \lg\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\Big|_D + \lg\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\Big|_A = 0$$

oder

$$\operatorname{tg}\frac{\omega_A}{2}\operatorname{tg}\frac{\omega_C}{2} = \operatorname{tg}\frac{\omega_B}{2}\operatorname{tg}\frac{\omega_D}{2}. \tag{6,62}$$

Wenn also in einem beliebigen geodätischen Netz für die Netzwinkel in den Ecken eines jeden Viereckes des zugehörigen Winkelhalbierendennetzes die Gleichung (6, 62) erfüllt ist, so ist dieses Netz rhombisch (Aussage „im Großen").

Integration von (6, 61) ergibt: $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = \frac{A(\varphi)}{B(\psi)}$ mit willkürlichen Funktionen $A(\varphi)$, $B(\psi)$. Damit wird

$$\cos^2\frac{\omega}{2} = \frac{B^2}{A^2+B^2}, \quad \sin^2\frac{\omega}{2} = \frac{A^2}{A^2+B^2},$$

$$ds^2 = \left(\left(\frac{1}{A^2_{(\varphi)}}\right) + \left(\frac{1}{B^2_{(\psi)}}\right)\right)(A^2_{(\varphi)}\,d\varphi^2 + B^2_{(\psi)}\,d\psi^2).$$

Bei geeigneter Normierung erhalten wir so auch das bekannte Resultat: Das Winkelhabierendennetz des geodätisch rhombischen Netzes ist ein Liouvillesches Netz.

(Eingegangen am 30. März 1940.)

Schrittweise Näherungen bei Integralgleichungen und Eigenwertschranken.

Von

L. Collatz in Karlsruhe.

1. Ziel des Aufsatzes.

Für den ersten Eigenwert von Eigenwertproblemen gewöhnlicher Differentialgleichungen, bei denen nur positive Eigenwerte vorhanden sind, gab G. Temple[1]) scharfe Abschätzungen an. In der folgenden Mitteilung sollen zunächst entsprechende Ergebnisse aufgestellt werden für Eigenwertprobleme bei linearen Integralgleichungen zweiter Art mit symmetrischem Kern. Der Fall, daß der Kern nicht definit ist, wird auf den Fall des definiten Kerns zurückgeführt. Es werden für den ersten Eigenwert obere und untere Schranken angegeben unter der Voraussetzung, daß die ersten beiden Eigenwerte verschiedene Beträge haben. Der Beweis hierfür kann ohne Benutzung des Entwicklungssatzes geführt werden (im Hinblick auf numerische Anwendbarkeit der Ergebnisse ist es wichtig, daß man nicht voraussetzen muß, die im folgenden auftretende Ausgangsfunktion $F_0(s)$ sei dem Kern erreichbar).

Unter der Voraussetzung, daß die $(n+1)$ ersten Eigenwerte voneinander verschiedene Beträge haben, werden obere und untere Schranken für den n-ten Eigenwert, allerdings unter Heranziehung des Entwicklungssatzes, aufgestellt. Im Hinblick auf die Anwendungen wäre es erwünscht, wenn ein Beweis für die Schranken ohne Benutzung des Entwicklungssatzes gefunden würde.

Zugrunde gelegt wird die Integralgleichung

$$\varphi(s) = \lambda \int K(s,t)\, \varphi(t)\, dt, \tag{1.1}$$

wo $K(s,t) = K(t,s)$ ein symmetrischer Kern sei, der quadratisch integrabel ist und eine mittlere Stetigkeit besitzt[2]). Die Buchstaben s und t mögen jeweils die Gesamtheit der unabhängigen Veränderlichen verkörpern und Integrale ohne Angabe der Grenzen mögen stets über das Grundgebiet erstreckt werden, im einfachsten Falle von nur einer unabhängigen Veränderlichen etwa über das endliche Grundintervall a, b. Alle auftretenden Größen werden im Reellen betrachtet.

[1]) G. Temple-W. G. Bickley, On Rayleigh's Principle, S. 21—23. London 1933.

[2]) Vgl. G. Hamel, Integralgleichungen, S. 68. Berlin, Jul. Springer, 1937.

2. Das Verfahren der schrittweisen Näherungen

besteht darin, daß man von einer willkürlichen, quadratisch integrablen Funktion $F_0(s)$ ausgehend, nacheinander Funktionen $F_1(s), F_2(s) \ldots$ bestimmt nach der Vorschrift

$$F_n(s) = \int K(s,t) F_{n-1}(t)\,dt \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{2.1}$$

Bei Einführung der iterierten Kerne[3])

$$K_n(s,t) = \int K_{n-1}(s,u) K(u,t)\,du \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

mit $K_1(s,t) = K(s,t)$ kann man F_n direkt durch F_0 ausdrücken:

$$F_n(s) = \int K_n(s,t) F_0(t)\,dt. \tag{2.2}$$

Nun werden nach dem Muster von H. A. Schwarz[4]) die Größen a_n eingeführt

$$a_n = \int F_m(s) F_{n-m}(s)\,ds \quad (\text{für } n = 0, 1, 2, \ldots, m \leqq n). \tag{2.3}$$

Diese Größen hängen nur scheinbar von m ab, denn es ist wegen der Symmetrie des Kerns

$$\int F_m(s) F_k(s)\,ds = \int F_m(s) \int K(s,t) F_{k-1}(t)\,dt\,ds$$
$$= \iint F_m(s) K(s,t)\,ds F_{k-1}(t)\,dt = \int F_{m+1}(t) F_{k-1}(t)\,dt.$$

Das Integral hängt also nur von der Summe $m + k$ der Indizes ab und die Bezeichnung a_n in (2.3) ist gerechtfertigt; insbesondere ist

$$a_{2n} = \int F_n^2\,ds \geqq 0. \tag{2.4}$$

Für das Folgende setzen wir voraus, daß die a_n, soweit sie benutzt werden, nicht verschwinden. Es soll also insbesondere $F_n \not\equiv 0$ sein. Ferner werden (ebenfalls nach dem Muster von H. A. Schwarz) die Größen

$$\mu_n = \frac{a_{n-1}}{a_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2.5}$$

eingeführt. Über die μ_n können Aussagen gemacht werden bei Betrachtung der beiden folgenden quadratischen Formen Q_1 und Q_2, die für beliebige reelle Werte von α und β nur nichtnegative Werte annehmen können:

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= \int (\alpha F_n + \beta F_{n+1})^2\,ds = \alpha^2 a_{2n} + 2\alpha\beta a_{2n+1} + \beta^2 a_{2n+2} \\ Q_2 &= \int (\alpha F_n + \beta F_{n+2})^2\,ds = \alpha^2 a_{2n} + 2\alpha\beta a_{2n+2} + \beta^2 a_{2n+4} \end{aligned}\right\} \quad n = 0, 1, \ldots.$$

[3]) G. Hamel, a. a. O., S. 26.

[4]) H. A. Schwarz, Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd. I, S. 241–265. Berlin 1890.

Die Koeffizientendeterminanten sind also nichtnegativ, d. h.

$$\left.\begin{aligned} a_{2n}\,a_{2n+2} - a_{2n+1}^2 &\geqq 0 \\ a_{2n}\,a_{2n+4} - a_{2n+2}^2 &\geqq 0 \end{aligned}\right\} \quad n = 0, 1, \ldots$$

oder

$$\left.\begin{aligned} &\left|\frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}\right| = |\mu_{2n+1}| \geqq |\mu_{2n+2}| \\ \text{und} \\ &\frac{a_{2n}}{a_{2n+2}} = \mu_{2n+1}\,\mu_{2n+2} \geqq \mu_{2n+3}\,\mu_{2n+4} \end{aligned}\right\} \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{2.6, 2.7}$$

d. h.

$$\mu_1 \cdot \mu_2 \geqq \mu_3 \cdot \mu_4 \geqq \mu_5 \cdot \mu_6 \geqq \cdots \geqq 0, \tag{2.8}$$

denn die Produkte $\mu_{2n+1} \cdot \mu_{2n+2}$ sind als Quotienten $\frac{a_{2n}}{a_{2n+2}}$ nach (2. 4) nichtnegativ. Diese Produkte bilden also eine monoton nicht wachsende, beschränkte Folge, sie konvergieren also. (Die Beträge $|\mu_n|$ dagegen brauchen keine monotone Folge zu bilden, wie das Zahlenbeispiel in **10.** zeigt!)

Allgemein gilt

$$|\mu_{2k-1}| \geqq |\mu_{2l}| \quad \text{für} \quad k \leqq l,$$

denn

$$|\mu_{2k-1}|^2 \geqq |\mu_{2k-1}| \cdot |\mu_{2k}| \geqq |\mu_{2l-1}| \cdot |\mu_{2l}| \geqq |\mu_{2l}|^2.$$

3. Die μ_n im Spezialfall der positiv definiten Kerne.

Dieser Spezialfall verdient besondere Beachtung, weil der allgemeine Fall eines nicht positiv definiten Kerns (nach 8.) auf den hier behandelten Fall zurückgeführt werden kann. Es seien also jetzt alle Eigenwerte positiv, oder nach einem bekannten Satz[5]) ist dann

$$\iint K(s,t)\,w(s)\,w(t)\,ds\,dt \geqq 0$$

für alle quadratisch integrablen Funktionen $w(s)$. Setzt man hier $w = F_n$, so folgt

$$\iint K(s,t)\,F_n(s)F_n(t)\,ds\,dt = \int F_{n+1}(t)F_n(t)dt = a_{2n+1} \geqq 0.$$

Es sind also jetzt sämtliche a_n nichtnegativ. Setzt man ferner

$$w = \alpha F_n + \beta F_{n+1} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

ein, so entsteht eine quadratische Form Q_3, die für beliebige reelle α und β nur nichtnegative Werte annehmen kann. Die Ausrechnung ergibt

$$\begin{aligned} Q_3 &= \iint K(s,t)\,[\alpha F_n(s) + \beta F_{n+1}(s)]\,[\alpha F_n(t) + \beta F_{n+1}(t)]\,ds\,dt \\ &= \int [\alpha F_{n+1}(t) + \beta F_{n+2}(t)] \cdot [\alpha F_n(t) + \beta F_{n+1}(t)]\,dt \\ &= \alpha^2 a_{2n+1} + 2\,\alpha\beta a_{2n+2} + \beta^2 a_{2n+3} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \end{aligned}$$

---

[5]) G. Hamel, a. a. O., S. 84.

Da wieder die Koeffizientendeterminante nichtnegativ ist, folgt

$$a_{2n+1}\, a_{2n+3} \geqq a_{2n+2}^2 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

oder

$$\mu_{2n+2} \geqq \mu_{2n+3}. \tag{3.1}$$

In Verbindung mit (2. 6) gilt also für die nichtnegativen Größen μ_n: In dem Spezialfall des positiv definiten Kerns bilden die μ_n eine monoton abnehmende, beschränkte und somit konvergente Folge.

4. Ein Hilfssatz.

Für das Folgende wird ein Hilfssatz gebraucht: Bezeichnet man mit φ_i eine zum i-ten Eigenwert λ_i gehörige normierte Eigenfunktion (Ordnung nach der Größe der Absolutbeträge $|\lambda_i|$), so ist $\varphi_i \int F_0\, \varphi_i\, ds$ die „Komponente von F_0 in Richtung φ_i". Betrachtet man nun an Stelle von F_0 die Ausgangsfunktion

$$F_0^* = F_0 - \sum_{i=1}^{r} \varphi_i \int F_0\, \varphi_i\, ds \tag{4.1}$$

und bezeichnet man die mit F_0^* auf die gleiche Art wie vorher mit F_0 gebildeten Größen entsprechend durch Sterne: F_n^*, a_n^*, μ_n^*, so sind alle μ_n^* obere Schranken für den $(r+1)$-ten Eigenwert λ_{r+1}, vorausgesetzt, daß $(r+1)$ Eigenwerte existieren und die $(r+1)$ ersten Eigenwerte voneinander verschiedene Beträge haben.

Beweis. Man bestätigt unmittelbar, daß F_0^* zu den ersten r Eigenfunktionen orthogonal ist, denn wegen

$$\int \varphi_i\, \varphi_k\, ds = \begin{cases} 0 \text{ für } i \neq k \\ 1 \text{ für } i = k \end{cases} \tag{4.2}$$

ist

$$\int F_0^*\, \varphi_i\, ds = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Mit F_0^* ist aber auch jedes F_n^* zu den r ersten Eigenfunktionen orthogonal:

$$\int F_n^*\, \varphi_i\, ds = \iint K(s,t)\, F_{n-1}^*(t)\, \varphi_i(s)\, dt\, ds = \int F_{n-1}^*(t)\, \frac{\varphi_i(t)}{\lambda_i}\, ds$$
$$= \frac{1}{\lambda_i^n} \int F_0^*\, \varphi_i\, ds = 0.$$

Die F_n^* lassen sich durch die F_n ausdrücken. Multiplikation der Definitionsgleichung (4. 1) mit $K_n(s,t)$ und Integration über t liefert

$$F_n^* = F_n - \sum_{i=1}^{r} \varphi_i\, \frac{\int F_0\, \varphi_i\, ds}{\lambda_i^n}. \tag{4.3}$$

Ist nun F_1^* bis auf einen Faktor mit F_0^* identisch, so ist F_0^* eine Eigenfunktion, und zwar keine von den r ersten. In diesem Falle ist also $\mu_a^* = \lambda_a \geqq \lambda_{r+1}$ richtig. Nun sei F_1^* nicht bis auf einen Faktor gleich F_0^*; dann ist die Funktion

$$f(s) = F_0^* - \mu_1^* F_1^*$$

nicht identisch Null. Es sei ferner $u = u(s, \lambda)$ die Lösung der inhomogenen Integralgleichung

$$u(s) - \lambda \int K(s,t)\, u(t)\, dt = f(s); \tag{4.4}$$

$u(s, \lambda)$ existiert, solange λ kein Eigenwert ist, und kann mit Hilfe des lösenden Kerns angegeben werden[6]).

$$u(s) = f(s) + \lambda \int K(s,t)\, f(t)\, dt + \lambda^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s) \int \varphi_i(t)\, f(t)\, dt}{\lambda_i (\lambda_i - \lambda)}. \tag{4.5}$$

Da nun F_0^* und F_1^* und damit auch f zu den ersten r Eigenfunktionen orthogonal ist, beginnt die Summe erst mit $i = r + 1$. Die durch die rechte Seite von (4.5) dargestellte Funktion von s und λ ist daher auch für $\lambda = \lambda_i$ $(i = 1, 2, \ldots r)$ stetig, da die Summe für eine hinreichend kleine Umgebung von $\lambda = \lambda_i$ gleichmäßig in λ konvergiert.

Nun wird eine weitere Hilfsfunktion betrachtet

$$W(\lambda) = \int u(s, \lambda)\, f(s)\, ds.$$

Für $\lambda = \mu_1^*$ ist F_0^* die Lösung der Integralgleichung (4.4), also $u(s, \mu_1^*) = F_0^*$ und

$$W(\mu_1^*) = \int F_0^* (F_0^* - \mu_1^* F_1^*)\, ds = a_0^* - \mu_1^* a_1^* = 0.$$

Für $\lambda = 0$ ist $u(s) = f(s)$ und $W(0) = \int f^2 ds > 0$.

Für zwei verschiedene Werte λ, μ gilt

$$\begin{aligned} W(\lambda) &= \int u(s, \lambda)\, f(s)\, ds \\ &= \int u(s, \lambda)\, u(s, \mu)\, ds - \mu \iint K(s,t)\, u(s, \lambda)\, u(t, \mu)\, dt\, ds, \\ W(\mu) &= \int u(s, \lambda)\, u(s, \mu)\, ds - \lambda \iint K(s,t)\, u(s, \mu)\, u(t, \lambda)\, dt\, ds, \\ \frac{W(\lambda) - W(\mu)}{\lambda - \mu} &= \iint K(s,t)\, u(s, \lambda)\, u(t, \mu)\, dt\, ds. \end{aligned}$$

Grenzübergang $\mu \to \lambda$ ergibt

$$\frac{dW}{d\lambda} = \iint K(s,t)\, u(s, \lambda)\, u(t, \lambda)\, dt\, ds \geqq 0.$$

Würde zwischen 0 und μ_1^* (außer $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$) kein weiterer Eigenwert liegen, so wäre $u(s, \lambda)$ für alle λ mit $0 \leqq \lambda \leqq \mu_1^*$ nach (4.4) definiert und man hätte in $W(0) > 0$, $\frac{dW}{d\lambda} \geqq 0$, $W(\mu_1^*) = 0$ einen Widerspruch; also ist $\mu_1^* \geqq \lambda_{r+1}$.

---

[6]) G. Hamel, a. a. O., S. 82, Gleichung (117).

Da mit F_0^* auch alle weiteren F_n^* zu den ersten r Eigenfunktionen orthogonal sind, gilt ebenso $\mu_n^* \geqq \lambda_{r+1}$.

5. Schranken für den ersten Eigenwert λ_1 bei positiv definiten Kernen.

Der eben bewiesene Hilfssatz liefert für $r = 0$, daß alle $\mu_n \geqq \lambda_1$ sind; man hat damit obere Schranken für λ_1. Untere Schranken können folgendermaßen gewonnen werden: Der Hilfssatz sagt für $r = 1$ aus: $\mu_n^* \geqq \lambda_2$. Nun wird μ_n^* durch die μ_ν ausgedrückt. Es ist nach (4. 3)

$$F_n - \lambda_1 F_{n+1} = F_n^* - \lambda_1 F_{n+1}^*$$

und daher

$$\begin{aligned} (5.\,1) \qquad a_n - \lambda_1 a_{n+1} &= \int F_0 (F_n - \lambda_1 F_{n+1})\, a s \\ &= \int (F_0^* + \varphi_1 \int F_0 \varphi_1 d s)\, (F_n^* - \lambda_1 F_{n+1}^*)\, d s, \\ &= a_n^* - \lambda_1 a_{n+1}^*, \end{aligned}$$

da φ_1 zu allen F_ν^* orthogonal ist. Nach (2. 5) folgt

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mu_n - \mu_{n+1}}{\mu_{n+1} - \lambda_1} + 1\right) \mu_{n+1} &= \frac{\mu_n - \lambda_1}{\mu_{n+1} - \lambda_1} \mu_{n+1} = \frac{a_{n-1} - \lambda_1 a_n}{a_n - \lambda_1 a_{n+1}} = \frac{a_{n-1}^* - \lambda_1 a_n^*}{a_n^* - \lambda_1 a_{n+1}^*} \\ &= \frac{\mu_n^* - \lambda_1}{\mu_{n+1}^* - \lambda_1} \mu_{n+1}^* \geqq \mu_{n+1}^* \geqq \lambda_2. \end{aligned}$$

Dabei ist $\mu_n^* \geqq \mu_{n+1}^* \geqq \lambda_2 > \lambda_1$ benutzt worden. Also ist unter der Voraussetzung $\lambda_2 > \mu_{n+1}$

$$(5.\,2) \qquad 0 \leqq \mu_{n+1} - \lambda_1 \leqq \frac{\mu_n - \mu_{n+1}}{\dfrac{\lambda_2}{\mu_{n+1}} - 1}.$$

6. Schranken für die höheren Eigenwerte bei positiv definiten Kernen.

In diesem Abschnitt wird der Entwicklungssatz herangezogen und bei der Abschätzung für den n-ten Eigenwert λ_n vorausgesetzt, daß die $(n + 1)$ ersten Eigenwerte voneinander verschieden sind

$$(6.\,1) \qquad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \lambda_{n+1}.$$

Wird F_0 als quadratisch integrabel angenommen, so ist F_1 nach (2. 1) quellenmäßig dargestellt, also nach den Eigenfunktionen in eine gleichmäßig und absolut konvergente Reihe entwickelbar[7])

$$F_1(s) = c_r \varphi_r(s) + c_{r+1} \varphi_{r+1}(s) + \cdots = \sum_{i=r}^{\infty} c_i \varphi_i(s).$$

Bei dieser Schreibweise ist berücksichtigt, daß F_1 nach den ersten Eigenfunktionen keine Komponenten zu haben braucht. Es sei jedoch $c_r \neq 0$,

[7]) G. Hamel, a. a. O., S. 76, Satz 22.

während beliebige von den weiteren $c_{r+1}, c_{r+2}, \ldots$ verschwinden dürfen. Die hier erlaubte gliedweise Integration ergibt dann

$$F_2(s) = \int K(s,t)\, F_1(t)\, dt = \sum_{i=r}^{\infty} c_i \int K(s,t)\, \varphi_i(t)\, dt = \sum_{i=r}^{\infty} \frac{c_i}{\lambda_i}\, \varphi_i(s)$$

und entsprechend

$$F_n(s) = \sum_{i=r}^{\infty} \frac{c_i}{\lambda_i^{n-1}}\, \varphi_i(s) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{6.2}$$

Für die a_n folgt unter Berücksichtigung von (4.2)

$$a_n = \int F_1(s)\, F_{n-1}(s)\, ds = \sum_{i=r}^{\infty} \frac{c_i^2}{\lambda_i^{n-2}} \qquad (n = 2, 3, \ldots) \tag{6.3}$$

und

$$\mu_n = \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{\sum_{i=r}^{\infty} \frac{c_i^2}{\lambda_i^{n-3}}}{\sum_{i=r}^{\infty} \frac{c_i^2}{\lambda_i^{n-2}}} \qquad (n = 3, 4, \ldots). \tag{6.4}$$

Die Tatsache $\mu_n \geqq \mu_{n+1} \geqq \lambda_r$ kann hier unmittelbar abgelesen werden:

$$\mu_n - \lambda_r = \frac{\sum_{i=r}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_r}{\lambda_i}\right) \frac{c_i^2}{\lambda_i^{n-3}}}{\sum_{i=r}^{\infty} \frac{c_i^2}{\lambda_i^{n-2}}} \geqq 0 \qquad (n = 3, 4, \ldots), \tag{6.5}$$

$$\mu_n - \mu_{n+1} = \frac{\sum_{i=r}^{\infty} \sum_{k>i} \frac{c_i^2}{\lambda_i^{n-3}} \frac{c_k^2}{\lambda_k^{n-3}} (\lambda_k - \lambda_i)^2}{\left(\sum_{i=r}^{\infty} \frac{c_i^2}{\lambda_i^{n-2}}\right)\left(\sum_{k=r}^{\infty} \frac{c_k^2}{\lambda_k^{n-1}}\right)} \geqq 0 \qquad (n = 3, 4, \ldots). \tag{6.6}$$

Nun werden die μ_n als spezielle Zahlen $\mu_n^{(0)}$ von allgemeiner eingeführten Zahlen $\mu_n^{(l)}$ betrachtet:

$$\mu_n^{(l)} = \frac{\mu_n^{(l-1)} - \lambda_{l+r-1}}{\mu_{n+1}^{(l-1)} - \lambda_{l+r-1}}\, \mu_{n+1}^{(l-1)} \qquad (n = 3, 4, \ldots), \quad (l = 1, 2, 3, \ldots), \tag{6.7}$$

$$\mu_n^{(0)} = \mu_n.$$

Die $\mu_n^{(l)}$ lassen sich durch die c_i ausdrücken. Es ist nach (6.4) und (6.5)

$$\mu_n^{(1)} = \frac{\mu_n^{(0)} - \lambda_r}{\mu_{n+1}^{(0)} - \lambda_r}\, \mu_{n+1}^{(0)} = \frac{\sum_{i=r+1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_r}{\lambda_i}\right) \frac{c_i^2}{\lambda_i^{n-3}}}{\sum_{i=r+1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_r}{\lambda_i}\right) \frac{c_i^2}{\lambda_i^{n-2}}}.$$

Führt man für $i > r$ die Größen ein:

$$c_{i,l+1}^2 = \left(1 - \frac{\lambda_{r+l}}{\lambda_i}\right) c_{i,l}^2 \text{ mit } c_{i,0}^2 = c_i^2, \qquad (l = 0, 1, \ldots),$$

so ist also die Formel

$$\mu_n^{(l)} = \frac{\sum_{i=r+l}^{\infty} \frac{c_{i,l}^2}{\lambda_i^{n-3}}}{\sum_{i=r+l}^{\infty} \frac{c_{i,l}^2}{\lambda_i^{n-2}}} \tag{6.8}$$

für $l = 1$ bewiesen. Daß sie für alle l gilt, sieht man durch vollständige Induktion ein. Sie gelte für $l-1$; dann ist

$$\mu_n^{(l)} = \frac{\mu_n^{(l-1)} - \lambda_{l+r-1}}{\mu_{n+1}^{(l-1)} - \lambda_{l+r-1}} \mu_{n+1}^{(l-1)} = \frac{\sum_{i=r+l}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_{r+l-1}}{\lambda_i}\right) \frac{c_{i,l-1}^2}{\lambda_i^{n-3}}}{\sum_{i=r+l}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_{r+l-1}}{\lambda_i}\right) \frac{c_{i,l-1}^2}{\lambda_i^{n-2}}} = \frac{\sum_{i=r+l}^{\infty} \frac{c_{i,l}^2}{\lambda_i^{n-3}}}{\sum_{i=r+l}^{\infty} \frac{c_{i,l-1}^2}{\lambda_i^{n-2}}}$$

wie (6.8) behauptet. Ferner ist

$$\mu_n^{(l)} - \lambda_{r+l} = \frac{\sum_{i=r+l+1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_{r+l}}{\lambda_i}\right) \frac{c_{i,l}^2}{\lambda_i^{n-3}}}{\sum_{i=r+l}^{\infty} \frac{c_{i,l}^2}{\lambda_i^{n-2}}} \geqq 0,$$

$$\mu_n^{(l)} - \mu_{n+1}^{(l)} = \frac{\sum_{i=r+l}^{\infty} \sum_{k>i} \frac{c_{i,l}^2}{\lambda_i^{n-3}} \frac{c_{k,l}^2}{\lambda_k^{n-3}} (\lambda_k - \lambda_i)^2}{\left(\sum_{i=r+l}^{\infty} \frac{c_{i,l}^2}{\lambda_i^{n-2}}\right)\left(\sum_{k=r+l}^{\infty} \frac{c_{k,l}^2}{\lambda_k^{n-1}}\right)} \geqq 0.$$

Die $\mu_n^{(l)}$ bilden also für jedes l eine monoton abnehmende, beschränkte (z. B. durch λ_{r+l}), also konvergente Zahlenfolge. Der Grenzwert ist, wie man aus (6.4) abliest, im Falle $c_{r+l} \neq 0$ gleich λ_{r+l}, im Falle $c_{r+l} = 0$ (wenn das erste nichtverschwindende c den Index q hat), gleich λ_q. Betrachten wir den Fall $c_{r+l} \neq 0$, so gibt es wegen der Konvergenz der $\mu_n^{(l)}$ gegen λ_{r+l} ein n, so daß

$$\lambda_{r+l+1} > \mu_{n+p}^{(l)} \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Da ferner

$$\mu_n^{(l+1)} = \frac{\mu_n^{(l)} - \lambda_{r+l}}{\mu_{n+1}^{(l)} - \lambda_{r+l}} \mu_{n+1}^{(l)} = \mu_{n+1}^{(l)} \left[1 + \frac{\mu_n^{(l)} - \mu_{n+1}^{(l)}}{\mu_{n+1}^{(l)} - \lambda_{r+l}}\right] \geqq \lambda_{r+l+1}$$

ist, folgt (Zähler und Nenner im Bruch sind nichtnegativ)

$$0 \leqq \mu_{n+1}^{(l)} - \lambda_{r+l} \leqq \frac{\mu_n^{(l)} - \mu_{n+1}^{(l)}}{\frac{\lambda_{r+l+1}}{\mu_{n+1}^{(l)}} - 1}.$$

Damit hat man für λ_{r+l} die Schranken

$$\mu_{n+1}^{(l)} - \frac{\mu_n^{(l)} - \mu_{n+1}^{(l)}}{\frac{\lambda_{r+l+1}}{\mu_{n+1}^{(l)}} - 1} \leqq \lambda_{r+l} \leqq \mu_{n+1}^{(l)}. \tag{6.9}$$

Für $r = 1$, $l = 0$ erhält man wieder die speziellere Formel (5. 2).

7. Schranken für den zweiten Eigenwert λ_2.

Für die praktische Benutzung der Schranken (6. 9) stört es zunächst, daß zur Abschätzung von λ_{r+l} sowohl die niedrigeren Eigenwerte, die in den $\mu_n^{(l)}$ enthalten sind, als auch λ_{r+l+1} gebraucht wird. Nun bleibt die untere Schranke in (6. 9) offenbar gültig, wenn man λ_{r+l+1} durch eine kleinere Zahl l_{r+l+1} ersetzt:

$$l_{r+l+1} \leqq \lambda_{r+l+1}.$$

Eine solche Zahl kann man aus

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2} = \int\int K(s,t)^2 \, ds \, dt = Q \tag{7.1}$$

erhalten, indem man für die ersten $r + l$ Eigenwerte λ_i obere Schranken L_i einsetzt:

$$l_{r+l+1} = \frac{1}{\sqrt{Q - \sum_{i=1}^{r+l} \frac{1}{L_i^2}}}. \tag{7.2}$$

Freilich bleibt die Abschätzung (6. 9) nur dann gültig, wenn die so erhaltene untere Schranke l_{r+l+1} noch größer ist als $\mu_{n+1}^{(l)}$. (In den Beispielen ist diese Bedingung gut erfüllt.) Nun müssen noch die Größen $\mu_n^{(l)}$ in Schranken eingeschlossen werden. Untere und obere Schranken mögen mit $m_n^{(l)}$ bzw. $M_n^{(l)}$ bezeichnet werden:

$$m_n^{(l)} \leqq \mu_n^{(l)} \leqq M_n^{(l)}. \tag{7.3}$$

Die Größen $\mu_n^{(0)} = \mu_n$ sind bekannt und brauchen nicht erst in Schranken eingeschlossen zu werden. Dagegen tritt schon in $\mu_n^{(1)}$ die unbekannte Größe λ_1 auf, von der aber nach (5. 2) Schranken berechenbar sind. Diese Schranken seien l_1, L_1:

$$l_1 \leqq \lambda_1 \leqq L_1.$$

Nun ist $\mu_n^{(1)}$ der Wert der Funktion

$$g(\lambda) = \frac{\mu_n - \lambda}{\mu_{n+1} - \lambda} \mu_{n+1}$$

an der Stelle $\lambda = \lambda_1$; $g(\lambda_1) = \mu_n^{(1)}$. $g(\lambda)$ ist wegen $\mu_n \geqq \mu_{n+1}$ eine in $0 \leqq \lambda < \mu_{n+1}$ mit λ monoton wachsende Funktion, also

$$g(l_1) \leqq \mu_n^{(1)} = g(\lambda_1) \leqq g(L_1).$$

Ist etwa μ_j das letzte berechnete von den Größen μ, so gilt

$$\frac{\mu_n - l_1}{\mu_{n+1} - l_1}\mu_{n+1} \leqq \mu_n^{(1)} \leqq \frac{\mu_n - \mu_j}{\mu_{n+1} - \mu_j}\mu_{n+1}. \tag{7.4}$$

Damit steht der praktischen Anwendung der Formel (6. 9) für den zweiten Eigenwert nichts mehr im Wege. Entsprechend hat man bei den höheren Eigenwerten zu verfahren, wobei aber die Gefahr wächst, daß einmal l_{r+l+1} nicht mehr größer ist als $\mu_{n+1}^{(l)}$ (zufolge der dauernden Abschätzungen, die vorgenommen werden müssen) und dann (6. 9) nicht mehr brauchbar ist.

8. Der allgemeine Fall des nicht notwendig positiv definiten Kernes.

Ist ein beliebiger symmetrischer, stetiger Kern $K(s,t)$ vorgelegt, so ist bekanntlich der iterierte Kern $K_2(s,t)$ positiv definit. Nun werden für die Ausgangsfunktion $F_0(s)$ nicht nur die Größen F_n, a_n, μ_n gebildet, sondern auch die Größen, die man erhalten würde, wenn man von demselben F_0 ausgehend an Stelle des Kerns K den Kern K_2 verwendet, und die durch einen Stern gekennzeichnet werden mögen (der Stern hat jetzt eine andere Bedeutung als in 4.)

$$\left.\begin{aligned} F_0^* &= F_0; \quad F_{n+1}^* = \int K_2(s,t) F_n^*(t)\, dt \\ a_n^* &= \int F_0^* F_n^*\, ds, \quad \mu_{n+1}^* = \frac{a_n^*}{a_{n+1}^*} \end{aligned}\right\} (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Nun besteht nach (2. 2) der Zusammenhang

$$\begin{cases} F_1^* = F_2, \quad F_n^* = F_{2n}, \quad \lambda_i^* = \lambda_i^2, \\ a_n^* = a_{2n}; \quad \mu_n^* = \dfrac{a_{2n-2}}{a_{2n}} = \mu_{2n-1} \cdot \mu_{2n}. \end{cases} \tag{8.1}$$

Für die mit einem Stern versehenen Größen können alle in 5. bis 7. abgeleiteten Schranken angewendet werden, da ja K_2 positiv definit ist. So gilt z. B.

$$0 \leqq \mu_{n+1}^* - \lambda_1^* \leqq \frac{\mu_n^* - \mu_{n+1}^*}{\dfrac{\lambda_2^*}{\mu_{n+1}^*} - 1},$$

also gilt für den allgemeinen Fall des nicht notwendig positiv definiten Kerns

$$0 \leqq \mu_{2n+1}\mu_{2n+2} - \lambda_1^2 \leqq \frac{\mu_{2n-1}\mu_{2n} - \mu_{2n+1}\mu_{2n+2}}{\dfrac{\lambda_2^2}{\mu_{2n+1}\mu_{2n+2}} - 1} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

oder durch die a_n ausgedrückt

$$(8.2) \qquad 0 \leqq \frac{a_{2n}}{a_{2n+2}} - \lambda_1^2 \leqq \frac{\dfrac{a_{2n-2}}{a_{2n}} - \dfrac{a_{2n}}{a_{2n+2}}}{\lambda_2^2 \dfrac{a_{2n+2}}{a_{2n}} - 1}.$$

Entsprechend kann man die Formeln von 6. und 7. auf den allgemeinen Fall übertragen, indem man erst an alle Größen einen Stern anfügt und dann die gesternten Größen nach (8. 1) durch die ungesternten Größen ersetzt.

9. Anwendung auf Eigenwertprobleme bei Differentialgleichungen.

Vorgelegt sei ein Eigenwertproblem für eine unbekannte Funktion f

$$(9.1) \qquad L[f] + \lambda p f = 0,$$

wobei $L[f]$ ein linearer (gewöhnlicher oder partieller) Differentialausdruck in f, λ der Eigenwert und p eine positive stetige Funktion sei. Ferner sei die nötige Zahl von Randbedingungen vorgeschrieben und es existiere eine symmetrische, positiv definite Greensche Funktion $G(s, t)$, so daß die Aussage:

$$L[\varphi] = u$$

und φ erfüllt die Randbedingungen — gleichbedeutend ist mit

$$\varphi(s) = -\int G(s, t)\, u(t)\, dt.$$

Ist f_i eine zum Eigenwert λ_i gehörige Eigenfunktion von (9. 1), so ist $\varphi_i = f_i \sqrt{p}$ eine zu demselben Eigenwert gehörige Eigenfunktion der Integralgleichung mit dem symmetrischen und positiv definiten Kern

$$K(s, t) = G(s, t) \sqrt{p(s)\, p(t)}$$

(mit $G(s, t)$ ist auch $G(s, t) \sqrt{p(s)\, p(t)}$ positiv definit). Nun bildet man ausgehend von einer quadratisch integrablen Funktion $F_0(s)$ mit Benutzung des Kerns $K(s, t)$ nach (2. 1), (2. 3), (2. 5) die Größen F_n, a_n, μ_n:

$$F_n(s) = \int G(s, t) \sqrt{p(s)\, p(t)}\, F_{n-1}(t)\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

also ist

$$L\left[\frac{F_n}{\sqrt{p}}\right] = -\sqrt{p}\, F_{n-1}.$$

Setzt man $F_n(s) = \sqrt{p(s)}\, F_n^*(s)$ (der Stern hat hier wieder eine andere Bedeutung als in 4. und 8.), so kommt man auf die bekannte Vorschrift über schrittweise Näherungen bei Differentialgleichungen

$$L[F_n^*] + p F_{n-1}^* = 0,$$
$$a_n = \int F_m F_{n-m}\, ds = \int p F_m^* F_{n-m}^*\, ds,$$
$$\mu_n = \frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

Die Schranken (5. 2) für den ersten Eigenwert bewies Temple[9]), aber durch diesen Zusammenhang sind auch die in 6. und 7. genannten Schranken für die höheren Eigenwerte bei Differentialgleichungen anwendbar.

10. Zahlenbeispiel.

Es werde die Integralgleichung

$$\varphi(s) = \lambda \int_0^1 |s-t|\,\varphi(t)\,dt \tag{10. 1}$$

betrachtet.

A. Mit der einfachsten Ausgangsfunktion $F_0(s) \equiv 1$ erhält man nach (2. 1) (es ist hier $F_n'' = 2F_{n-1}$)

$$2F_1(s) = 1 - 2s + 2s^2,$$

$$6F_2(s) = 1 - 2s + 3s^2 - 2s^3 + s^4,$$

$$360F_3(s) = 21 - 42s + 60s^2 - 40s^3 + 30s^4 - 12s^5 + 4s^6,$$

$$2520F_4(s) = 51 - 102s + 147s^2 - 98s^3 + 70s^4 - 28s^5 + 14s^6 - 4s^7 + s^8.$$

Nach (2. 3) und (2. 5) ergibt sich

i	a_i	μ_i		$\sqrt{\mu_{i-1}\mu_i}$
0	1	—		
1	$\frac{1}{3}$	3		
2	$\frac{7}{60}$	$\frac{20}{7}$	$= 2{,}8571\ldots$	2,9277
3	$\frac{17}{420}$	$\frac{49}{17}$	$= 2{,}882\,353\ldots$	
4	$\frac{1}{36}\cdot\frac{319}{630}$	$\frac{918}{319}$	$= 2{,}877\,742\,9\ldots$	2,880 047
5	$\frac{1219}{1080\cdot 231}$	$\frac{3509}{1219}$	$= 2{,}878\,589\,0\ldots$	
6	$\frac{220\,217}{129\,600\cdot 1001}$	$\frac{633\,880}{220\,217}$	$= 2{,}878\,433\,545\ldots$	2,878 511 275
8	$2{,}048\,762\,0\cdot 10^{-4}$			2,878 459 50

Die in der letzten Spalte angegebenen Werte von $\sqrt{\mu_{i-1}\mu_i}$ müssen sämtlich obere Schranken für $|\lambda_1|$ sein, die μ_i brauchen es aber nicht zu sein und sind es hier auch nicht (die μ_i bilden hier keine monotone Folge).

[9]) G. Temple, Proc. London Math. Soc. (2) **29** (1929), S. 257—280.

Zur Aufstellung einer Fehlerabschätzung benutzen wir zunächst nur die mit sehr geringer Mühe erhaltenen Werte $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$. Es wird eine untere Schranke l_2^2 für λ_2^2 gebraucht. Wegen

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2} = \int_0^1 \int_0^1 |s-t|^2 \, ds \, dt = \frac{1}{6} \quad \text{und} \quad \lambda_1^2 \leqq \mu_3 \mu_4 = \frac{2646}{319}$$

folgt

$$\lambda_2^2 \geqq l_2^2 = \frac{1323}{61}.$$

Die Schranke (8. 2) liefert dann

$$8{,}1236 \leqq \lambda_1^2 \leqq 8{,}2946,$$

$$2{,}850 \leqq |\lambda_1| \leqq 2{,}880.$$

Der Mittelwert 2,865 für $|\lambda_1|$ hat also einen Fehler von höchstens 0,52 %.

B. Zieht man noch die Werte μ_5 und μ_6 heran, so wird die Genauigkeit erheblich gesteigert. Mit dem Werte $l_2^2 = \frac{1323}{61}$ liefert (8. 2) jetzt

$$2{,}87756 \leqq |\lambda_1| \leqq 2{,}87851.$$

Der Mittelwert 2,87804 hat einen Fehler von höchstens 0,017 %.

C. Für den zweiten Eigenwert benutzen wir die Ausgangsfunktion $F_0(s) = 1 - 2s$. Dann wird nach (2. 1)

$$F_1(s) = -\frac{1}{6}(1 - 6s^2 + 4s^3),$$

$$F_2(s) = \frac{1}{30}(1 - 5s^2 + 5s^4 - 2s^5).$$

i	a_i	μ_i	$\sqrt{\mu_{i-1}\mu_i}$
0	$\frac{1}{3}$	—	
1	$-\frac{1}{15}$	-5	
2	$\frac{17}{1260}$	$-\frac{84}{17} = -4{,}9412\ldots$	4,970 50 …
3	$-\frac{31}{63 \cdot 180}$	$-\frac{153}{31} = -4{,}935\,484\ldots$	
4	$\frac{691}{900 \cdot 1386}$	$-\frac{3410}{691} = -4{,}934\,876\,9\ldots$	4,935 180 …

Man überlegt sich leicht, daß die in A aufgestellte Folge der (mit geeigneten konstanten Faktoren multiplizierten) Funktionen $F_\nu(s)$ gegen eine im Intervall $\langle 0, 1\rangle$ zum Punkt $\frac{1}{2}$ symmetrische Grenzfunktion konvergiert. Die hier verwendete Ausgangsfunktion $F_0 = 1 - 2s$ ist daher zu ihr orthogonal.

Die in der rechten Spalte stehenden Werte sind obere Schranken für $|\lambda_2|$; man erhält nach (7. 2) für $|\lambda_3|$ die untere Schranke $|\lambda_3| \geqq 14{,}072$.

Die Abschätzung (8. 2), jetzt auf λ_2 und λ_3 an Stelle auf λ_1 und λ_2 angewendet, liefert

$$4{,}9302 \leqq |\lambda_2| \leqq 4{,}9352.$$

Der Mittelwert 4,9327 hat somit einen Fehler von höchstens 0,05 %.

D. Will man den in C verwendeten Kunstgriff der Symmetrieausnutzung vermeiden, so kann man etwa von $F_0(s) = s$ ausgehen. Da man erst von $F_1(s)$ weiß, daß es dem Kern erreichbar ist, muß man die Iteration bis $F_4(s)$ durchführen. Man erhält

$$6F_1(s) = \quad 2 - \quad 3s + \qquad\quad 2s^3,$$

$$30F_2(s) = \quad 2 - \quad 5s + \ 10s^2 - \quad 5s^3 \qquad\quad + s^5,$$

$$2520F_3(s) = \ 82 - 147s + 168s^2 - 140s^3 + 140s^4 - \ 42s^5 \qquad + 4s^7,$$

$$22680F_4(s) = 214 - 459s + 738s^2 - 441s^3 + 252s^4 - 126s^5 + 84s^6 - 18s^7 + s^9.$$

$2i$	$a_{2i} = \int_0^1 F_i^2\, ds$	$\mu_i^* = \mu_{2i-1}\mu_{2i}$ nach (8.1)	$\frac{\mu_i^* - l}{u_{i+1}^* - l}\mu_{i+1}^*$	$\mu_i^{(1)}$ nach (7.4)	$\frac{\mu_i^* - L}{\mu_{i+1}^* - L}\mu_{i+1}^*$
0	$\frac{1}{3}$				
2	$\frac{41}{1260}$	$\frac{420}{41} = 10{,}243\,90\ldots$			
4	$\frac{4559}{900 \cdot 1386}$	$\frac{410 \cdot 99}{4559} = 8{,}903\,268\ldots$	$24{,}6615 \leqq \mu_2^{(1)} \leqq 24{,}6755$		
6	$4{,}006\,378\,7 \cdot 10^{-4}$	$8{,}498\,278\,84\ldots$	$24{,}3457 \leqq \mu_3^{(1)} \leqq 24{,}3861$		
8	$5{,}145\,257\,5 \cdot 10^{-5}$	$8{,}358\,450\,20$			

Hierbei sind l und L die aus A und B erhältlichen Schranken für λ_1^2

$$l = 8{,}285345 \leqq \lambda_1^2 \leqq 8{,}285529 = L.$$

Nach (6. 9) findet man schließlich

$$4{,}9294 \leqq |\lambda_2| \leqq 4{,}9382.$$

Der Mittelwert 4,9338 hat einen Fehler von höchstens 0,1 %.

E. Die Eigenwerte von (10. 1) lassen sich exakt angeben, was hier zum Vergleich mit den Näherungswerten in A bis D mitgeteilt sei: Es bestehen, da aus der Integralgleichung (10. 1)

$$\varphi'' = 2\lambda\varphi, \quad \varphi'(0) + \varphi'(1) = 0, \quad \varphi(0) + \varphi(1) = \lambda \int_0^1 \varphi(y)\, dy$$

folgt, die (nicht normierten) Eigenfunktionen

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{2n-1}(s) &= \cos\left[a_n\left(s-\tfrac{1}{2}\right)\right] \\ \varphi_{2n}(s) &= \sin\left[(2n-1)\pi\left(s-\tfrac{1}{2}\right)\right] \end{aligned}\right\} (n = 1, 2, \ldots).$$

Die zugehörigen Eigenwerte sind

$$\lambda_{2n-1} = -\frac{a_n^2}{2}, \quad \lambda_{2n} = -\frac{(2n-1)^2\pi^2}{2} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Dabei ist a_n die n-te Wurzel der Gleichung $\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -1$, wobei genauer a_1 die einzige auf der positiv imaginären Achse gelegene und a_n für $n = 2, 3, \ldots$ die $(n-1)$-te positiv reelle Wurzel bezeichnet. Die vorliegende Integralgleichung hat also einen positiven und unendlich viele negative Eigenwerte

$$\lambda_1 \approx 2{,}8784\ldots, \qquad \lambda_2 = -\frac{\pi^2}{2} = -4{,}934\,80\ldots, \qquad \ldots.$$

11. Ein Einschließungssatz.

Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung des Templeschen Einschließungssatzes[10]) für den ersten Eigenwert bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Hierbei wird vorausgesetzt, daß die nach (2.1) aus $F_0(s)$ gebildete Funktion $F_1(s)$ nicht identisch verschwindet und daß der Quotient

$$G(s) = \frac{F_0(s)}{F_1(s)} \tag{11.1}$$

im abgeschlossenen Grundgebiet zwischen endlichen Grenzen liegt.

$$G_u \leqq G(s) \leqq G_0.$$

Nun sei $\varphi_k(s)$ eine zum k-ten Eigenwert λ_k gehörige Eigenfunktion. Dann ist

$$\lambda_k - G(s) = \frac{\varphi_k(s)}{\int K(s,t)\,\varphi_k(t)\,dt} - \frac{F_0(s)}{\int K(s,t)\,F_0(t)\,dt}.$$

Mit der Bezeichnung

$$\Delta(s) = (\lambda_k - G(s)) \int K(s,t)\,\varphi_k(t)\,dt \int K(s,t)\,F_0(t)\,dt$$

wird

$$\int \Delta(s)\,ds = \int K(s,t)\,\varphi_k(s) F_0(t)\,ds\,dt - \int K(s,t)\,F_0(s)\,\varphi_k(t)\,ds\,dt = 0 \tag{11.2}$$

wegen der vorausgesetzten Symmetrie des Kerns.

---

[10]) G. Temple, Proc. London Math. Soc. (2) **29** (1929), S. 257–280; eine Verallgemeinerung des Satzes für die höheren Eigenwerte steht bei L. Collatz, Zeitschr. angew. Math. Mech. **19** (1939), S. 241.

Nun ist $\Delta(s) \equiv 0$, wenn $G(s) = \lambda_k = \text{const}$, also $F_0(s)$ eine Eigenfunktion ist. Andernfalls, d. h. wenn $\Delta(s)$ nicht $\equiv 0$ ist, muß $\Delta(s)$ im Grundgebiet Werte beiderlei Vorzeichens annehmen, da sonst das Integral (11. 2) nicht verschwinden könnte. Weiß man ferner, daß das Produkt $\varphi_k(s) F_1(s)$ im Grundgebiet einerlei Vorzeichen hat, so muß auch die Funktion $\lambda_k - G(s)$ im Grundgebiet das Vorzeichen wechseln, d. h. es muß dann

$$\text{Min}\, G(s) \leqq \lambda_k \leqq \text{Max}\, G(s) \tag{11. 3}$$

sein.

Diese Einschließungsaussage kann z. B. angewendet werden, wenn im Grundgebiet $K(s,t) \geqq 0$ ist. Man kann dann eine beliebige Funktion $F_0(s)$ verwenden, für die $F_0(s) \geqq 0$ und $F_1(s) \not\equiv 0$ gilt. Es werden dann alle $F_n(s) \geqq 0$, es gibt also eine Eigenfunktion φ_k, die $\varphi_k \geqq 0$ erfüllt. (Die mit geeigneten konstanten Faktoren multiplizierten F_n konvergieren gegen eine solche Eigenfunktion.) Die in (11. 3) angegebenen Zahlen $\text{Min}\, G(s)$ und $\text{Max}\, G(s)$ schließen daher mindestens einen Eigenwert ein.

Im Zahlenbeispiel von **10.** ist die Voraussetzung $K(s,t) \geqq 0$ erfüllt; verwendet man als $F_0(s)$ die Funktion (mit der Abkürzung $u = s - s^2$)

$$F_0(s) = \tfrac{1}{2} - u,$$

so wird $F_1(s) = \frac{1}{6}(1-u)^2$ und $G(s) = 3\,\frac{1-2u}{(1-u)^2}$. Für $0 \leqq s \leqq 1$ nimmt u die Werte $0 \leqq u \leqq \frac{1}{4}$ und $G(s)$ die Werte $\frac{8}{3} \leqq G(s) \leqq 3$ an; es liegt also zwischen $\frac{8}{3}$ und 3 mindestens ein Eigenwert. Mit $F_0(s) = (1-u)^2$, $F_1(s) = \frac{1}{60}(21 - 42\,u + 18\,u^2 - 4\,u^3)$ erhält man die engeren Schranken

$$\text{Min}\, G(s) = \frac{20}{7} = 2{,}857\,1\ldots,$$

$$\text{Max}\, G(s) = \frac{108}{37} = 2{,}918\,92\ldots.$$

Eine weitere Anwendungsmöglichkeit ergibt sich, wenn man weiß, daß alle $F_n(s)$ an denselben festen Stellen $s = s_1$, $s = s_2$, …, $s = s_n$ das Vorzeichen wechseln und sonst nicht im Grundgebiet. Ist dann φ_k diejenige Eigenfunktion, gegen die (mit geeigneten konstanten Faktoren multiplizierten) $F_n(s)$ konvergieren, so wechselt $F_1(s)\,\varphi_k(s)$ im Grundgebiet nicht das Vorzeichen und der Einschließungssatz (11. 3) ist anwendbar.

Diese Erweiterung ist gültig bei der zweiten Eigenfunktion der Integralgleichung (10. 1), wenn man eine Funktion $F_0(s)$ verwendet, die

$$F_0(s) = -F_0(1-s) \quad \text{für} \quad 0 \leqq s \leqq 1,$$

$$F_0(s) > 0 \qquad\qquad \text{für} \quad 0 \leqq s < \tfrac{1}{2}$$

erfüllt. Mit $F_0(s) = (1 - 2s)(1 + 2u)$, wobei wieder $u = s - s^2$ gesetzt ist, folgt

$$F_1(s) = -\frac{1}{5}(1 - 2s)(1 + 2u + u^2) \quad \text{und} \quad G(s) = -5\left(1 - \left(\frac{u}{1+u}\right)^2\right).$$

Für $0 \leqq s \leqq 1$ nimmt G Werte zwischen $-\frac{24}{5}$ und -5 an, also folgt, daß die Zahlen $-4{,}8$ und -5 einen Eigenwert einschließen.

Hat man Eigenwertprobleme bei Differentialgleichungen, die die in **9.** genannten Voraussetzungen erfüllen, deren Greensche Funktion positiv ist, und bei denen man weiß, daß eine Eigenfunktion existiert, die im Grundgebiet nicht das Vorzeichen wechselt, so ergibt die Einschließungsaussage (11. 3) ohne weiteres den Templeschen Einschließungssatz als Spezialfall.

(Eingegangen am 4. April 1940.)

Variationsrechnung aus dem Stokesschen Satz.

Von

Hermann Boerner in München,
z. Z. beim Reichswetterdienst.

Im folgenden werden die wichtigsten Formeln der Variationsrechnung der einfachen Integrale auf eine neuartige Weise hergeleitet, nämlich unter konsequenter Verwendung des *Kalküls der alternierenden Differentialformen.*

Einer der Vorteile dieses Kalküls, der ja in gewissem Sinne die natürlichste Verallgemeinerung der Integralrechnung auf mehrere Veränderliche darstellt, ist der, daß alle Sätze, die die partielle Integration verallgemeinern — Sätze von Gauß, Stokes usw. — in die eine einfache Formel zusammengefaßt erscheinen:

$$\int \omega = \int d\omega,$$

wo links eine Differentialform, rechts deren Differential steht und wo rechts über eine Mannigfaltigkeit und links über ihren Rand integriert wird: das ist der allgemeine „Stokessche Satz".

Partielle Integration wird nun in der Variationsrechnung an verschiedenen Stellen gebraucht: bei der Herleitung der Eulerschen Differentialgleichungen, beim Hilbertschen unabhängigen Integral. Diese so auseinanderliegenden Dinge — das eine der klassischen Variationsrechnung des 18. Jahrhunderts, das andere der modernen Weierstraßschen Theorie zugehörig — erscheinen hier gewissermaßen unter einem einheitlichen Gesichtspunkt. Darüber hinaus bekommt man eine besonders einfache Herleitung der Transversalitätsbedingung, und auch die Legendresche notwendige Bedingung läßt sich zwanglos gewinnen.

Eine besondere Bedeutung gewinnen diese Entwicklungen dadurch, daß sie sich viel bequemer als die sonst üblichen Herleitungen auf mehrfache Integrale übertragen lassen. Dort hat sich zuerst der Belgier *Lepage* dieses Kalküls bedient, um mit Hilfe des Hilbertschen Integrals eine Feldtheorie aufzustellen, die verschiedene vorher aufgestellte Theorien umfaßt. In einer gleichzeitig mit der vorliegenden erscheinenden Arbeit über mehrfache Integrale[1]), in der ich noch einiges Dunkle geklärt zu haben hoffe, mache ich auch dort den Schritt zur konsequenten Verwendung des Kalküls in allen Teilen der Variationsrechnung.

[1]) H. Boerner, Über die Legendresche Bedingung und die Feldtheorien in der Variationsrechnung der mehrfachen Integrale, Math. Zeitschr. **46** (1940), S. 720—742.

Es erschien mir zweckmäßig, jener naturgemäß komplizierten Abhandlung diese bequem lesbare voranzustellen, in der genau all das vorkommt, was dort verallgemeinert wird. Aber sie mag auch für sich allein für den Kenner einiges Interesse bieten und dem mit dem Gebiet noch nicht Vertrauten zu rascher Orientierung nützlich sein; denn es wird aus der Variationsrechnung nichts vorausgesetzt.

Da der Kalkül der alternierenden Differentialformen noch nicht die Verbreitung besitzt, die ihm zukommt, habe ich im ersten Abschnitt alles kurz zusammengestellt, womit nachher hantiert wird[2]).

1. Rechenvorschriften über Differentialformen. Das Summenzeichen wird fortgelassen. Einfache Summen z. B. über i gehen von 1 bis n. Bei Doppelsummen über i, j laufen i und j unabhängig voneinander von 1 bis n; soll anders summiert werden, so steht ein Summenzeichen: $\sum_{i<j}$.

Bei *Differentialformen* $a_i\,dy_i$ usw., deren Koeffizienten Funktionen der räumlichen Koordinaten y_i sind, sollen die Koeffizienten schiefsymmetrisch und die Differentiale antikommutativ sein:

$$dy_i dy_j = -\,dy_j dy_i.$$

Z. B. ist

$$\omega = \sum_{i<j} a_{ij}\,dy_i\,dy_j = \tfrac{1}{2}\,a_{ij}dy_i dy_j \tag{1.1}$$

eine Differentialform zweiten Grades; hier ist $a_{ij} = -\,a_{ji}$. Die Koeffizienten („Skalare") sind mit den Differentialen vertauschbar. Formen ersten Grades heißen *Pfaffsche Formen*.

Das *Produkt* zweier Formen wird durch Hintereinanderschreiben gebildet und ist im allgemeinen von der Reihenfolge der Faktoren abhängig.

Das *Differential* eines Skalars a ist die Form

$$da = \frac{\partial a}{\partial y_i}\,dy_i.$$

Um das Differential irgendeiner Form zu bilden, schreibt man die Koeffizienten links und setzt ein d davor. Z. B. ist

$$d(a_i\,dy_i) = da_i\,dy_i = \frac{\partial a_i}{\partial y_j}\,dy_j\,dy_i = \sum_{i<j}\left(\frac{\partial a_j}{\partial y_i} - \frac{\partial a_i}{\partial y_j}\right)dy_i\,dy_j.$$

Das *Integrieren* einer Pfaffschen Form über eine Kurve ist bekannt. Um die Form (1.1) vom zweiten Grad über ein zweidimensionales Flächenstück $\mathfrak{F}$ zu integrieren, bezieht man $\mathfrak{F}$ (eventuell stückweise) auf Parameter u, v

[2]) Ausführliche Darstellung und Beweise findet man bei E. Goursat, Leçons sur le probleme de Pfaff, Paris 1922, Chap. III. Auf S. 21 ff. dieses Buches findet sich übrigens bereits ein Hinweis auf die Variationsrechnung, aber nur auf ein spezielles und eigentlich triviales Variationsproblem.

(hierdurch wird $\mathfrak{F}$ zugleich *orientiert*: der positive Umlaufssinn führt von der u- zur v-Richtung); dann ist

$$\int_{\mathfrak{F}} \omega = \int_{\mathfrak{F}} \sum_{i<j} a_{ij}\, dy_i dy_j = \int \sum_{i<j} a_{ij} \frac{\partial (y_i, y_j)}{\partial (u, v)} du\, dv, \quad {}^{3})$$

wo rechts ein gewöhnliches Gebietsintegral über das $\mathfrak{F}$ in der (u, v)-Ebene entsprechende Gebiet steht. Hiernach ist der Betrag des Integrals von der Parameterwahl unabhängig; sein Vorzeichen hängt von der Orientierung ab.

Es gilt der *Stokessche Satz*, den wir nur für eine Pfaffsche Form ω brauchen werden:

$$\int_{\mathfrak{R}} \omega = \int_{\mathfrak{F}} d\omega;$$

hier bedeutet $\mathfrak{R}$ den im positiven Sinne umlaufenen Rand des zweidimensionalen Flächenstücks $\mathfrak{F}$. Die Randkurve darf hierbei Ecken, das Flächenstück Knicke haben; von solchen Sprüngen abgesehen setzen wir im folgenden alle Tangenten und Tangentialebenen als vorhanden und stetig voraus.

Wir werden schließlich von dem bekannten Satz Gebrauch machen, daß das Integral über ein *vollständiges Differential*, d. h. eine Form ω mit $d\omega = 0$, „vom Weg unabhängig" ist, d. h. (im Fall des ersten Grades) nur vom Anfangs- und Endpunkt der Integrationskurve abhängt. Dies folgt ja aus dem Stokesschen Satz oder noch einfacher daraus, daß bekanntlich ein vollständiges Differential (ersten Grades) das Differential eines Skalars ist. Bei mehr Dimensionen gilt Entsprechendes.

2. Die Eulerschen Gleichungen. Es handelt sich um das Integral

$$J_C = \int f(t, x_i, \dot{x}_i)\, dt \tag{2.1}$$

über eine Kurve $C: x_i(t)$ des $(n+1)$-dimensionalen (t, x_i)-Raumes $\mathfrak{R}_{n+1}$; dies Integral soll etwa bei vorgegebenen Endpunkten P_1, P_2 von C ein Minimum werden. Die Grundfunktion $f(t, x_i, p_i)$ soll mindestens samt allen im folgenden vorkommenden Ableitungen stetig sein, das sind im wesentlichen die ersten Ableitungen von f und von f_{p_i}.

Wir betrachten im $(2n+1)$-dimensionalen (t, x_i, p_i)-Raum $\mathfrak{R}_{2n+1}$ die Form

$$\omega = f(t, x_i, p_i)\, dt$$

---

[3]) Wegen der Summationsvorschrift kann man für die rechte Seite auch $\int a_{ij} \frac{\partial y_i}{\partial u} \frac{\partial y_j}{\partial v} du\, dv$ schreiben; man beachte, daß nach (1.1) daher

$$a_{ij}\, dy_i\, dy_j = 2 a_{ij} \frac{\partial y_i}{\partial u} \frac{\partial y_j}{\partial v} du\, dv$$

ist, mit dem Faktor 2.

und daneben die n Pfaffschen Formen

$$\omega_i = dx_i - p_i\,dt.$$

Statt (2. 1) nehmen wir das Integral $\int\omega$ im $\mathfrak{R}_{2n+1}$, zu erstrecken über eine Integralkurve des „Pfaffschen Systems" $\omega_i = 0$, die man erhält, wenn man für x_i irgendwelche Funktionen von t nimmt und $p_i(t) = \dot{x}_i$ setzt. Es ist ja immer

$$J_C = \int\limits_{\mathfrak{C}} \omega,$$

wenn $\mathfrak{C}$ die C im $\mathfrak{R}_{2n+1}$ entsprechende Kurve ist.

In der klassischen Variationsrechnung betrachtet man eine Kurve C, die das Problem lösen soll, daneben eine Vergleichskurve $\bar{C}: \bar{x}_i(t)$, und bettet beide in eine einparametrige Schar $C_\vartheta: x_i(\vartheta, t)$ ein, der etwa C für $\vartheta = 0$ und $\bar{C}$ für $\vartheta = \varepsilon$ angehören möge. Im $\mathfrak{R}_{2n+1}$ liefert uns das ein zweidimensionales Flächenstück

$$\mathfrak{F}:\ x_i = x_i(\vartheta, t), \qquad p_i = \frac{\partial x_i(\vartheta, t)}{\partial t},$$

das auf die Parameter ϑ, t bezogen und also orientiert ist. Seine Begrenzung besteht aus den C und $\bar{C}$ entsprechenden Kurven $\mathfrak{C}$ und $\bar{\mathfrak{C}}$ und aus zwei weiteren Kurvenstücken (den Endwerten $t = t_1$ und $t = t_2$ entsprechend), längs deren

$$dt = 0 \quad \text{und} \quad \omega_i = 0 \tag{2. 2}$$

ist. Mit Rücksicht auf die Orientierung und wegen (2. 2) ist nach dem Stokesschen Satz

$$\int\limits_{\bar{\mathfrak{C}}} \omega - \int\limits_{\mathfrak{C}} \omega = \operatorname{sgn}\varepsilon \int\limits_{\mathfrak{F}} d\omega. \tag{2. 3}$$

Soll die Kurve C das Problem lösen, so muß diese Differenz bei beliebigem $\bar{C}$ und insbesondere bei beliebigem Vorzeichen von ε positiv sein, sobald nur $\bar{C}$ zu C hinreichend benachbart, d. h. ε genügend klein ist.

Offenbar ändert sich am Problem und seiner Lösung nichts, wenn man in allen Rechnungen ω durch eine andere Form Ω mit $\Omega \equiv \omega \pmod{\omega_i}$, d. h.

$$\Omega = \omega + A_i(t, x_j, p_j)\,\omega_i$$

ersetzt. Bei der Umrechnung auf die Parameter ϑ, t wird

$$\omega_t = \frac{\partial x_i}{\partial \vartheta}\,d\vartheta; \quad [4]) \tag{2. 4}$$

es wird darum zweckmäßig sein, die A_i so zu wählen, daß

$$d\Omega \equiv 0\ (\omega_i)$$

---

[4]) Also längs der Kurve C ($\vartheta = 0$) $\omega_t = \delta x_i$ nach dem klassischen Variationskalkül.

wird. Hierzu muß man $A_i = f_{p_i}$ setzen; dann wird

$$\Omega = f\,dt + f_{p_i}\omega_i = (f - p_i f_{p_i})\,dt + f_{p_i}\,dx_i \tag{2.5}$$

und

$$d\Omega = (df_{p_i} - f_{x_i}\,dt)\,\omega_i .$$

Jetzt können wir die „Variation" (2. 3) ausrechnen; wegen (2. 2) kommt

$$J_{\bar{C}} - J_C = \int_{\bar{\mathfrak{C}}} \omega - \int_{\mathfrak{C}} \omega = \int_{\bar{\mathfrak{C}}} \Omega - \int_{\mathfrak{C}} \Omega = \operatorname{sgn}\varepsilon \int_{\mathfrak{F}} d\Omega$$

$$= \operatorname{sgn}\varepsilon \int_{\mathfrak{S}} (df_{p_i} - f_{x_i}\,dt)\,\omega_i = \operatorname{sgn}\varepsilon \int \left(f_{x_i} - \frac{df_{p_i}}{dt}\right)\frac{\partial x_i}{\partial \vartheta}\,d\vartheta\,dt$$

$$= \int_0^{\varepsilon} d\vartheta \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \left(f_{x_i} - \frac{df_{p_i}}{dt}\right)\frac{\partial x_i}{\partial \vartheta}\,dt \right\};$$

hier bezeichnet $\frac{d}{dt}$ die partielle Ableitung nach dem *Parameter* t, oder was dasselbe ist, die Ableitung längs der Scharkurve.

Für genügend kleine ε hat der letzte Ausdruck dasselbe Vorzeichen wie der Inhalt der geschweiften Klammer an der Stelle $\vartheta = 0$, sobald ε positiv ist; bei negativem ε das entgegengesetzte. Ein Minimum kann also nur eintreten, wenn diese Größe für beliebige Variationen δx_i verschwindet, woraus man in bekannter Weise auf das Bestehen der *Eulerschen Gleichungen*

$$f_{x_i} - \frac{df_{p_i}}{dt} = 0 \tag{2.6}$$

schließt. Die Lösungen dieser Differentialgleichungen heißen *Extremalen*[5]).

3. Transversalität. Es möge der Anfangspunkt P_1 nicht fest, sondern auf irgendeiner Mannigfaltigkeit beweglich sein. Die Anfangspunkte unserer Schar $C_\vartheta : x_i(\vartheta, t)$ von Vergleichskurven liegen dann auf einer orientierten Kurve

$$S:\ t = t(\vartheta), \quad x_i = x_i(\vartheta) = x_i(\vartheta, t(\vartheta)).$$

Die Gleichungen des vorigen Abschnitts modifizieren sich so:

$$\int_{\bar{\mathfrak{C}}} \Omega - \int_{\mathfrak{C}} \Omega + \operatorname{sgn}\varepsilon \int_{\mathfrak{S}} \Omega = \operatorname{sgn}\varepsilon \int_{\mathfrak{F}} d\Omega .$$

Nun ist

$$\int_{\mathfrak{S}} \Omega = \operatorname{sgn}\varepsilon \int_0^{\varepsilon} \{(f - p_i f_{p_i})t' + f_{p_i} x_i'\}\,d\vartheta$$

[5]) Dies ist der übliche Sprachgebrauch. *Carathéodory* definiert die Extremalen anders; s. Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, Leipzig-Berlin 1935, S. 190f.

und hat für kleine ε das Vorzeichen von

$$(f - p_i f_{p_i}) t'(0) + f_{p_i} x_i'(0).$$

Man schließt zunächst auf das Bestehen der Eulerschen Gleichungen, weil ja auch Kurvenscharen mit festem Anfangspunkt, also $t' = x_i' = 0$, zulässig sind, und dann auf die Beziehung

$$(f - p_j f_{p_j}) t'(0) + f_{p_i} x_i'(0) = 0,$$

weil das neu hinzugekommene Glied sonst bei kleinem ε mit ε das Vorzeichen wechselt. Da $t'(0)$, $x_i'(0)$ die Komponenten eines beliebigen Tangentenvektors der Mannigfaltigkeit sind, auf der der Anfangspunkt liegen soll, so muß die Lösungskurve C die folgende *Transversalitätsbedingung* erfüllen: der Vektor mit den Komponenten

(3. 1) $$f - p_j f_{p_j}, \quad f_{p_i}$$

in ihrem Anfangspunkt muß auf dieser Mannigfaltigkeit senkrecht stehen. Man sagt dann: die Kurve wird von der Mannigfaltigkeit transversal geschnitten.

4. Die Legendresche notwendige Bedingung [6]. Wir betrachten ein Linienelement (t^0, x_i^0, p_i^0) einer Kurve C, in dessen Umgebung die Tangente der Kurve stetig sei (d. h. C soll an der Stelle t^0 keine Ecke haben). Für dieses Linienelement sei die quadratische Form

(4. 1) $$f_{p_i p_j} u_i u_j$$

weder positiv definit noch positiv semidefinit; es gibt also Zahlen ϱ_i mit der Quadratsumme 1, so daß

$$f_{p_i p_j} \varrho_i \varrho_j = -k < 0$$

ist. Dann konstruieren wir eine Vergleichskurve C, die für $|t - t^0| \geqq \tau$ mit C zusammenfällt und für $|t - t^0| \leqq \tau$ durch

$$\bar{x}_i(t) = x_i(t) + \varepsilon \varrho_i (\tau \pm t \mp t^0)$$

erklärt ist, wobei wie im folgenden die oberen Vorzeichen für $t \leqq t^0$, die unteren für $t \geqq t^0$ zu nehmen sind. Wir betten sie in eine Schar

$$C_\vartheta\colon \; x_i(\vartheta, t) = x_i(t) + \vartheta \varrho_i (\tau \pm t \mp t^0), \qquad 0 \leqq \vartheta \leqq \varepsilon$$

ein; es ist

$$p_i(\vartheta, t) = p_i(t) \pm \vartheta \varrho_i .$$

$\varepsilon > 0$ und $\tau_0 > 0$ seien so klein gewählt, daß für alle in den C_ϑ im Intervall $|t - t^0| \leqq \tau < \tau_0$ vorkommenden Werte der Argumente von f dessen im

[6]) Der folgende Beweis ist nur eine geringfügige Modifikation des Beweises, den man in Carathéodorys unter [5]) angeführtem Buch auf S. 193ff. findet, jedoch durch die Anwendung unserer Methode etwas kürzer.

folgenden vorkommende Ableitungen unter einer festen Schranke liegen und

$$f_{p_i p_j} \varrho_i \varrho_j \leqq -\frac{k}{2}$$

bleibt.

Mit $\mathfrak{F}$ sei das durch die Schar $\mathfrak{C}_\vartheta$ im $\mathfrak{R}_{2n+1}$ bestimmte Flächenstück bezeichnet. Dann bekommen wir

$$J_{\bar{C}} - J_C = \int_{\mathfrak{F}} d\omega = \int_{\mathfrak{F}} (f_{x_i} dx_i + f_{p_i} dp_i)\, dt$$

$$= \int_{\mathfrak{F}} \varrho_i \{f_{x_i}(\tau \pm t \mp t^0) \pm f_{p_i}\}\, d\vartheta\, dt.$$

Ich behaupte, daß dieser Ausdruck für genügend kleines τ negativ ist.

In der Tat, es gibt eine von τ unabhängige Zahl $M_1 > 0$, so daß der Betrag des ersten Summanden kleiner ist als

$$M_1 \varepsilon \tau^2.$$

Im zweiten Summanden setzen wir

$$f_{p_i}(t, x_j(\vartheta, t), p_j(\vartheta, t)) = f_{p_i}(t, x_j(\vartheta, t), p_j(\vartheta, t)) - f_{p_i}(t, x_j(\vartheta, t), p_j(0, t))$$
$$+ f_{p_i}(t, x_j(\vartheta, t), p_j(0, t)) - f_{p_i}(t^0, x_j^0, p_j^0) + f_{p_i}(t^0, x_j^0, p_j^0).$$

Der letzte Summand liefert bei der Integration ersichtlich Null. Die vorhergehende Differenz geht gleichmäßig in ϑ mit τ gegen Null; das zugehörige Integral wird also durch

$$M_2(\tau) \varepsilon \tau$$

abgeschätzt, wo $\lim_{\tau \to 0} M_2 = 0$. Für die erste Differenz endlich schreiben wir mit dem Mittelwertsatz

$$\pm \hat{f}_{p_i p_j} \vartheta \varrho_j,$$

wo der Zirkumflex gewisse unserem Wertebereich angehörende Zwischenwerte bezeichnet. In dem entsprechenden Teil des Integrals steht immer das $+$-Zeichen; sein Wert ist also negativ und sein Betrag größer als

$$\tfrac{1}{2} \varepsilon^2 \tau k.$$

Man sieht, daß man durch geeignete Wahl von τ

$$J_{\bar{C}} - J_C < 0$$

erreichen kann.

Für jedes Linienelement einer Lösungskurve ist also

$$f_{p_i p_j} u_i u_j \geqq 0.$$

Man nennt ein Linienelement *regulär*, wenn die quadratische Form positiv definit, *singulär*, wenn sie positiv semidefinit ist, in allen anderen Fällen

irregulär. (Will man auch Maximumprobleme betrachten, so nennt man nur die Linienelemente mit indefiniter Form irregulär und unterscheidet positiv- und negativ-reguläre bzw. -singuläre Elemente.) Die Lösungen des Minimumproblems enthalten keine irregulären Linienelemente.

5. Um ein *Feld* von Kurven zu bekommen, betrachten wir im $\mathfrak{R}_{2n+1}$ eine $(n+1)$-dimensionale „Fläche" $p_i = p_i(t, x_j)$. Durch Integration des Systems von Differentialgleichungen

$$\dot{x}_i = p_i(t, x_j)$$

findet man die auf dieser Fläche liegenden Integralkurven des Pfaffschen Systems $\omega_i = 0$. Die entsprechenden Kurven im $\mathfrak{R}_{n+1}$ bilden ein „Feld", d. h. sie überdecken ein Stück dieses Raumes einfach und lückenlos.

Die Ersetzung der p_i in einer Funktion $F(t, x_j, p_j)$ durch die Funktionen von t und x_j wird, wenn nötig, durch eckige Klammern angedeutet. Die Ableitungen der so entstehenden Funktion $[F]$ im $\mathfrak{R}_{n+1}$ werden durch rundes ∂, die Ableitung längs der Feldkurve (im Einklang mit § 2) durch gerades d bezeichnet:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x_i} p_i.$$

6. In § 2 wurde das Differential von Ω betrachtet; die Eulerschen Gleichungen ergaben sich, indem dieses Differential gewissermaßen längs einer Kurve zum Verschwinden gebracht wurde. Man gelangt zu hinreichenden Bedingungen für das Minimum, wenn man solche Felder betrachtet, daß dieses Differential in einem Gebiet des $\mathfrak{R}_{n+1}$ verschwindet. Man nennt ein Feld ein *geodätisches Feld*[7]), wenn $d[\Omega] = 0$, d. h. $[\Omega]$ ein vollständiges Differential ist. Es ist

$$\begin{aligned} d[\Omega] &= (d f_{p_i} - f_{x_i} dt)\omega_i \\ &= \left\{\frac{\partial f_{p_i}}{\partial t} dt + \frac{\partial f_{p_i}}{\partial x_j}(\omega_j + p_j dt) - f_{x_i} dt\right\}\omega_i \\ &= \left(\frac{d f_{p_i}}{dt} - f_{x_i}\right) dt\,\omega_i + \sum_{i<j}\left(\frac{\partial f_{p_j}}{\partial x_i} - \frac{\partial f_{p_i}}{\partial x_j}\right)\omega_i\omega_j. \end{aligned}$$

Wir müssen daher verlangen, daß die Feldkurven den Gleichungen (2. 6) genügen, also Extremalen sind, und daß die $\frac{(n-1)\,n}{2}$ Gleichungen

$$\frac{\partial f_{p_j}}{\partial x_i} - \frac{\partial f_{p_i}}{\partial x_j} = 0 \tag{6.1}$$

bestehen.

---

[7]) Der Begriff ist natürlich seit *Weierstraß* bekannt. Der Name stammt von *Carathéodory*, die hier gegebene einfache Definition von *Lepage*.

Ist jetzt C eine Feldextremale und $\bar{C}$ irgendeine Vergleichskurve mit denselben Endpunkten, die ganz im Feld verläuft, so ist

$$J_C = \int_{\mathfrak{C}} \omega = \int_C [\Omega] = \int_{\bar{C}} [\Omega]$$

und daher, wenn man (2. 5) einsetzt,

$$J_{\bar{C}} - J_C = \int_{\bar{C}} \mathscr{E}(t, x_i, p_i, \overline{p_i})\, dt,$$

wo p_i die Feldfunktionen, $\overline{p_i}$ die Linienelemente von $\bar{C}$ sind und wo

$$\mathscr{E}(t, x_i, p_i, \overline{p_i}) = f(t, x_j, \overline{p_j}) - f(t, x_j, p_j) - (\overline{p_i} - p_i) f_{p_i}(t, x_j, p_j)$$

die *Weierstraßsche Exzeßfunktion* ist.

Hinreichend für ein *starkes* Minimum (Vergleichskurven in hinreichender Nachbarschaft, mit beliebiger Richtung) ist mithin, daß man die ganze Extremale C in ein geodätisches Feld einbetten kann[8]) und daß für die Linienelemente (t, x_i, p_i) des Feldes und alle $\overline{p_i}$

$$\mathscr{E}(t, x_i, p_i, \overline{p_i}) > 0 \tag{6. 2}$$

ist; für ein *schwaches* Minimum (Vergleichskurven samt Richtung in hinreichender Nachbarschaft), daß dasselbe bei jedem Linienelement des Feldes für die $\overline{p_i}$ aus einer gewissen Umgebung von p_i gilt. (6. 2) ist die *Bedingung von Weierstraß*.

Da die Entwicklung von $\mathscr{E}$ nach Potenzen von $\overline{p_i} - p_i$ mit $\frac{1}{2} f_{p_i p_j}(\overline{p_i} - p_i)(\overline{p_j} - p_j)$ anfängt (falls nur die zweiten Ableitungen von f nach den p_i existieren, wende man den Taylorschen Satz an), so kann man für das schwache Minimum (6. 2) durch die Bedingung ersetzen, daß die quadratische Form (4. 1) positiv definit ist. Das ist die „Legendresche hinreichende Bedingung".

7. Die Bedeutung der Bedingungen (6. 1) wird klar, wenn man die Tatsache, daß $[\Omega]$ ein vollständiges Differential ist, so schreibt:

$$[\Omega] = dS, \tag{7. 1}$$

wo $S(t, x_i)$ eine Funktion im $\mathfrak{R}_{n+1}$ ist. Man hat

$$dS = \frac{\partial S}{\partial t} dt + \frac{\partial S}{\partial x_i} dx_i = \frac{dS}{dt} dt + \frac{\partial S}{\partial x_i} \omega_i,$$

---

[8]) Die Möglichkeit, ein genügend kleines Stück einer Extremale in ein Feld einzubetten, folgt auf dem Wege über die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung; vgl. darüber das 3. Kapitel des in Anm. [5]) erwähnten Lehrbuchs von Carathéodory. Die Frage nach der Möglichkeit, die *ganze* Kurve einzubetten, wird in der Theorie der zweiten Variation beantwortet.

und wenn man das mit (2. 5) vergleicht, so schreibt sich (7. 1) entweder

$$[f_{p_i}] = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \quad [f] = \frac{dS}{dt} \tag{7.2}$$

oder

$$[f_{p_i}] = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \quad [f - p_j f_{p_j}] = \frac{\partial S}{\partial t}. \tag{7.3}$$

Die Gleichungen (7. 2) hat zuerst Carathéodory an die Spitze der Variationsrechnung gestellt. Die geometrische Bedeutung von (7. 3) zeigt der Vergleich mit (3. 1): *die Extremalen des Feldes werden von den n-dimensionalen Flächen* $S = \text{const}$ *transversal geschnitten.* Und man sieht, daß die Gleichungen (2. 6) und (6. 1) zusammengenommen nichts anderes sind als die Integrabilitätsbedingungen dafür, daß sich die zu den Feldkurven transversalen n-dimensionalen Flächenelemente auf bestimmte Weise zu einer einparametrigen Flächenschar $S = \text{const}$ zusammenfügen[9]).

8. Die Beziehung

$$\int_{\bar{C}} [\Omega] = \int_{C} [\Omega] \tag{8.1}$$

gilt nicht nur für zwei beliebige im geodätischen Feld verlaufende Kurven, deren Anfangs- und Endpunkte zusammenfallen. Es ist ja

$$\int_{C} [\Omega] = \int_{C} dS = S_2 - S_1,$$

wo S_1 und S_2 die zum Anfangs- und Endpunkt von C gehörenden Werte der Funktion S bedeuten, und für die Gültigkeit von (8. 1) genügt es daher, wenn die Anfangs- und die Endpunkte von C und $\bar{C}$ je auf der gleichen Fläche $S = \text{const}$ liegen. Der darin enthaltene Satz, daß *bei einem geodätischen Feld die Flächen* $S = \text{const}$ („geodätische Äquidistanten") *auf den Feldextremalen Stücke gleichen Wertes für das Integral* J_C (gleicher „geodätischer Länge") *ausschneiden*, ist die Verallgemeinerung bekannter Sätze über geodätische Linien auf Flächen und über Normalenkongruenzen und wird als

---

[9]) Würde man nur überhaupt verlangen, daß die transversalen Flächenelemente zu einer Schar $S = \text{const}$ gehören, so würden die Ableitungen von S nur zu den linken Seiten von (7. 3) proportional sein. Die „Normierung" des Gradienten, die etwa durch die letzte der Gleichungen (7. 3) verlangt wird (die anderen sind dann von selbst erfüllt), läßt sich durch eine Transformation $S' = \varphi(S)$ im allgemeinen nur für einen Punkt jeder Fläche erreichen. Diese letzte Gleichung, die man also zusätzlich verlangen muß, ist, wenn man die Legendresche Transformation ausführt, nichts anderes als die Hamilton-Jacobische partielle Differentialgleichung des Problems. Beispiel: Die orthogonalen Trajektorien einer beliebigen Flächenschar bilden dann und nur dann ein geodätisches Feld für das Variationsproblem der kürzesten Länge mit der Grundfunktion $f = \sqrt{1 + p_i p_i}$ (bei dem transversal = orthogonal ist), wenn die Länge des Gradienten auf jeder Fläche konstant ist; dann und nur dann sind also die orthogonalen Trajektorien gerade Linien. Vgl. dazu den Satz von § 8.

Transversalensatz von Kneser bezeichnet[10]). Bei Carathéodory heißt ein Extremalenfeld zusammen mit seinen geodätischen Transversalen, also dasjenige geometrische Gebilde, für das der Knesersche Satz gilt und das daher auf alle das Variationsproblem betreffenden Fragen Antwort gibt, eine „*vollständige Figur*".

9. Auch die Transversalitätsbedingung des § 3 findet man hier mühelos wieder. Betrachten wir den einfachsten Fall: der Anfangspunkt P_1 sei auf einer n-dimensionalen Fläche beweglich, der Endpunkt P_2 fest. Die Fläche nehmen wir als Fläche $S = S_1$ eines geodätischen Feldes; der Punkt P_2 möge im Feld liegen und die Weierstraßsche Bedingung (6. 2) erfüllt sein. Dann ist klar, daß von allen im Feld verlaufenden Kurven nur die durch P_2 gehende Feldextremale eine Lösung des Problems ist. Es kann insbesondere eine im Feld verlaufende Extremale, die irgendeinen Punkt der Fläche $S = S_1$ mit P_2 verbindet, gewiß keine Lösung sein, wenn sie nicht von dieser Fläche transversal geschnitten wird.

Ein System von hinreichenden Bedingungen für diesen Fall lautet also: Eulersche Gleichungen, Transversalität, Möglichkeit der Feldkonstruktion und Legendresche Bedingung für das schwache, Weierstraßsche für das starke Minimum.

Ist der Anfangspunkt auf einer Fläche von weniger Dimensionen beweglich, so legt man eine n-Fläche durch sie hindurch und verfährt genau so. Komplizierter werden die Verhältnisse, wenn beide Endpunkte variabel sind. Hier sei nur folgender einfachste Fall angedeutet: P_1 soll auf einer n-Fläche, P_2 auf irgendeiner Fläche F_2 liegen und die vorhin erwähnten Bedingungen erfüllt sein; überdies sei $f > 0$. Dann tritt offenbar ein Minimum wirklich ein, wenn bei der oben angegebenen Feldkonstruktion die Fläche F_2 in der Umgebung von P_2 ganz auf *einer* Seite der durch P_2 gehenden Fläche $S = \text{const}$ liegt, und zwar auf der entgegengesetzten wie der Punkt P_1.

[10]) A. Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung, S. 46. Braunschweig 1900.

(Eingegangen am 1. Mai 1940.)

Über die Legendresche Bedingung und die Feldtheorien in der Variationsrechnung der mehrfachen Integrale.

Von

Hermann Boerner in München,
z. Z. beim Reichswetterdienst.

In der Variationsrechnung der mehrfachen Integrale — mehrere unabhängige *und* abhängige Veränderliche — stößt man auf merkwürdige Schwierigkeiten beim Aufstellen der Legendreschen Bedingung, auf die zuerst *Hadamard* beim Studium der Arbeiten von *Clebsch* aufmerksam wurde[1]). Es schien so, als gäbe es nicht *eine*, sondern beliebig viele hinreichende Bedingungen (das Erfülltsein von irgendeiner von ihnen würde also genügen), während die notwendige zwar von jeder von ihnen impliziert wird, aber bedeutend weniger verlangt. Überraschenderweise führt dagegen *Carathéodorys* Verallgemeinerung seiner Theorie des „geodätischen Feldes“[2]) auf eine ganz bestimmte hinreichende Legendre-Bedingung, die sogar (mit dem $\geqq$-Zeichen) in gewissem Sinne als notwendig erscheint, nachdem von mir die Möglichkeit der Einbettung einer vorgegebenen Extremale in ein Feld bewiesen wurde[3]). Ganz andere Formeln der Feldtheorie als die (verhältnismäßig komplizierten) von Carathéodory findet man wiederum in *De Donders* Buch rein formal hingeschrieben[4]), und dieselbe Feldtheorie entwickelt *Weyl*, der nun auch hier die Möglichkeit der Einbettung in ein Feld beweist[5]); diese Theorie führt zu einer anderen, ebenfalls eindeutig bestimmten, hinreichenden Legendre-Bedingung. Außerdem ist die Weierstraßsche $\mathcal{E}$-Funktion bei beiden Theorien verschieden.

---

[1]) J. Hadamard, Sur une question de calcul des variations. Bull. Soc. math. de France **30** (1902), S. 253—256; Sur quelques questions de calcul des variations. Ebenda **33** (1905), S. 73—80.

[2]) C. Carathéodory, Über die Variationsrechnung bei mehrfachen Integralen. Acta Szeged **4** (1928/29), S. 193—216.

[3]) H. Boerner, Über die Extremalen und geodätischen Felder in der Variationsrechnung der mehrfachen Integrale. Math. Ann. **112** (1936), S. 187—220. Eine sehr interessante gruppentheoretische Wendung wurde neuerdings dem Beweis durch *E. Hölder* gegeben: Die infinitesimalen Berührungstransformationen der Variationsrechnung. Jber. D. M. V. **49** (1939), S. 162—178. — Vgl. unten Anm. [25]).

[4]) Th. De Donder, Théorie invariantive du calcul des variations. 10 Abhandlungen in Bull. Acad. Roy. Belg. V. s. **15** (1929) und **16** (1930). Nouvelle édition Paris 1935.

[5]) H. Weyl, Geodesic fields in the calculus of variations for multiple integrals. Annals of math. **36** (1935), S. 607—629.

Der Belgier *Lepage* hat beide Theorien unter einen Hut (und mit der Hadamardschen Legendre-Bedingung in Einklang) gebracht, indem er sie als Spezialfälle in einer ganzen Schar von Theorien erscheinen läßt, abhängig von einer großen Anzahl von willkürlichen Funktionen[6]).

Im folgenden werde ich zeigen, daß man unter all diesen Theorien zwangsläufig auf eine ganz bestimmte — nämlich die von Carathéodory — geführt wird, wenn man an eine Feldtheorie die naheliegende Forderung stellt, daß sie auf alle Probleme anwendbar ist und daher auch auf solche mit *beweglichem Rand*[7]). An einem recht einfachen Beispiel werde ich zeigen, daß die hinreichende Bedingung Hadamards oder Weyls hierbei in der Tat versagt.

Lepage bedient sich in seiner Arbeit des Kalküls der alternierenden Differentialformen — dessen Verwendung in der Tat naheliegt, wenn man mit „vom Weg unabhängigen" Integralen zu tun hat. Der Kalkül leistet aber nicht nur dort gute Dienste; es zeigt sich vielmehr, daß man die ganze Variationsrechnung der mehrfachen Integrale mit seiner Hilfe auf die bequemste Weise gewinnt.

Im ersten Kapitel zeige ich dies an den notwendigen Bedingungen. Ich leite die Eulerschen Gleichungen her; ich gewinne die Transversalitätsbedingung, die man anscheinend sonst noch nirgends findet und die für die späteren Überlegungen wesentlich ist; und ich gebe den ersten vollständigen Beweis der Hadamardschen notwendigen Bedingung[8]).

Das zweite Kapitel ist sodann den erwähnten Entwicklungen über die Feldtheorien gewidmet, und zwar operiert es wie das erste mit beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen (Lepage beschränkt sich auf zwei).

In einer gleichzeitig erschienenen Arbeit habe ich die Variationsrechnung der einfachen Integrale ebenfalls mit dem Differentialformenkalkül behandelt und dadurch verschiedenes unter einen einheitlichen Gesichtspunkt gebracht[9]). Sie enthält genau all das, was in der vorliegenden verallgemeinert wird, und wenn diese auch unabhängig davon lesbar ist, so mag doch manches bequemer verständlich sein, wenn man es zuvor dort im Gebiet des Altbekannten gelesen hat.

---

[6]) Th.-H.-J. Lepage, Sur les champs géodésiques du calcul des variations. Bull. Acad. Roy. Belg. V. s. **22** (1936), S. 716—729, 1036—1046.

[7]) Das Ergebnis wurde von mir schon in einem Vortrag angedeutet, den ich mit dem Titel „Probleme der Variationsrechnung in mehreren Veränderlichen" im Februar 1939 in Frankfurt und Marburg gehalten habe.

[8]) Von Hadamard nur angedeutet für drei unabhängige und drei abhängige Veränderliche in seinem Buch „La propagation des ondes", Paris 1903, auf S. 253.

[9]) H. Boerner, Variationsrechnung aus dem Stokesschen Satz, Math. Zeitschr. **46** (1940), S. 709—719. Im folgenden als „*St.*" zitiert.

Erstes Kapitel.

Die notwendigen Bedingungen.

1. Rechenvorschriften und Sätze über Differentialformen. Griechische Indizes laufen von 1 bis μ, lateinische von 1 bis n. Das Summenzeichen wird fortgelassen. Summationen über mehrere Indizes sind in der üblichen Weise unabhängig vorzunehmen, außer wenn ein Summenzeichen dasteht, das es anders verlangt.

Die Rechenregeln für alternierende Differentialformen $a_i\,dy_i$ usw., deren Koeffizienten Funktionen aus einem n-Raum (y_i) sind, findet man kurz in „*St.*“ Die Koeffizienten werden zweckmäßig „schiefsymmetrisch“ angenommen; beim dritten Grad ist z. B.

$$a_{ijk} = -a_{ikj} = a_{jki} = -a_{jik} = a_{kij} = -a_{kji},$$

und man summiert nur über die Zahlentripel und schreibt

$$\omega = \sum_{i<j<k} a_{ijk}\,dy_i\,dy_j\,dy_k \left(= \tfrac{1}{6}\,a_{ijk}\,dy_i\,dy_j\,dy_k\right).$$

Bei der Bildung des *Integrals* $\int_{\mathfrak{F}} \omega$ einer Form ω vom Grad p über ein p-Flächenstück $\mathfrak{F}$ hat man auf die *Orientierung* zu achten. Jedes genügend kleine Stück von $\mathfrak{F}$ kann man auf Parameter $u_1, \ldots, u_p$ beziehen und dadurch auf ein Gebiet G der $(u_1, \ldots, u_p)$-„Ebene“ abbilden. Eine Orientierung ist nichts anderes als eine *Klasse von Parameterdarstellungen*: Zwei Parameterdarstellungen $u_1, \ldots, u_p$ und $v_1, \ldots, v_p$ liefern dieselbe Orientierung (gehören in dieselbe Klasse), wenn die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(u_1, \ldots, u_p)}{\partial(v_1, \ldots, v_p)}$ positiv, verschiedene Orientierungen, wenn sie negativ ist. Danach gibt es genau zwei Orientierungen. Wir setzen alle vorkommenden Flächen als orientierbar voraus, d. h. sie sollen sich dachziegelartig mit Parameterdarstellungen überdecken lassen, derart, daß benachbarte Parameterdarstellungen im gemeinsamen Teil die gleiche Orientierung liefern. Das Vorzeichen des Integrals, das mit

$$dy_{i_1}\,dy_{i_2} \ldots dy_{i_p} = \frac{\partial(y_{i_1}, \ldots, y_{i_p})}{\partial(u_1, \ldots, u_p)}\,du_1\,du_2 \ldots du_p$$

als gewöhnliches Gebietsintegral über G gebildet wird, hängt danach von der Orientierung ab, sein Betrag ist von der Wahl der Parameterdarstellung unabhängig.

Es gilt der *Stokessche Satz*

$$\int_{\mathfrak{R}} \omega = \int_{\mathfrak{F}} d\omega,$$

wenn $\mathfrak{R}$ der (p-dimensionale) Rand des (hier $(p+1)$-dimensionalen) Flächenstücks $\mathfrak{F}$ ist und wenn man $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{F}$ zueinander passend orientiert. Hierunter ist folgendes zu verstehen. Man beziehe $\mathfrak{F}$ in der Nachbarschaft eines Stückes

von $\mathfrak{R}$ so auf Parameter $u_1, \ldots, u_{p+1}$, daß u_1 auf $\mathfrak{R}$ konstant und im Innern von $\mathfrak{F}$ kleiner ist; dann erzeugen $u_1, \ldots, u_{p+1}$ und $u_2, \ldots, u_{p+1}$ zueinander passende Orientierungen von $\mathfrak{F}$ bzw. $\mathfrak{R}$.

Die im Stokesschen Satz vorkommenden Flächen dürfen „Knicke" haben, d. h. in Gebiete zerfallen, längs deren Rand die Tangentialebene „springt". Wir setzen im folgenden von allen Mannigfaltigkeiten voraus, daß sie von solchen Knicken abgesehen stetige Tangentialebene besitzen.

Aus dem Stokesschen Satz folgert man, daß das Integral über ein *„vollständiges Differential"*, d. h. eine Form ω mit $d\omega = 0$, „vom Weg unabhängig" ist: sein Wert hängt nur vom Rand des Flächenstücks ab, über das integriert wird.

Unter dem *Rang* einer Differentialform versteht man die kleinste Anzahl von Pfaffschen Formen (d. h. Formen ersten Grades), durch die man sie darstellen kann. Der kleinstmögliche Rang einer Form vom Grad p ist offenbar p, es ist dann

$$\omega = \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_p$$

ein Produkt von Linearformen.

Unter der *Klasse* einer Form versteht man die kleinste Anzahl von Variablen (als Argument der Koeffizienten und unter dem Zeichen d), mit deren Hilfe die Form nach Koordinatentransformation dargestellt werden kann. Im allgemeinen wird die Klasse größer sein als der Rang; es gilt jedoch der Satz:

Bei einem vollständigen Differential stimmen Rang und Klasse überein[10]).

2. Die Eulerschen Gleichungen. Wir betrachten das μ-fache Integral

$$J_E = \int_G f\left(t_\alpha, x_i, \frac{\partial x_i}{\partial t_\alpha}\right)(dt) \quad [11]),$$

zu erstrecken über eine μ-Fläche E: $x_i = x_i(t_\alpha)$ im $(\mu + n)$-Raum $\mathfrak{R}_{\mu+n}$ der Veränderlichen t_α, x_i. Die Grundfunktion $f(t_\alpha, x_i, p_{i\alpha})$ soll in einem geeigneten Gebiet des $\mathfrak{R}_{\mu+n}$ und für alle $p_{i\alpha}$ stetig sein, ebenso mindestens ihre ersten Ableitungen und die ersten Ableitungen der $f_{p_{i\alpha}}$.

[10]) *E. Goursat*, Leçons sur le problème de Pfaff, Paris 1922, S. 135. Überhaupt findet man dort S. 126—139 Näheres über die Begriffe „Rang" und „Klasse". — Eine moderne Definition des Flächenintegrals für sehr allgemeine Flächen und ohne Benutzung einer Parameterdarstellung hat mit Methoden der Integralgeometrie *W. Maak* gegeben: Oberflächenintegral und Stokes-Formel im gewöhnlichen Raume. Math. Annalen 116 (1939), S. 574—597. Für die Zwecke der Variationsrechnung, wo man stets passende Parameterdarstellungen von selbst an der Hand hat und über die Flächen sowieso einschränkende Voraussetzungen machen muß, wird die im Text angegebene Zurückführung auf Volumintegrale meist genügen.

[11]) Hier ist schon die Abkürzung (dt) für das Produkt $dt_1 \ldots dt_\mu$ verwandt, die uns später die Übersicht beim Rechnen mit den Differentialformen erleichtern soll. $(dt)_\alpha$ bedeutet $dt_1 \ldots dt_{\alpha-1} dt_{\alpha+1} \ldots dt_\mu$, analog ist $(dt)_{\alpha\beta}$ definiert.

Zur Herleitung notwendiger Bedingungen für das Minimum bei festem Rand betrachten wir eine Vergleichsfläche $\bar{E}$: $x_i = \bar{x}_i(t_\alpha)$, wo die Funktionen $\bar{x}_i(t_\alpha)$ in demselben Gebiet G der t_α-„Ebene" definiert sind wie die $x_i(t_\alpha)$ und am Rand von G mit ihnen übereinstimmen. Soll $\bar{E}$ eine Lösung des Problems sein, so muß die „Variation" $J_{\bar{E}} - J_E$ bei beliebigem hinreichend benachbarten $\bar{E}$ positiv sein.

Wir betten E und $\bar{E}$ in eine einparametrige Schar von Vergleichsflächen E_ϑ ein, die alle denselben Rand besitzen:

$$(2.1) \qquad E_\vartheta\colon\ x_i = x_i(\vartheta, t_\alpha);\ x_i(0, t_\alpha) \equiv x_i(t_\alpha),\ x_i(\varepsilon, t_\alpha) = \bar{x}_i(t_\alpha).$$

Im $(\mu + n + \mu n)$-Raum $\mathfrak{R}_{\mu+n+\mu n}$ der Veränderlichen t_α, x_i, $p_{i\alpha}$ betrachten wir die Form μ-ten Grades

$$\omega = f(t_\alpha, x_i, p_{i\alpha})\, dt.$$

Wenn man mit $\mathfrak{E}_\vartheta$ die E_ϑ in diesem Raum durch die Relationen $p_{i\alpha} = \dfrac{\partial x_i}{\partial t_\alpha}$ entsprechende Fläche bezeichnet, so ist

$$J_{E_\vartheta} = \int_{\mathfrak{E}_\vartheta} \omega.$$

Solche Flächen im $\mathfrak{R}_{\mu+n+\mu n}$ sind, wenn man die n Pfaffschen Formen

$$\omega_i = dx_i - p_{i\alpha}\, dt_\alpha$$

einführt, Integralmannigfaltigkeiten des „Pfaffschen Systems" $\omega_i = 0$. Da wir nur über solche Flächen integrieren werden, können wir ω durch irgendeine dazu $(\mathrm{mod}\,\omega_i)$ kongruente Form

$$\Omega = f\, dt_1 \ldots dt_\mu + A_{i\alpha}\, dt_1 \ldots dt_{\alpha-1}\, \omega_i\, dt_{\alpha+1} \ldots dt_\mu + \\ + \sum_{i<j,\ \alpha<\beta} A_{i\alpha, j\beta}\, dt_1 \ldots dt_{\alpha-1}\, \omega_i\, dt_{\alpha+1} \ldots dt_{\beta-1}\, \omega_j\, dt_{\beta+1} \ldots dt_\mu + \cdots$$

ersetzen. Wie in „*St.*" bestimmen wir Ω so, daß

$$d\Omega \equiv 0\ (\omega_i)$$

wird. Hierzu muß nur $A_{i\alpha} = f_{p_{i\alpha}}$ gesetzt werden; *alle weiteren Funktionen* $A_{i\alpha, j\beta}$ *usw. bleiben willkürlich* und mögen irgendwie fest gewählt werden. Wir haben also

$$(2.2) \qquad \Omega = f\, dt_1 \ldots dt_\mu + f_{p_{i\alpha}}\, dt_1 \ldots dt_{\alpha-1}\, \omega_i\, dt_{\alpha+1} \ldots dt_\mu + \\ + \sum_{i<j,\ \alpha<\beta} A_{i\alpha, j\beta}\, dt \ldots dt_{\alpha-1}\, \omega_i\, dt_{\alpha+1} \ldots dt_{\beta-1}\, \omega_j\, dt_{\beta+1} \ldots dt_\mu + \cdots$$ [12]).

[12]) Für die Rechnungen dieses Kapitels hätte man sich auf die in den ω_i linearen Glieder beschränken können. Wir haben trotzdem die in der Lepageschen Theorie figurierende allgemeinste Form Ω schon jetzt hingeschrieben, damit man sich überzeugt, daß die weiteren Glieder für diese Rechnungen keine Rolle spielen.

Nach dem Stokesschen Satz ist jetzt

$$J_{\bar{E}} - J_E = \int_{\bar{\mathfrak{E}}} \Omega - \int_{\mathfrak{E}} \Omega = \operatorname{sgn} \varepsilon \int_{\mathfrak{F}} d\Omega, \tag{2.3}$$

da auf dem Rest der Begrenzung von $\mathfrak{F}$ $\Omega = 0$ ist. Hier ist $\mathfrak{F}$ die von den Punkten aller $\mathfrak{E}_\vartheta$ gebildete $(\mu+1)$-Fläche, und (2.3) ist richtig, wenn wir die Orientierungen durch die Parameterwahl $t_1, \ldots, t_\mu$ für $\mathfrak{E}$ und $\bar{\mathfrak{E}}$ und $\vartheta, t_1, \ldots, t_\mu$ für $\mathfrak{F}$ festlegen. Die Berechnung von $d\Omega$ vereinfacht sich, wenn wir gleich in diesen Parametern rechnen, denn dann ist

$$\omega_i = \frac{\partial x_i}{\partial \vartheta}\, d\vartheta,$$

und alle Terme mit mehr als einem Faktor ω_i — insbesondere alle in (2.2) nicht hingeschriebenen — fallen weg. Es ist

$$\Omega = f\,(dt) + (-1)^{\alpha-1} f_{p_{i\alpha}}\, \omega_i\, (dt)_\alpha + \\ + \sum_{i<j,\ \alpha<\beta} (-1)^{\alpha+\beta-1} A_{i\alpha,j\beta}\, \omega_i\, \omega_j\, (dt)_{\alpha\beta} + \ldots\ ^{11}).$$

Man bekommt also

$$\begin{aligned} d\Omega &= f_{x_i}\, \omega_i\, (dt) + (-1)^{\alpha-1}\, df_{p_{i\alpha}} \omega_i\, (dt)_\alpha + \\ &\quad + \sum_{i<j,\ \alpha<\beta} (-1)^{\alpha+\beta-1} A_{i\alpha,j\beta}\, (d\omega_i \cdot \omega_j - \omega_i \cdot d\omega_j)\, (dt)_{\alpha\beta} + \\ &\quad + \sum_{i<j,\ \alpha<\beta} (-1)^{\alpha+\beta-1}\, d A_{i\alpha,j\beta}\, \omega_i\, \omega_j\, (dt)_{\alpha\beta} + \cdots \\ &= \left\{ f_{x_i} - \frac{df_{p_{i\alpha}}}{dt_\alpha} + \sum_{\alpha<\beta} A_{i\alpha,j\beta} \left(\frac{dp_{j\beta}}{dt_\alpha} - \frac{dp_{j\alpha}}{dt_\beta} \right) \right\} \frac{\partial x_i}{\partial \vartheta}\, d\vartheta\, (dt) \\ &= \left(f_{x_i} - \frac{df_{p_{i\alpha}}}{dt_\alpha} \right) \frac{\partial x_i}{\partial \vartheta}\, d\vartheta\, (dt)\ ^{13}). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Wir haben schließlich

$$\begin{aligned} J_{\bar{E}} - J_E &= \operatorname{sgn} \varepsilon \int_{\mathfrak{F}} \left(f_{x_i} - \frac{df_{p_{i\alpha}}}{dt_\alpha} \right) \frac{\partial x_i}{\partial \vartheta}\, d\vartheta\, (dt) \\ &= \int_0^\varepsilon d\vartheta \left\{ \int_G \left(f_{x_i} - \frac{df_{p_{i\alpha}}}{dt_\alpha} \right) \frac{\partial x_i}{\partial \vartheta}\, (dt) \right\}. \end{aligned}$$

---

[13]) Die Ableitung nach dem *Parameter* t_α, d. h. längs der Fläche E_ϑ, ist mit geradem d bezeichnet; natürlich ist $\dfrac{dp_{i\beta}}{dt_\alpha} = \dfrac{dp_{i\alpha}}{dt_\beta} = \dfrac{d^2 x_i}{dt_\alpha\, dt_\beta}$. Man beachte, daß im letzten Summenzeichen von (2.4) der Vermerk über i und j weggelassen ist; es ist hier über diese beiden Indizes unabhängig zu summieren und hierzu $A_{i\alpha,j\beta}$ für $i > j$ durch $A_{i\alpha,j\beta} = -A_{j\alpha,i\beta}$ zu definieren.

Dies hat bei genügend kleinem positiven ε dasselbe Vorzeichen wie der Inhalt der geschweiften Klammer an der Stelle $\vartheta = 0$, bei negativem ε das entgegengesetzte. Ein Extremum kann also nur eintreten, wenn diese Größe verschwindet, und wegen der Willkür der „Variationen" $\frac{\partial x_i}{\partial \vartheta}$ schließt man hieraus in bekannter Weise auf das Bestehen der *Eulerschen Gleichungen*

$$\frac{d f_{p_{i\alpha}}}{d t_\alpha} - f_{x_i} = 0. \tag{2.5}$$

Die Lösungen des Variationsproblems sind also unter den Integralen dieser Differentialgleichungen, den *Extremalen*, zu suchen.

3. Transversalität. Der Rand der gesuchten Fläche möge jetzt nicht fest vorgegeben sein; er sei vielmehr auf einer Mannigfaltigkeit H von $\mu - 1 + p$ Dimensionen ($1 \leqq p \leqq n$) beweglich. Wir betrachten wieder eine Schar (2. 1) von μ-Flächen, deren Rand nun nicht mehr notwendig übereinstimmt, aber auf H liegt. Mit S bezeichnen wir die Gesamtheit all dieser Randpunkte, mit $\mathfrak{S}$ die entsprechende μ-Fläche im $\mathfrak{R}_{\mu+n+\mu n}$. Zur linken Seite von (2. 3) kommt dann ein neues Glied hinzu:

$$\int_{\mathfrak{S}} \Omega \text{ [14]}. \tag{3.1}$$

Da die Fläche E jedenfalls auch ein Minimum bei festem Rand ergeben muß, bleiben die Überlegungen des vorigen Abschnitts — *ohne* das neue Glied — bestehen, und wir müssen dann an dieses Glied *für sich* dieselbe Forderung stellen wie an das letzte Integral des vorigen Abschnitts.

Wir beziehen den Rand von E_ϑ auf $\mu - 1$ Parameter $\vartheta_2, \ldots, \vartheta_\mu$ und setzen $\vartheta_1 = \vartheta$, so daß $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_\mu$ eine Parameterdarstellung von S bzw. von $\mathfrak{S}$ ergeben:

$$\begin{gathered} t_\alpha = t_\alpha(\vartheta_\beta), \quad x_i = x_i(\vartheta_\beta) = x_i(\vartheta_1, t_\alpha(\vartheta_\beta)), \\ p_{i\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial t_\alpha}(\vartheta_1, t_\beta(\vartheta_\varrho)). \end{gathered} \tag{3.2}$$

Zur Abkürzung schreiben wir

$$\frac{\partial t_\alpha}{\partial \vartheta_\beta} = l_{\alpha\beta}.$$

Die Ableitungen nach ϑ_1, die die „Randverschiebung" charakterisieren, werden mit δ geschrieben:

$$\frac{\delta t_\alpha}{\delta \vartheta_1} = l_{\alpha 1} \quad \text{und} \quad \frac{\delta x_i}{\delta \vartheta_1} = \frac{\partial x_i}{\partial \vartheta_1} + p_{i\alpha} l_{\alpha 1}.$$

[14]) Das Vorzeichen dieses Gliedes, also die Orientierung von $\mathfrak{S}$, ist für unsere Überlegungen belanglos.

Man überzeugt sich, daß auch jetzt

$$\omega_i = \frac{\partial x_i}{\partial \vartheta_1}\, d\vartheta_1$$

ist.

Jetzt können wir (3. 1) ausrechnen. Wenn wir die algebraischen Komplemente der $l_{\alpha\beta}$ in ihrer Determinante l durch Querstriche bezeichnen, so können wir schreiben

$$(dt) = l(d\vartheta) = \frac{\delta t_\varrho}{\delta \vartheta_1}\, \bar{l}_{\varrho 1}(d\vartheta)\ ^{15}),$$

$$dt_1 \dots dt_{\alpha-1}\, \omega_i\, dt_{\alpha+1} \dots dt_\mu = \frac{\partial x_i}{\partial \vartheta_1} dt_1 \dots dt_{\alpha-1}\, d\vartheta_1 dt_{\alpha+1} \dots dt_\mu = \frac{\partial x_i}{\partial \vartheta_1} \bar{l}_{\alpha 1}(d\vartheta).$$

Also kommt

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{S}} \Omega &= \int_{\mathfrak{S}} \Big(f \frac{\delta t_\alpha}{\delta \vartheta_1} + f_{p_{i\alpha}} \frac{\partial x_i}{\partial \vartheta_1} \Big) \bar{l}_{\alpha 1}(d\vartheta) \\ &= \int_{\mathfrak{S}} \Big\{ f \frac{\delta t_\alpha}{\delta \vartheta_1} + f_{p_{i\alpha}} \Big(\frac{\delta x_i}{\delta \vartheta_1} - p_{i\varrho} \frac{\delta t_\varrho}{\delta \vartheta_1} \Big) \Big\} \bar{l}_{\alpha 1}(d\vartheta) \qquad (3.3) \\ &= \int_{\mathfrak{S}} \Big(a_{\varrho\alpha} \frac{\delta t_\varrho}{\delta \vartheta_1} + f_{p_{i\alpha}} \frac{\delta x_i}{\delta \vartheta_1} \Big) \bar{l}_{\alpha 1}(d\vartheta) \end{aligned}$$

mit der von Carathéodory eingeführten Bezeichnung

$$a_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} f - p_{i\alpha} f_{p_{i\beta}}.$$

Wir integrieren zuerst nach $\vartheta_2, \dots, \vartheta_\mu$ und müssen nach dem anfangs Gesagten verlangen, daß das Resultat an der Stelle $\vartheta_1 = 0$ verschwindet. Es muß also, wenn man mit R den Rand der Extremale E bezeichnet,

$$\int_R \Big(a_{\varrho\alpha} \frac{\delta t_\varrho}{\delta \vartheta_1} + f_{p_{i\alpha}} \frac{\delta x_i}{\delta \vartheta_1} \Big) \bar{l}_{\alpha 1}\, d\vartheta_2 \dots d\vartheta_\mu = 0 \qquad (3.4\,a)$$

sein oder

$$\sum_\alpha (-1)^{\alpha-1} \int_R \Big(a_{\varrho\alpha} \frac{\delta t_\varrho}{\delta \vartheta_1} + f_{p_{i\alpha}} \frac{\delta x_i}{\delta \vartheta_1} \Big)\, dt_1 \dots dt_{\alpha-1} dt_{\alpha+1} \dots dt_\mu = 0; \qquad (3.4\,b)$$

in (3. 4 b) kommen die Parameter nicht mehr vor.

Aus (3. 4) folgt die „Transversalitätsbeziehung" zwischen der Fläche H und der Extremale E. Sie lautet so: jeder Vektor mit Komponenten

$$(\delta t_\alpha,\ \delta x_i), \qquad (3.5)$$

der in einem Punkt von R zu H tangential ist („Verschiebungsvektor"), muß die Gleichung

$$(a_{\varrho\alpha} \delta t_\varrho + f_{p_{i\alpha}} \delta x_i)\, \bar{l}_{\alpha 1} = 0 \qquad (3.6)$$

---

[15]) $(dt) = dt_1 \dots dt_\mu$ und $(d\vartheta) = d\vartheta_1 \dots d\vartheta_\mu$.

erfüllen. Sonst könnte man nämlich eine Schar E_ϱ so bestimmen, daß (3. 4a) nicht gilt.

Um diese Bedingung geometrisch noch besser formulieren zu können, nennen wir eine Richtung (3. 5) zu E *transversal*, wenn sie die μ Gleichungen

$$a_{\varrho\alpha}\delta t_\varrho + f_{p_i\alpha}\delta x_i = 0$$

erfüllt. Wir lösen noch nach δt_α auf und schreiben

$$\delta t_\alpha + P_{i\alpha}\delta x_i = 0 \tag{3. 7}$$

mit der ebenfalls von Carathéodory (im Zusammenhang mit der Legendreschen Transformation) eingeführten Bezeichnung

$$P_{i\alpha} = \overset{\bar{a}}{a}_{\alpha\beta} f_{p_i\beta}. \tag{3. 8}$$

Die Symmetrie der Bezeichnungen leuchtet ein, wenn man bedenkt, daß die zur Extremale E *senkrechten* Richtungen durch

$$\delta t_x + p_{i\alpha}\delta x_i = 0$$

gekennzeichnet sind.

Es gibt n linear unabhängige transversale Richtungen zu jedem Flächenelement $p_{i\alpha}$, z. B.

$$(-P_{j\alpha},\ \delta_{ij}) \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{3. 9}$$

Wir setzen im allgemeinen voraus, daß sie zusammen mit den μ Richtungen

$$(\delta_{\alpha\beta},\ p_{i\beta}) \qquad (\beta = 1, \ldots, \mu),$$

die das Flächenelement aufspannen, $\mu + n$ linear unabhängige Vektoren bilden.

Die Bedingung (3. 6) heißt jetzt so: *das* $(\mu - 1 + p)$*-dimensionale Flächenelement von* H, das (natürlich) die $\mu - 1$ Richtungen

$$\left(\frac{\partial t_\alpha}{\partial \vartheta_\gamma},\ \frac{\partial x_i}{\partial \vartheta_\gamma}\right) \qquad (\gamma = 2, \ldots, \mu) \tag{3. 10}$$

enthält, die das Randelement von E aufspannen, *muß* seinerseits *in dem* $(\mu - 1 + n)$*-dimensionalen Element enthalten sein, das von diesen und von den* n *Transversalenrichtungen* (3. 9) *aufgespannt wird.*

In der Tat ist die Relation (3. 6) notwendig und hinreichend dafür, daß der Vektor (3. 5) von den $\mu - 1 + n$ Vektoren (3. 10) und (3. 9) linear abhängt. Es ist nämlich erstens für $\gamma = 2, \ldots, \mu$

$$\left(a_{\varrho\alpha}\frac{\partial t_\varrho}{\partial \vartheta_\gamma} + f_{p_i\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial \vartheta_\gamma}\right)\bar{l}_{\alpha 1} = (a_{\varrho\alpha} + f_{p_i\alpha}p_{i\varrho})\frac{\partial t_\varrho}{\partial \vartheta_\gamma}\bar{l}_{\alpha 1} = f\frac{\partial t_\alpha}{\partial \vartheta_\gamma}\bar{l}_{\alpha 1} = 0$$

und zweitens für $j = 1, \ldots, n$

$$(-a_{\varrho\alpha}P_{j\varrho} + f_{p_i\alpha}\delta_{ij})\,\bar{l}_{\alpha 1} = (-f_{p_j\alpha} + f_{p_j\alpha})\,\bar{l}_{\alpha 1} = 0.$$

Mit (3. 6) zusammen ist das eine lineare Relation zwischen den *Spalten* der aus allen Vektoren (3. 5), (3. 10) und (3. 9) als *Zeilen* gebildeten Determinante,

woraus wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren (3. 10) und (3. 9) die Behauptung folgt.

4. Die Hadamardsche notwendige Legendre-Bedingung. Die Bedingung, deren Notwendigkeit für das Minimum in diesem Abschnitt bewiesen werden soll, lautet:

$$f_{p_{i\alpha}p_{j\beta}}\varrho_i\varrho_j\lambda_\alpha\lambda_\beta \geqq 0 \tag{4. 1}$$

für alle $\varrho_1, \ldots, \varrho_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_u$. Die biquadratische Form in (4. 1) ist nichts anderes als die quadratische Form

$$f_{p_{i\alpha}p_{j\beta}}u_{i\alpha}u_{j\beta},$$

gebildet für solche Werte der Veränderlichen $u_{i\alpha}$, deren rechteckige Matrix vom Rang 1 ist.

Ich nehme an, für ein bestimmtes Flächenelement der Fläche E, in dessen Umgebung ihre Tangentialebene stetig ist, sei (4. 1) nicht erfüllt; es gibt also gewisse Zahlen ϱ_i und λ_α, so daß $\varrho_i\varrho_i = 1$, $\lambda_\alpha\lambda_\alpha = 1$ und

$$f_{p_{i\alpha}p_{j\beta}}\varrho_i\varrho_j\lambda_\alpha\lambda_\beta = -k < 0 \tag{4. 2}$$

ist. Unter diesen Annahmen werde ich eine Vergleichsfläche $\bar{E}$ konstruieren, die dem Integral einen kleineren Wert erteilt als E. Diese Fläche $\bar{E}$ wird Knicke besitzen, was wir ja allen betrachteten Flächen erlaubt haben. Sind $p_{i\alpha}, \bar{p}_{i\alpha}$ ihre Flächenelemente auf beiden Ufern eines solchen Knicks, so haben diese beiden Flächenelemente $\mu - 1$ linear unabhängige Richtungen gemeinsam; daraus folgt, daß die Matrix $(\bar{p}_{i\alpha} - p_{i\alpha})$ den Rang 1 besitzt, und umgekehrt.

Beim Beweis spielen nur die Differenzen $\bar{x}_i - x_i$, $\bar{p}_{i\alpha} - p_{i\alpha}$ eine Rolle; wir wollen in diesem Abschnitt zur Vereinfachung der Schreibweise annehmen, daß die Fläche E durch die Gleichungen $x_i = 0$ bestimmt ist. Außerdem sei das Koordinatensystem so gewählt, daß der oben betrachtete Punkt von E die Koordinaten $t_\alpha = 0$ besitzt und daß das Flächenelement $p_{i\alpha} = \varrho_i\lambda_\alpha$, das (für den Moment im Ursprung angenommen) mit der t-Ebene $x_i = 0$ nach dem Obigen $\mu - 1$ Richtungen gemein hat, diese längs der $(\mu - 1)$-Ebene $t_1 = 0$ durchsetzt. Dann ist (mit dem Kroneckerschen δ-Symbol) $\lambda_\alpha = \delta_{1\alpha}$, also $p_{i\alpha} = \delta_{1\alpha}\varrho_i$. Statt (4. 2) kommt jetzt einfach

$$f_{p_{i1}p_{j1}}(0, 0, 0)\,\varrho_i\varrho_j = -k < 0. \tag{4. 3}$$

In der t-Ebene betrachte ich das Gebiet

$$Q: \quad \begin{aligned} &-\tau \leqq t_1 \leqq \tau, \\ &-h \leqq t_\gamma \leqq h \end{aligned} \qquad (\gamma = 2, \ldots, \mu). \tag{4. 4}$$

Q zerfällt in 2μ Teilgebiete, bestehend aus den Punkten der Verbindungsgeraden des Nullpunktes mit den Punkten je einer der 2μ Begrenzungsflächen

von Q, die dadurch charakterisiert sind, daß in (4. 4) an *einer* Stelle immer das Gleichheitszeichen steht. Diese 2μ Teilgebiete sind nicht alle kongruent, aber sie besitzen alle das gleiche Volumen

$$\frac{1}{\mu}\tau(2h)^{\mu-1}. \tag{4.5}$$

Ich konstruiere gleich eine Schar E_ϑ, die für $\vartheta = \varepsilon > 0$ die Fläche $\bar{E}$ mit der gewünschten Eigenschaft enthalten wird. Es sei $x_i = \vartheta\tau\varrho_i$ für $t_\alpha = 0$ und $x_i = 0$ am Rand und außerhalb von Q, während die x_i längs der vorhin betrachteten Geraden linear sein sollen. Dann ist $x_i(\vartheta, t_\alpha)$ überall stetig und $|x_i| \leqq \vartheta\tau$. Die $p_{i\alpha}$ sind in jedem der 2μ Teilgebiete konstant. Wir bezeichnen die beiden zu $t_1 = \mp\varepsilon$ gehörenden Gebiete mit Q', die beiden zu $t_\gamma = \mp h$ gehörenden Gebiete mit Q''_γ. Dann ist

$$\begin{aligned} &\text{in } Q': \quad p_{i\alpha} = \pm\delta_{1\alpha}\vartheta\varrho_i \qquad \text{und} \quad x_i = \vartheta\varrho_i(\tau \pm t_1), \\ &\text{in } Q''_\gamma: \quad p_{i\alpha} = \pm\delta_{\gamma\alpha}\vartheta\frac{\tau}{h}\varrho_i \quad \text{und} \quad x_i = \vartheta\frac{\tau}{h}\varrho_i(h \pm t_\gamma). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Die verschiedenen Vorzeichen gehören zu den beiden Hälften jedes Gebietes. *Ich behaupte, ε, τ und h so wählen zu können, daß $J_{\bar{E}} - J_E$ negativ wird.*

Wegen $\varepsilon > 0$ wird

$$J_{\bar{E}} - J_E = \int_{\mathfrak{F}} d\omega,$$

wobei $\mathfrak{F}$, wenn wir wie in § 2 ϑ, $t_1, \ldots, t_\mu$ als Parameter nehmen, durch

$$0 \leqq \vartheta \leqq \varepsilon, \ (t_\alpha) \text{ in } Q$$

definiert ist. Mit $\mathfrak{F}', \mathfrak{F}''_\gamma$ seien die Q', Q''_γ entsprechenden Teile von $\mathfrak{F}$ bezeichnet. Dann ist

$$\int_{\mathfrak{F}} d\omega = \int_{\mathfrak{F}} (f_{x_i}\, d x_i + f_{p_{i\alpha}}\, d p_{i\alpha})\,(dt)$$

$$= \int_{\mathfrak{F}'} \varrho_i \{f_{x_i}(\tau \pm t_1) \pm f_{p_{i1}}\}\, d\vartheta\,(dt) + \sum_{\gamma=2}^{\mu} \int_{\mathfrak{F}''_\gamma} \frac{\tau}{h}\varrho_i \{f_{x_i}(h \pm t_\gamma) \pm f_{p_{i\gamma}}\}\, d\vartheta\,(dt)\ ^{11}),$$

wo in den beiden Hälften jedes Teilgebietes das obere bzw. untere Vorzeichen zu nehmen ist.

$\varepsilon > 0$, $\tau_0 > 0$ und $h_0 > 0$ wähle ich so klein, daß für

$$0 < \tau < \tau_0, \quad 0 < h < h_0, \quad |t_1| \leqq \tau, \quad |t_\gamma| \leqq h, \quad |x_i| \leqq \varepsilon\tau, \quad |p_{i\alpha}| \leqq \varepsilon \tag{4.7}$$

die Beträge aller hier vorkommenden Ableitungen von f unterhalb einer festen Schranke liegen und außerdem

$$f_{p_{i1}p_{j1}}\varrho_i\varrho_j < -\frac{k}{2}$$

bleibt.

Wegen (4. 5) wird dann die Gesamtheit der ersten Summanden von jedem Integral durch

$$M_1 \varepsilon \tau^2 h^{\mu-1}$$

abgeschätzt, und für die zweiten Summanden findet sich bei $\mathfrak{F}''$ eine Schranke

$$M_2 \varepsilon \tau^2 h^{\mu-2}.$$

$M_1 > 0$ und $M_2 > 0$ hängen von τ und h nicht ab.

Beim zweiten Summanden von $\mathfrak{F}'$ setzen wir

$$\begin{aligned} f_{p_{i1}}(t_\alpha, \vartheta \varrho_j(\tau \pm t_1), \pm \delta_{1\alpha} \vartheta \varrho_j) \\ = \{f_{p_{i1}}(t_\alpha, \vartheta \varrho_j(\tau \pm t_1), \pm \delta_{1\alpha} \vartheta \varrho_j) - f_{p_{i1}}(t_\alpha, \vartheta \varrho_j(\tau \pm t_1), 0)\} + \\ + \{f_{p_{i1}}(t_\alpha, \vartheta \varrho_j(\tau \pm t_1), 0) - f_{p_{i1}}(0, 0, 0)\} + f_{p_{i1}}(0, 0, 0). \end{aligned}$$

Der letzte Summand liefert wegen der entgegengesetzten Vorzeichen in den beiden Teilen von $\mathfrak{F}'$ bei der Integration Null. Die zweite geschweifte Klammer strebt mit τ und h gleichmäßig in ϑ gegen Null; das zugehörige Integral kann durch

$$M_3(h, \tau) \varepsilon \tau h^{\mu-1}$$

mit $\lim\limits_{\substack{\tau \to 0 \\ h \to 0}} M_3 = 0$ abgeschätzt werden. Die erste Klammer endlich ist gleich $\pm \vartheta \varrho_j \widetilde{f}_{p_{i1} p_{j1}}$, wo der Zirkumflex gewisse Zwischenwerte für die Argumente aus dem Bereich (4. 7) andeutet, und liefert folglich für die Integralsumme einen negativen Beitrag, dessen Betrag oberhalb einer Schranke

$$M_4 \varepsilon^2 \tau h^{\mu-1}$$

liegt, wo $M_4 > 0$ wieder von τ und h nicht abhängt.

Man rechnet sofort nach, daß es möglich ist, τ und h so zu wählen, daß dies letzte Glied alle anderen überwiegt; womit der Beweis für unsere Behauptung erbracht ist [16]).

Zweites Kapitel.

Die hinreichenden Bedingungen.

5. Zu hinreichenden Bedingungen gelangt man durch die Theorie der *geodätischen Felder*. Wir sprechen von einem *Feld*, wenn die $p_{i\alpha}$ als Funktionen von (t_β, x_j) gegeben sind. Es handelt sich also um eine $(\mu + n)$-Fläche im

[16]) Die zur Hadamardschen notwendigen Bedingung gehörige „Weierstraßsche" notwendige Bedingung, nämlich daß die De Donder-Weylsche $\mathfrak{E}$-Funktion (s. unten) für alle solchen $\bar{p}_{i\alpha}$ nichtnegativ sein muß, für die die Matrix $\bar{p}_{i\alpha} - p_{i\alpha}$ den Rang 1 hat, wurde kürzlich in eleganter Weise bewiesen von *L. M. Graves*, The Weierstraß condition for multiple integral variation problems. Duke Math. Journ. 5 (1939), S. 656—660.

$\mathfrak{R}_{\mu+n+\mu n}$; jedoch wird nicht die Integrabilität der zugehörigen Gleichungen $\omega_i = 0$ verlangt, es handelt sich also im allgemeinen nicht um eine n-parametrige Schar von μ-Flächen im $\mathfrak{R}_{\mu+n}$, die die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial x_i}{\partial t_\alpha} = p_{i\alpha}$$

erfüllen (bzw. um die zugehörigen auf der eben erwähnten $(\mu + n)$-Fläche im $\mathfrak{R}_{\mu+n+\mu n}$ gelegenen μ-Flächen). Wie in „*St.*“ bezeichnen wir durch eckige Klammern die Funktion oder Form im $\mathfrak{R}_{\mu+n}$, die aus einer Funktion oder Form im $\mathfrak{R}_{\mu+n+\mu n}$ durch Einsetzen der Funktionen $p_{i\alpha}(t_\beta, x_j)$ entsteht. Und mit Lepage nennen wir ein Feld *geodätisch*, wenn $[\Omega]$ ein vollständiges Differential, d. h. $d[\Omega] = 0$ ist. Dieser Begriff hängt also wesentlich von der Wahl der willkürlichen Funktionen $A_{i\alpha, j\beta}$ usw. in (2. 2) ab: ein Feld, das in bezug auf *eine* Form Ω geodätisch ist, ist es in bezug auf eine andere im allgemeinen nicht. Eine μ-Fläche E heißt in ein Feld *eingebettet*, wenn sie ein Integral der zugehörigen Gleichungen $\omega_i = 0$ ist; diese Gleichungen brauchen dazu natürlich nur längs dieser Fläche integrabel zu sein.

Ist E in ein geodätisches Feld eingebettet und ist $\bar{E}$ eine zweite Fläche mit demselben Rand, die im Feld verläuft, so ist nach dem Stokesschen Satz

$$J_E = \int_E [\Omega] = \int_{\bar{E}} [\Omega]$$

und daher

$$J_{\bar{E}} - J_E = \int_{\bar{E}} \{f(dt) - [\Omega]\} = \int_{\bar{E}} \mathcal{E}(dt). \tag{5. 1}$$

Hierin ist (man braucht bloß im Ausdruck (2. 2) für Ω statt ω_i immer $(\bar{p}_{i\alpha} - p_{i\alpha})\, dt_\alpha$ zu schreiben)

$$\mathcal{E}(t_\alpha, x_i, p_{i\alpha}, \bar{p}_{i\alpha}) = \bar{f} - f - (\bar{p}_{i\alpha} - p_{i\alpha}) f_{p_{i\alpha}} - \\ - \tfrac{1}{2} A_{i\alpha, j\beta} (\bar{p}_{i\alpha} - p_{i\alpha})(\bar{p}_{j\beta} - p_{j\beta}) - \ldots \text{ [17]}. \tag{5. 2}$$

Es ist klar, daß

$$\mathcal{E} > 0 \text{ für die } (t_\alpha, x_i, p_{i\alpha}) \text{ des Feldes und alle } \bar{p}_{i\alpha} \tag{5. 3}$$

eine hinreichende Bedingung für das (starke) Minimum darstellt, falls man E in ein geodätisches Feld eingebettet hat. Für das schwache Minimum ($\bar{p}_{i\alpha} - p_{i\alpha}$ hinreichend klein) genügt es, wenn die $\mathcal{E}$-Funktion für $\bar{p}_{i\alpha}$ nahe bei $p_{i\alpha}$ positiv ist. Hierfür müssen die quadratischen Glieder in der Entwicklung von $\mathcal{E}$ nach Potenzen von $\bar{p}_{i\alpha} - p_{i\alpha}$ (in der absolute und lineare Glieder

[17]) Im letzten Glied von (5. 2) und von (5. 4) ist über alle vier Indizes unabhängig zu summieren und hierzu $A_{i\alpha, j\beta}$ nicht nur wie in [13]) in i und j, sondern auch in α und β schiefsymmetrisch anzunehmen, also für $\alpha > \beta$ durch $A_{i\alpha, j\beta} = -A_{i\beta, j\alpha}$ zu definieren. Man beachte, daß wegen dieser schiefen Symmetrie die Zusatzglieder in (5. 4) Null sind, sobald die Matrix der $u_{i\alpha}$ vom Rang 1 ist. Vgl. (4. 1)!

fehlen) eine positiv definite Form bilden. Diese „hinreichende Legendre-Bedingung von Hadamard" lautet

$$(5.4) \qquad (f_{p_{i\alpha}p_{j\beta}} - A_{i\alpha,j\beta})\, u_{i\alpha} u_{j\beta} > 0.$$

Über die Bedeutung, die die Willkür in der Wahl der $A_{i\alpha,j\beta}$ hier besitzt, wird weiter unten die Rede sein[18]).

Von den Eulerschen Gleichungen war bisher in diesem Abschnitt nicht die Rede. Da ein System von hinreichenden Bedingungen das Erfülltsein aller notwendigen impliziert, schließt man jetzt: eine Fläche, die in ein geodätisches Feld eingebettet ist und (5. 4) erfüllt, ist eine Extremale. Darüber hinaus gilt, wie die Rechnung zeigt: jede Fläche, die in ein geodätisches Feld eingebettet ist, ist eine Extremale. Man braucht, um das zu sehen, von den Gleichungen, die aus $d[\Omega] = 0$ folgen[19]), nur diejenigen hinzuschreiben, die das Verschwinden der Koeffizienten von $\omega_i(dt)$ fordern. Hierzu beachte man, daß für jede Funktion φ des $\mathfrak{R}_{\mu+n+\mu n}$ im Feld

$$\begin{aligned} d[\varphi] &= \frac{\partial[\varphi]}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial[\varphi]}{\partial t_\beta} dt_\beta \\ &= \frac{\partial[\varphi]}{\partial x_j} \omega_j + \left\{ \frac{\partial[\varphi]}{\partial t_\beta} + \frac{\partial[\varphi]}{\partial x_j} p_{j\beta} \right\} dt_\beta = \frac{\partial[\varphi]}{\partial x_j} \omega_j + \frac{d\varphi}{dt_\beta} dt_\beta \end{aligned}$$

ist, wo $\frac{d\varphi}{dt_\beta}$ im allgemeinen nur eine Abkürzung für die geschweifte Klammer, bei einer eingebetteten Fläche aber Differentiation längs dieser Fläche bedeutet. Mit Benutzung dieser Formel liefert eine ähnliche Rechnung wie (2. 4) für die in Rede stehenden Koeffizienten

$$f_{x_i} - \frac{d f_{p_{i\alpha}}}{dt_\alpha} + \sum_{\alpha<\beta} A_{i\alpha,j\beta} \left(\frac{dp_{j\beta}}{dt_\alpha} - \frac{dp_{j\alpha}}{dt_\beta} \right).$$

Aus ihrem Verschwinden folgt also wegen der Integrabilität längs der eingebetteten Fläche in der Tat

$$f_{x_i} - \frac{d f_{p_{i\alpha}}}{dt_\alpha} = 0.$$

---

[18]) An dieser Stelle sei eine Arbeit von *R. Debever* (Les champs de Mayer dans le calcul des variations des intégrales multiples. Bull. Acad. Roy. Belg. V. s. 23 (1937) S. 809–815) erwähnt, in der gezeigt wird, daß man zu einer beliebigen ein Feld bildenden (d. h. ein Stück des $\mathfrak{R}_{\mu+n}$ einfach überdeckenden) n-parametrigen Schar von Extremalen die $A_{i\alpha,j\beta}$ (nur diese; die höheren Glieder können Null sein) so wählen kann, daß das Feld in bezug auf *dieses* Ω geodätisch ist. Ist dann (5. 4) mit diesen $A_{i\alpha,j\beta}$ erfüllt, so liegt ein schwaches Minimum vor. Man braucht also kein geodätisches Feld zu konstruieren, sondern bloß sich eine solche Extremalenschar zu verschaffen und die zugehörigen $A_{i\alpha,j\beta}$ zu berechnen, was durch Quadraturen geschehen kann. Alles gilt aber nur bei festem Rand — vgl. die folgenden Abschnitte.

[19]) Bei Lepage [6]) findet man sie ausgeschrieben im Falle $\mu = 2$.

Wir haben also schließlich den folgenden Satz von hinreichenden Bedingungen dafür, daß eine Extremale ein Minimum bei festem Rand liefert:

1. *Legendresche Bedingung* (5. 4) *für das schwache, Weierstraßsche Bedingung* (5. 3) *für das starke Minimum, zu irgendeinem Ω gehörig.*

2. *Möglichkeit der Einbettung in ein zu diesem Ω gehöriges geodätisches Feld*[20]).

6. In der im vorigen Abschnitt entwickelten allgemeinen Theorie von Lepage — und ebenso in der Theorie von De Donder-Weyl, die man aus ihr erhält, wenn man alle willkürlichen Funktionen durch Null ersetzt — kommt der Begriff der Transversalität nicht vor. Wir wissen aber, daß die Transversalität bei beweglichem Rand wesentlich wird. In der Tat gelten die hinreichenden Bedingungen des § 5 nur bei festem Rand; von einer Möglichkeit, den Rand zu verschieben, ist bei einem vollständigen Differential in μ Dimensionen im allgemeinen nicht die Rede.

Um zu hinreichenden Bedingungen bei beweglichem Rand zu kommen, muß man versuchen, sich so etwas wie die „vollständigen Figuren" bei einfachen Integralen zu verschaffen; hierzu müßte eine Verallgemeinerung des Kneserschen Transversalensatzes gelten. Vgl. „*St.*", § 8. Wir fragen, ob sich das durch geeignete Wahl von Ω (d. h. der willkürlichen Funktionen) bewerkstelligen läßt.

Die zu diesem Ω gehörigen geodätischen Felder werden die folgende Eigenschaft besitzen müssen (wir reden einstweilen nur von solchen Feldern, die überall integrabel sind, also aus einer n-parametrigen Extremalenschar bestehen): Es gibt eine punktweise Abbildung der einzelnen Extremalen aufeinander, so daß einander zugeordnete Gebiete immer den gleichen Wert für das Integral J_E — oder was dasselbe ist, $\int [\Omega]$ — ergeben. Darüber hinaus besitzt das letztere Integral auch für ein beliebiges im Feld liegendes μ-Flächenstück F den gleichen Wert wie für das Stück von irgendeiner der Feldextremalen, das man bekommt, wenn man die Punkte von F gemäß der Abbildung auf diese Extremale „projiziert". (Der Einfachheit halber betrachten wir nur solche Flächenstücke, die jeden „Projektionsstrahl" nur einmal treffen.)

Die Formeln, die sich aus dieser Forderung ergeben werden, verlangen $f \neq 0$. Wir setzen von hier ab voraus, daß (zumindest für die Flächenelemente des betrachteten Feldes) $f > 0$ ist.

Wir führen auf irgendeiner der Feldextremalen Parameter $\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu$ ein. Zufolge der Abbildung überträgt sich die Parameterdarstellung auf alle

[20]) Die Möglichkeit, ein genügend kleines Stück einer Extremalen in ein geodätisches Feld einzubetten, ist nur für die im folgenden besprochenen Spezialfälle bewiesen worden[3]) [5]). Zu entscheiden, ob ein vorgegebenes Extremalenstück „genügend klein" ist, wäre Sache einer Theorie der zweiten Variation.

anderen Extremalen, so daß zugeordneten Punkten gleiche Parameterwerte entsprechen. Man kann die Parameter überdies so wählen, daß auf der Ausgangsextremale — und darauf auf allen anderen Extremalen und auf jedem Flächenstück im Feld — das in Rede stehende Integral gleich dem Flächeninhalt in der λ-„Ebene" wird:

$$\int [\Omega] = \int d\lambda_1 \dots d\lambda_\mu. \tag{6.1}$$

Die λ_α sind für jeden Punkt des Feldes, also als Funktionen im $\mathfrak{R}_{\mu+n}$ (von denen wir annehmen wollen, daß sie stetige Ableitungen besitzen) definiert:

$$\lambda_\alpha = S_\alpha(t_\beta, x_j). \tag{6.2}$$

Führt man sie zusammen mit den x_i als Gauß-Koordinaten im Feld ein und rechnet $[\Omega]$ auf diese Parameter um, so ergibt die Form $[\Omega] - d\lambda_1 \dots d\lambda_\mu$ über jedes Flächenstück integriert den Wert Null; also ist

$$[\Omega] = dS_1 \dots dS_\mu. \tag{6.3}$$

Das heißt nichts anderes, als daß $[\Omega]$ *von der Klasse* μ *ist* (§ 1). Umgekehrt, wenn $[\Omega]$ von der Klasse μ ist, dann kann man Funktionen $S_1, \dots S_\mu$ so bestimmen, daß (6. 3) gilt, und das geodätische Feld erfüllt alle unsere Forderungen.

Weil $[\Omega]$ ein vollständiges Differential ist, so ist nach dem Schluß von § 1 auch der *Rang* von $[\Omega]$ gleich μ, und dieser Rang ist nicht größer als der von Ω. Wenn man also die willkürlichen Funktionen in Ω so bestimmen kann, daß Ω vom Rang μ ist (also das Produkt von μ Pfaffschen Formen), dann wird jedes zu diesem Ω gehörende geodätische Feld alle unsere Forderungen erfüllen und hinreichende Bedingungen für Probleme mit beweglichem Rand liefern.

Dies ist tatsächlich möglich. Man kommt aber zu der gewünschten Form Ω schneller von (6. 3) aus durch die folgende Überlegung.

Nehmen wir an, im Felde sei die $\mathcal{E}$-Funktion positiv für die in Frage kommenden Werte ihrer Argumente, bzw. die Legendresche Bedingung sei erfüllt. Dann erkennt man, daß *die n-Flächen* $S_\alpha = \lambda_\alpha$ *die Feldextremalen transversal schneiden*. In der Tat, nehmen wir eine Feldextremale E und auf ihr einen von einer beliebigen geschlossenen $(\mu - 1)$-Fläche R begrenzten Bereich. Die durch die Punkte von R gehenden Flächen $S_\alpha = \lambda_\alpha$ bilden eine $(\mu - 1 + n)$-„Röhre". Wegen $f > 0$ wird das betrachtete Flächenstück die Minimumaufgabe mit jeder Randbedingung der folgenden Art lösen: R soll auf einer Mannigfaltigkeit H beweglich sein, die außerhalb der Röhre verläuft. H berührt dann längs R die Röhre von außen und erfüllt die notwendige Transversalitätsbedingung von § 3, und darin ist wegen der Willkür der Normalenrichtung von R auf E unsere Behauptung enthalten.

Dies führt uns dazu, von den geodätischen Feldern endgültig folgendes zu verlangen (wir tun es unabhängig davon, ob die $p_{i\alpha}$ zu einer Extremalenschar gehören oder nicht): Es soll eine Flächenschar (6. 2) geben, so daß (6. 3) gilt und die Flächen (6. 2) die Flächenelemente $p_{i\alpha}$ transversal schneiden.

Die letzte Forderung drückt sich nach (3. 9) durch die Formeln

$$\frac{\partial S_\alpha}{\partial x_i} = P_{i\beta}\,\frac{\partial S_\alpha}{\partial t_\beta} \tag{6.4}$$

aus, mit den durch (3. 8) erklärten $P_{i\alpha}$. Und daher bekommt man für $[\Omega]$

$$\begin{aligned}
[\Omega] = dS_1 \ldots dS_\mu &= \prod_\alpha \left(\frac{\partial S_\alpha}{\partial t_\beta}\,dt_\beta + \frac{\partial S_\alpha}{\partial x_i}\,dx_i\right)\\
&= \prod_\alpha \frac{\partial S_\alpha}{\partial t_\beta}(dt_\beta + P_{i\beta}\,dx_i) = \frac{\partial(S_1,\ldots,S_\mu)}{\partial(t_1,\ldots,t_\mu)} \prod_\alpha (dt_\alpha + P_{i\alpha}\,dx_i)\\
&= \frac{\partial(S_1,\ldots,S_\mu)}{\partial(t_1,\ldots,t_\mu)} \prod_\alpha \left(dt_\alpha + \frac{\bar a_{\alpha\beta}}{a} f_{p_{i\beta}}\,dx_i\right)\\
&= \frac{\partial(S_1,\ldots,S_\mu)}{\partial(t_1,\ldots,t_\mu)} \prod_\alpha \frac{\bar a_{\alpha\beta}}{a}\,(a_{\varrho\beta}\,dt_\varrho + f_{p_{i\beta}}\,dx_i)\\
&= \frac{\partial(S_1,\ldots,S_\mu)}{\partial(t_1,\ldots,t_\mu)}\,\frac{1}{a} \prod_\alpha (f\,dt_\alpha + f_{p_{i\alpha}}\omega_i).
\end{aligned}$$

(Wir hätten eigentlich um alle Ausdrücke in f und seinen Ableitungen eckige Klammern setzen müssen.)

Der Vergleich des Koeffizienten von $dt_1 \ldots dt_\mu$ hier und in (2. 2) zeigt, daß

$$\frac{\partial(S_1,\ldots,S_\mu)}{\partial(t_1,\ldots,t_\mu)} = \frac{[a]}{[f^{\mu-1}]} \tag{6.5}$$

sein muß[21]). Schreiben wir versuchsweise die Form

$$\Omega = \frac{1}{f^{\mu-1}}\,(f\,dt_1 + f_{p_{i1}}\omega_i) \ldots (f\,dt_\mu + f_{p_{i\mu}}\omega_i) \tag{6.6}$$

hin. Sie hat auch den richtigen zweiten Term von (2. 2), sie ist vom Rang μ, und damit haben wir die Form gefunden, die wir brauchen.

Die zu diesem Ω gehörigen geodätischen Felder sind die von Carathéodory[2]) eingeführten. Da wir die Transversalität unabhängig davon eingeführt haben, können wir sie auch so definieren: ein Feld heißt geodätisch, wenn sich die dazu

---

[21]) Carathéodory[2]) setzt im Zusammenhang mit seiner Legendre-Transformation

$$\frac{f^{\mu-1}}{a} = F(t_\alpha, x_i, P_{i\alpha});$$

dann ist

$$F \cdot \frac{\partial(S_1,\ldots,S_\mu)}{\partial(t_1,\ldots,t_\mu)} = 1$$

zusammen mit (6. 4) gewissermaßen die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung.

transversalen Flächenelemente zu einer Schar von n-Flächen (6. 2) zusammenschließen, so daß (6. 4) und (6. 5) gilt.

Ein solches geodätisches Feld bildet eine „vollständige Figur" im Sinne Carathéodorys, wenn es aus einer Extremalenschar besteht. Wie bei festem Rand braucht man aber auch bei allgemeineren Problemen durchaus keine vollständige Figur, um hinreichende Bedingungen für das Minimum zu bekommen. Vielmehr brauchen die Gleichungen $\omega_i = 0$ bloß längs der zu untersuchenden Extremale, die man in das Feld eingebettet hat, integrabel zu sein.

Wir schreiben noch die zur gefundenen Form (6. 6) gehörenden Werte für die $A_{i\alpha, j\beta}$ auf, die ja in der Legendreschen Bedingung (5. 4) allein vorkommen:

$$A_{i\alpha, j\beta} = \frac{1}{f}\left(f_{p_{i\alpha}} f_{p_{j\beta}} - f_{p_{i\beta}} f_{p_{j\alpha}}\right). \tag{6. 7}$$

Auch die zugehörige $\mathcal{E}$-Funktion rechnet man leicht aus. Man muß nur wie früher den Koeffizienten von dt in $\bar{f}\,dt - \Omega$ ausrechnen, wo man ω_i durch $(\bar{p}_{i\alpha} - p_{i\alpha})\,dt_\alpha$ ersetzt hat, diesmal mit dem Ausdruck (6. 6) für Ω. Man findet

$$\mathcal{E}(t_u, x_i, p_{i\alpha}, \bar{p}_{i\alpha}) = \bar{f} - \frac{1}{f^{\mu-1}}\left|\delta_{\alpha\beta} f + (\bar{p}_{i\alpha} - p_{i\alpha}) f_{p_{i\beta}}\right|. \tag{6. 8}$$

Ein Satz von hinreichenden Bedingungen für ein Problem mit beweglichem Rand ist also der folgende: Das Extremalenstück soll klein genug sein[20]), um in ein zur Form (6. 6) gehöriges geodätisches Feld eingebettet werden zu können; es soll die Legendre-Bedingung

$$\left\{f_{p_{i\alpha} p_{j\beta}} - \frac{1}{f}\left(f_{p_{i\alpha}} f_{p_{j\beta}} - f_{p_{i\beta}} f_{p_{j\alpha}}\right)\right\} u_{i\alpha}\, u_{j\beta} > 0 \tag{6. 9}$$

erfüllen, bzw. (für starkes Minimum) soll die $\mathcal{E}$-Funktion (6. 8) positiv sein; weiter soll die Transversalitätsbedingung für den Rand erfüllt sein und außerdem eine „Transversalitätsbedingung zweiter Ordnung", die man wegen $f > 0$ folgendermaßen formulieren kann: es soll möglich sein, das geodätische Feld so zu wählen, daß die Mannigfaltigkeit, auf der der Rand beweglich ist, die durch den Rand gelegte „Röhre" aus geodätischen Transversalen *von außen* berührt.

Denn die Weierstraßsche Formel (5. 1) gilt jetzt für alle Vergleichsflächen, deren Rand auf dieser selben Röhre liegt, und was dann noch hinzukommt, ist wegen $f > 0$ positiv. Für das schwache Minimum genügt es, f für die Flächenelemente des Feldes positiv vorauszusetzen.

7. Die Legendresche Bedingung und der Begriff der Regularität. Bei einfachen Integralen pflegt man ein Linienelement *regulär* zu nennen, wenn es die Legendresche Bedingung mit dem $>$-Zeichen erfüllt. Carathéodory nennt „Extremale" nur eine solche Kurve, von der jeder Punkt die Eigenschaft hat:

wenn man die Kurve in einem genügend kleinen den Punkt enthaltenden Intervall abändert, so vergrößert man den Wert des Integrals. Eine solche Kurve muß offenbar über die Eulerschen Gleichungen hinaus die notwendige Legendre-Bedingung (mit dem $\geqq$-Zeichen) erfüllen. Hinreichend ist, daß sie die Eulerschen Gleichungen erfüllt und aus lauter regulären Linienelementen besteht; denn genügend kleine Stücke einer solchen Kurve kann man stets in ein geodätisches Feld einbetten.

Bei mehrfachen Integralen liegen die Dinge bedeutend komplizierter. Man könnte zunächst daran denken, jedes Flächenelement regulär zu nennen, das die Hadamardsche Bedingung (4. 1) mit dem $>$-Zeichen erfüllt. Bei dieser Definition wäre aber nur dann gewährleistet, daß man durch jedes reguläre Flächenelement auch wirklich eine Extremale im Carathéodoryschen Sinn legen kann, wenn aus (4. 1) folgen würde, daß man die schiefsymmetrischen Zusatzterme, also die willkürlichen Funktionen $A_{i\alpha, j\beta}$, so bestimmen kann, daß (5. 4) gilt[22]).

Dies ist nun keineswegs immer der Fall. Vielmehr ist es nur richtig, solange $\mu \leqq 2$ oder $n \leqq 2$ ist, für $\mu > 2$, $n > 2$ dagegen falsch[23]).

Die erwähnte Forderung wäre erfüllt, wenn man ein Flächenelement eben nur dann regulär nennen würde, wenn es Größen $A_{i\alpha, j\beta}$ gibt, so daß (5. 4) gilt. Diese Definition ist aber recht kompliziert, es klafft bereits eine Lücke zwischen „notwendig" und „hinreichend", und schließlich dürfen wir nach § 6 und wie das Beispiel des § 8 zeigen wird, nicht einmal erwarten, daß die in diesem Sinne regulären Extremalen auch bei allgemeineren Randbedingungen Lösungen des Problems sind.

Man wird hier auf einen Mangel jener Carathéodoryschen Extremalendefinition aufmerksam, der freilich bei einfachen Integralen überhaupt nicht in Erscheinung tritt: sie ist gewissermaßen nur auf Probleme mit festem Rand zugeschnitten[24]). Es erscheint darum angebracht, bei mehrfachen

---

[22]) Angenommen die Möglichkeit der Einbettung in ein geodätisches Feld, die nur für $A_{i\alpha, j\beta} = 0$ [5]) und für die Größen (6. 7)[3]) bewiesen worden ist.

[23]) *F. J. Terpstra*, Die Darstellung biquadratischer Formen als Summen von Quadraten mit Anwendung auf die Variationsrechnung. Math. Annalen **116** (1939), S. 166—180. Vgl. auch *P. Finsler*, Über eine Klasse algebraischer Gebilde (Freigebilde). Comm. math. Helv. **9** (1937), S. 172—187. Über das Vorkommen definiter und semidefiniter Formen in Scharen quadratischer Formen. Comm. math. Helv. **9** (1937), S. 187—191. Die Untersuchungen Finslers wurden ebenfalls ursprünglich von Carathéodory zu dem hier vorliegenden Zweck angeregt.

[24]) In dieser Hinsicht ist Tonellis Begriff „estremante" (L. Tonelli, Fondamenti di calcolo delle variazioni, 2. Band, Bologna 1923) weittragender, weil er gewissermaßen auf die jeweilige Randbedingung Bezug nimmt. Es würde aber bei den hier behandelten Problemen sehr schwer sein, allgemeine Sätze für die Extremanten aufzustellen, die Legendresche Bedingung betreffend.

Integralen von einer ähnlichen Definition Abstand zu nehmen; ich habe mich daher immer dem sonst üblichen Sprachgebrauch angeschlossen, wonach alle Lösungen der Eulerschen Gleichungen Extremalen heißen.

Und wenn man überhaupt einen Regularitätsbegriff einführen will, so erscheint es am zweckmäßigsten, im Sinne von § 6 zu definieren: ein Flächenelement heißt regulär, wenn es die Legendre-Bedingung (6. 9) erfüllt. Diese verhältnismäßig einfache Definition liefert wenigstens in jedem Falle Hinreichendes[25]). Man muß sich aber darüber klar sein, daß viele Lösungen vieler Probleme — sogar bei beweglichem Rand — nicht unter den in diesem Sinne regulären Extremalen zu suchen sind.

8. Das folgende Beispiel soll zeigen, daß es tatsächlich sogar recht einfache Fälle gibt, wo die Hadamardsche hinreichende Legendre-Bedingung *nicht* hinreicht, weil der Rand beweglich ist.

Es sei $\mu = 2$ und $n = 2$, wir nennen die unabhängigen Veränderlichen s und t, die abhängigen x und y und lassen der größeren Deutlichkeit halber griechische Indizes die Buchstaben s und t, lateinische die Buchstaben x und y durchlaufen. Die Grundfunktion des Variationsproblems sei

$$f = p_{xs}^2 + 2\,p_{xt}^2 + 2\,p_{ys}^2 + p_{yt}^2.$$

Hier sind alle 2-Ebenen Extremalen. Wir betrachten die Ebene

$$E\colon\quad x = -t,\ y = 2s \tag{8. 1}$$

und das Feld, das aus allen zu dieser Ebene parallelen Ebenen besteht. Dieses Feld ist gegeben durch die Formeln

$$p_{xs} = p_{yt} = 0,\quad p_{xt} = -1,\quad p_{ys} = 2.$$

Die verschiedenen bei festem Rand möglichen Theorien unterscheiden sich nur durch *einen* willkürlichen Koeffizienten in der Form Ω:

$$A_{xs,\,yt} = -A_{xt,\,ys} = A_{yt,\,xs} = -A_{ys,\,xt}.$$

Nimmt man diese Funktion, wie f, nur von den $p_{i\alpha}$ abhängig an, so hat $[\Omega]$ in dem oben betrachteten Feld konstante Koeffizienten, und dieses Feld ist also in bezug auf alle diese Ω geodätisch. Sehen wir aber zu, wie es sich bei

---

[25]) In gewissem Sinne mag man sogar behaupten, daß (6. 9) mit dem $\geqq$-Zeichen *notwendig* ist. Nach [3]) ist die Einbettung in ein geodätisches Feld auch möglich, wenn diese quadratische Form indefinit ist, es darf nur ihre Determinante nicht verschwinden. Tritt dieser Fall für ein Flächenelement einer Extremalen ein, so begrenzt die „Röhre" aus geodätischen Transversalen, die man durch den Rand einer genügend kleinen Umgebung des Elements legt, auch ein diesem Extremalenstück benachbartes Flächenstück, das dem Integral einen kleineren Wert erteilt. Vgl. das Beispiel des § 8, wo diese Überlegung „im Großen" richtig ist.

verschiedenen Ω mit der Legendreschen Bedingung und mit der $\mathfrak{E}$-Funktion verhält.

Es ist

$$\tfrac{1}{2} f_{p_{i\alpha} p_{j\beta}} u_{i\alpha} u_{j\beta} = u_{xs}^2 + 2\, u_{xt}^2 + 2\, u_{ys}^2 + u_{yt}^2.$$

Also ist nicht nur die Bedingung (4. 1) mit dem $>$-Zeichen erfüllt, sondern auch die Hadamardsche hinreichende Legendre-Bedingung: in der Schar der quadratischen Formen gibt es eine positiv definite, nämlich die De Donder-Weylsche mit $A_{xs,\,yt} = 0$. Die zugehörige $\mathfrak{E}$-Funktion rechnen wir gleich für das betrachtete Feld aus:

$$\mathfrak{E} = \bar{p}_{xs}^2 + 2\,(\bar{p}_{xt} + 1)^2 + 2\,(\bar{p}_{ys} - 2)^2 + \bar{p}_{yt}^2.$$

Sie ist nicht nur in der Nachbarschaft von $p_{i\alpha}$, sondern für alle $p_{i\alpha} \neq p_{i\alpha}$ positiv. *Also liefert unsere Extremale ein Minimum bei festem Rand.*

Um die Verhältnisse bei beweglichem Rand zu untersuchen, rechnen wir zuerst die Formeln für die Transversalität aus. Man bekommt zu den $p_{i\alpha}$ unseres Feldes

$$a_{ss} = -6, \quad a_{st} = a_{ts} = 0, \quad a_{tt} = 6, \quad a = -36;$$
$$P_{xs} = P_{yt} = 0, \quad P_{xt} = -\tfrac{2}{3}, \quad P_{ys} = -\tfrac{4}{3}.$$

Während das Flächenelement des Feldes von den beiden Vektoren $(\delta_{\alpha\beta}, p_{i\beta})$, also von

(8. 2a) $\qquad (1, 0, 0, 2) \quad \text{und} \quad (0, 1, -1, 0)$

aufgespannt wird, ist das dazu transversale durch $(-P_{j\alpha}, \delta_{ij})$, also durch

(8. 2b) $\qquad (0, \tfrac{2}{3}, 1, 0) \quad \text{und} \quad (\tfrac{4}{3}, 0, 0, 1)$

bestimmt. Alle vier Vektoren sind linear unabhängig.

Es ist sehr leicht, zwei Funktionen $S_1 = S$, $S_2 = T$ hinzuschreiben, die die Relationen (6. 4) und (6. 5) erfüllen, z. B.

$$S = 4\,x - 6\,t, \quad T = \tfrac{4}{5}\,y - \tfrac{3}{5}\,s.$$

Jetzt haben wir eine „vollständige Figur" beisammen; sie besteht aus der Schar von Extremalebenen

$$x = x_0 - t, \quad y = y_0 + 2\,s$$

und der dazu transversalen Ebenenschar

$$4\,x - 6\,t = \lambda, \quad \tfrac{4}{5}\,y - \tfrac{3}{5}\,s = \mu.$$

Man rechnet sofort nach, daß für die Form (6. 6) in unserem Feld in der Tat

$$[\Omega] = -\tfrac{18}{5}\,ds\,dt + \tfrac{12}{5}\,ds\,dx - \tfrac{24}{5}\,dt\,dy + \tfrac{16}{5}\,dx\,dy = dS\,dT$$

gilt

Sieht man sich aber die Formeln der Carathéodoryschen Theorie noch weiter an, so sieht man, daß die hinreichenden Bedingungen des § 6 für ein Minimum bei beweglichem Rand nicht erfüllt sind; ja man kann sogar leicht solche Randbedingungen angeben, daß die Extremale (8. 1) alle Transversalitätsbedingungen erfüllt und trotzdem überhaupt keine Lösung ist. Diese Fläche ist nämlich nicht regulär im Sinne von § 7.

In der Tat, nach (6. 7) ist

$$A_{xs,\,yt} = \frac{4}{f}\,(p_{xs}\,p_{yt} - 4\,p_{xt}\,p_{ys})$$

zu nehmen, also in unserem Feld, wo $f = 10$,

$$A_{xs,\,yt} = \tfrac{16}{5}.$$

Die quadratische Form lautet

$$u_{xs}^2 + 2\,u_{xt}^2 + 2\,u_{ys}^2 + u_{yt}^2 - \tfrac{16}{5}\,(u_{xs}\,u_{yt} - u_{xt}\,u_{ys}).$$

Sie ist für $u_{xs} = u_{yt} = u$, $u_{xt} = u_{ys} = 0$ gleich

$$-\tfrac{6}{5}\,u^2 < 0,$$

für $u_{i\alpha} = \varrho_i\,\lambda_\alpha$ natürlich positiv, also indefinit; ihre Determinante ist $\neq 0$. Dementsprechend ist die $\mathfrak{E}$-Funktion

$$\mathfrak{E} = \bar{p}_{xs}^2 + 2\,(\bar{p}_{xt} + 1)^2 + 2\,(\bar{p}_{ys} - 2)^2 + \bar{p}_{yt}^2 - \\ - \tfrac{16}{5}\,\{\bar{p}_{xs}\,\bar{p}_{yt} - (\bar{p}_{xt} + 1)\,(\bar{p}_{ys} - 2)\}$$

negativ für die zu $p_{i\alpha}$ benachbarten Werte

$$\bar{p}_{xs} = \bar{p}_{yt} = \varepsilon, \quad \bar{p}_{xt} = -1, \quad \bar{p}_{ys} = 2,$$

nämlich

$$\mathfrak{E} = -\tfrac{6}{5}\,\varepsilon^2.$$

Um die Ausdrucksweise zu erleichtern, betrachten wir die affine Transformation, die die vier Vektoren (8. 2) in die vier Einheitsvektoren eines $(\sigma,\ \tau,\ \xi,\ \eta)$-Raumes überführt. In diesem Raum betrachten wir die (der Ebene (8. 1) entsprechende) Koordinatenebene σ, τ, in ihr den Kreis $\sigma^2 + \tau^2 = 1$ und im Raum den „Zylinder" $\sigma^2 + \tau^2 = 1$. Nehmen wir als Randbedingung, daß die Randkurve auf dem Zylinder liegen soll, der diesem im ursprünglichen Raum entspricht, dann liefert die Extremale (8. 1) bestimmt kein Minimum. Man braucht bloß als Vergleichsfläche die Ebene

$$\bar{E}\colon \quad x = \varepsilon s - t, \quad y = 2\,s + \varepsilon t$$

zu nehmen, dann ist die Differenz $J_{\bar{E}} - J_E$ ein Integral mit dem Integranden $-\tfrac{6}{5}\,\varepsilon^2$, also negativ.

Ein eigentliches Minimum hätten wir freilich gar nicht erwarten können, weil wir den Rand auf der Röhre aus geodätischen Transversalen beweglich angenommen haben. Aber betrachten wir statt des Zylinders das ihn längs des Kreises von außen berührende Hyperboloid

$$\sigma^2 + \tau^2 - a\,(\xi^2 + \eta^2) = 1 \qquad (a > 0)$$

und erlauben wir der Randkurve, sich auf dem entsprechenden Hyperboloid im ursprünglichen Raum zu bewegen! Die Differenz $J_{\bar{E}} - J_E$ wird jetzt größer, und zwar kommt zu dem früheren ein Integral mit dem Integranden $10 + 2\,\varepsilon^2$ hinzu über ein ringförmiges Integrationsgebiet, dessen Inhalt, nach Potenzen von ε entwickelt, mit einem Gliede der Form $\text{const} \cdot a \cdot \varepsilon^2$ anfängt. Man braucht bloß a hinreichend klein zu wählen, um eine Randbedingung zu erhalten, bei der die Extremale (8. 1) keine Lösung des Problems darstellt, obwohl alle Transversalitätsbedingungen von § 6 erfüllt sind.

(Eingegangen am 1. Mai 1940.)

Die isoperimetrischen Ungleichungen auf der gewöhnlichen Kugel und für Rotationskörper im n-dimensionalen sphärischen Raum.

Von

Erhard Schmidt in Berlin.

Inhaltsverzeichnis.

§ 1. Invariante Formulierung der isoperimetrischen Ungleichungen für die *Euklidische*, *hyperbolische* und *sphärische* Geometrie 743

§ 2. Die isoperimetrischen Ungleichungen auf der gewöhnlichen Kugel 751

§ 3. Feststellung derjenigen geschlossenen Kurven, welche in den isoperimetrischen Ungleichungen die Gleichheit erreichen 760

§ 4. Die isoperimetrischen Ungleichungen für Rotationskörper im n-dimensionalen sphärischen Raum 769

§ 1.

Invariante Formulierung der isoperimetrischen Ungleichungen für die Euklidische, hyperbolische und sphärische Geometrie.

In der vorliegenden Arbeit werden mit den Methoden, welche ich für den *Euklidischen* [1]) und *hyperbolischen* [2]) Raum entwickelt habe, die isoperimetrischen Ungleichungen auf der gewöhnlichen Kugel und für Rotationskörper im n-dimensionalen *sphärischen* Raum unter den entsprechenden Verschärfungen hergeleitet.

Da die Analogie der Beweisführung sowohl als der Ergebnisse überraschend weit geht, so seien hier die einfachsten und wichtigsten der letzteren in einer für alle drei Geometrien invarianten Gestalt zusammengefaßt:

---

[1]) Math. Zeitschr. **44** (1939), S. 689—788.

[2]) Math. Zeitschr. **46** (1940), S. 204—230. In einer demnächst erscheinenden Arbeit wird mit denselben Methoden, die isoperimetrische Aufgabe auf beliebigen Rotationskörpern gelöst und zwar im Großen.

Man bezeichne in der *Euklidischen*, *hyperbolischen* und *sphärischen* Geometrie Umfang und Inhalt des Kreises mit dem Radius R durch

$$\bar{L}\{R\} \quad \text{und} \quad \bar{J}\{R\}$$

und die Ableitungen dieser Funktionen nach R durch

$$\bar{L}'\{R\} \quad \text{und} \quad \bar{J}'\{R\}.$$

Diese Symbole bedeuten also je nach der Geometrie, um welche es sich handelt, verschiedene Funktionen von R.

Nun bezeichne in allen drei Geometrien L den Umfang einer geschlossenen einfachen Kurve C und J den Inhalt des von ihr umschlossenen Gebiets.

Die Kurve C sei ferner eingeschrieben —

in der *Euklidischen* Geometrie in einen Parallelstreifen von der Breite $2R$ —

in der *hyperbolischen* Geometrie in einen von zwei Abstandskurven begrenzten Streifen, welche auf beiden Seiten einer hyperbolischen Geraden im Abstand R von ihr verlaufen, —

in der *sphärischen* Geometrie in eine auf der Einheitskugel von zwei Parallelkreisen begrenzte Zone, welche auf beiden Seiten eines größten Kreises im sphärischen Abstand R von diesem verlaufen. In der *sphärischen* Geometrie ist noch hinzuzufügen, daß die beiden Pole der Zone durch C nicht getrennt werden dürfen. Ferner muß in der *sphärischen* Geometrie, wie aus der ausführlichen Darstellung hervorgeht, naturgemäß noch die zusätzliche Annahme

$$L < 2\pi$$

gemacht werden. Auf Grund dieser Annahme bleibt

$$R < \frac{\pi}{2},$$

kann also die Begrenzung der Zone nicht bloß aus zwei Gegenpunkten bestehen. Der Fall

$$L = 2\pi$$

findet in besonderer Behandlung die einfachste Erledigung. Endlich ist in der *sphärischen* Geometrie noch festzusetzen, daß von den beiden Gebieten, in welche die Sphäre durch C zerlegt wird, J den Inhalt des kleineren bedeutet; dasselbe enthält, wie im Eingang des § 2 der vorliegenden Arbeit aus der oben gemachten Annahme

$$L < 2\pi$$

leicht hergeleitet wird, kein Paar von Gegenpunkten und ist daher das innerhalb der Zone gelegene Gebiet.

Nunmehr gilt in allen drei Geometrien die isoperimetrische Ungleichung[3])

$$(A) \qquad J \leqq \frac{\overline{J}'\{R\}}{\overline{L}'\{R\}} L - \left(\frac{\overline{J}'\{R\}}{\overline{L}'\{R\}} \overline{L}\{R\} - \overline{J}\{R\}\right) = g(L, R). \quad [4])$$

Man erhält unmittelbar durch Differentiation

$$(A, 1) \qquad \frac{\partial g(L,R)}{\partial R} = (L - \overline{L}\{R\}) \frac{d}{dR}\left(\frac{\overline{J}'\{R\}}{\overline{L}'\{R\}}\right).$$

Nun ergeben die Formeln für Umfang und Inhalt des Kreises in der *Euklidischen* Geometrie

$$(A, 2) \qquad \frac{\overline{J}'\{R\}}{\overline{L}'\{R\}} = R,$$

in der *hyperbolischen* Geometrie

$$(A, 3) \qquad \frac{\overline{J}'\{R\}}{\overline{L}'\{R\}} = \operatorname{tgh} R = \frac{e^R - e^{-R}}{e^R + e^{-R}},$$

in der *sphärischen* Geometrie

$$(A, 4) \qquad \frac{\overline{J}'\{R\}}{\overline{L}'\{R\}} = \operatorname{tg} R.$$

In allen drei Geometrien ist daher

$$(A, 5) \qquad \frac{d}{dR}\left(\frac{\overline{J}'\{R\}}{\overline{L}'\{R\}}\right) > 0.$$

Gemäß (A, 1) folgt hieraus, daß für alle drei Geometrien die mit

$$g(L, R)$$

bezeichnete rechte Seite der isoperimetrischen Ungleichung (A) bei festem L mit wachsendem R für

$$R \leqq R'$$

---

[3]) Für die *Euklidische* Geometrie ist (A) mit l. c. [1]) (12) gleichbedeutend, wobei für l L und für ϱ_x R zu schreiben ist. — Für die *hyperbolische* Geometrie ist (A) mit l. c. [2]) (21) wegen (22) gleichbedeutend, wobei wegen (4)

$$\sin \alpha = \operatorname{tgh} R$$

ist; (A, 3) folgt ebenfalls aus (22). — Für die *sphärische* Geometrie ist (A) in der vorliegenden Arbeit unter (9) enthalten und (A, 4) folgt aus (8); dabei ist für α R zu schreiben.

[4]) Diese Ungleichung für die Euklidische Ebene, also die Ungleichung

$$J \leqq RL - (R \cdot 2\pi R - \pi R^2) = RL - \pi R^2 = \frac{L^2}{4\pi} - \pi\left(\frac{L}{2\pi} - R\right)^2,$$

ist längst bekannt. Vgl. die Literatur bei Bonnesen, Les problèmes des isopérimètres ... Paris 1929. Einen einfachen Beweis gab neuerdings Dinghas. (Zur Theorie der konvexen Körper im n-dimensionalen Raum, Abh. Preuß. Akad. Wiss. 1939, Nr. 4.)

monoton zunimmt und für

$$R \geqq R'$$

monoton abnimmt. Dabei bedeutet R' den durch die Gleichung

$$\overline{L}\{R'\} = L \tag{A, 6}$$

definierten Radius des Kreises gleichen Umfanges. Die Funktion

$$g(L, R)$$

erreicht also bei festem L für

$$R = R'$$

das Maximum, welches, wie (A) unmittelbar erkennen läßt, gleich

$$\overline{J}\{R'\}$$

wird. *Damit ist festgestellt, daß in allen drei Geometrien aus der isoperimetrischen Ungleichung* (A) *die gewöhnliche isoperimetrische Ungleichung*

$$J \leqq \overline{J}\{R'\} \tag{A, 7}$$

a fortiori folgt.

In allen drei Geometrien wird in der isoperimetrischen Ungleichung (A) für

$$R \leqq R'$$

die Gleichheit von einer und nur einer geschlossenen einfachen Kurve erreicht, in (A, 7) nur vom Kreise. Für

$$R > R'$$

kann in allen drei Geometrien die isoperimetrische Schranke (A) noch durch eine kleinere ersetzt werden, der gegenüber dann die Gleichheit ebenfalls von einer und nur einer geschlossenen einfachen Kurve erreicht wird [5]).

Dabei ist in allen drei Geometrien in betreff der Kurve C die Voraussetzung gemacht worden, daß ihre laufenden Koordinaten sich als Funktionen eines Parameters darstellen lassen, deren erste Ableitungen bis auf höchstens endlich viele Punkte bestimmt und stetig sind und nicht gleichzeitig verschwinden.

Der wesentliche Vorzug, die charakteristische Eigenschaft, der isoperimetrischen Ungleichung (A) *besteht darin, daß sie für alle in einen Streifen eingeschriebenen Figuren linear in L und J ist, wobei die beiden Konstanten der linearen Ungleichung durch die Breite des Streifens bestimmt sind.*

---

[5]) Die Beweise siehe l. c. [1]) § 1, 3, l. c. [2]) § 2, die vorliegende Arbeit § 3.

Es gelte nämlich unter irgendwelchen Nebenbedingungen eine die gewöhnliche isoperimetrische Ungleichung (A, 7) verschärfende lineare Ungleichung

$$J \leqq a L - b, \tag{1*}$$

wobei a und b Konstanten bedeuten. Es gebe ferner einen Kreis, der diesen Nebenbedingungen genügt.

Dann ist, wenn R den Radius dieses Kreises bezeichnet,

$$a = \frac{\bar{J}'\{R\}}{\bar{L}'\{R\}}, \quad b = a\,\bar{L}\{R\} - \bar{J}\{R\}. \tag{2*}$$

Um das einzusehen, betrachte man die (L, J)-Ebene. In dieser entspricht den Kreisen eine gewisse Kurve mit stetiger Tangente, während die rechte Seite der Ungleichung (1*) durch eine Gerade dargestellt wird, die voraussetzungsgemäß nirgends oberhalb der Kurve verläuft. Gibt es nun gemäß der zweiten oben getroffenen Voraussetzung auf der Kurve einen Punkt, der nicht oberhalb der Geraden liegt, so haben Gerade und Kurve diesen Punkt gemein, und die Gerade ist die Tangente in ihm, woraus sich die Formeln (2*) unmittelbar ergeben.

Es sei nunmehr

$$n \geqq 3.$$

Man bezeichne im n-dimensionalen *Euklidischen*, *hyperbolischen* und *sphärischen* Raum den Oberflächeninhalt und das Volumen der Kugel mit dem Radius R durch

$$\bar{L}^{(n)}_{\{R\}} \quad \text{und} \quad \bar{J}^{(n)}_{\{R\}}$$

und die Ableitungen dieser Funktionen nach R durch

$$\bar{L}^{(n)'}_{\{R\}} \quad \text{und} \quad \bar{J}^{(n)'}_{\{R\}}.$$

Diese Symbole bedeuten also je nach der Geometrie, um welche es sich handelt, verschiedene Funktionen von R.

Nun bezeichne in allen drei Geometrien L den Oberflächeninhalt und J das Volumen eines n-dimensionalen Rotationskörpers, d. h. eines Körpers, der bei allen Bewegungen, welche die Punkte einer Geraden, der Rotationsachse, fest lassen, in sich übergeht.

Dabei mache man noch die Annahme, daß die Oberfläche des Körpers die Rotationsachse in zwei und nur zwei verschiedenen Punkten schneidet. In der sphärischen Geometrie muß noch, wie aus der ausführlichen Darstellung hervorgeht, naturgemäß die zusätzliche Voraussetzung getroffen werden, daß L kleiner bleibt als der Oberflächeninhalt der n-dimensionalen Euklidischen Einheitskugel, d. h. also als der Oberflächeninhalt des Schnittes der

Oberfläche der $(n+1)$-dimensionalen Euklidischen Einheitskugel mit einer durch den Mittelpunkt der Einheitskugel gehenden n-dimensionalen Ebene. Der Fall, daß L diesen Oberflächeninhalt erreicht, findet dann in besonderer Behandlung die einfachste Erledigung.

Es bezeichne ferner in allen drei Geometrien R den Maximalradius der $(n-1)$-dimensionalen Breitenkugeln des Rotationskörpers. Dabei sichert in der sphärischen Geometrie die oben über die Größe von L gemachte Voraussetzung, wie in der ausführlichen Darstellung gezeigt wird, daß

$$R < \frac{\pi}{2}$$

bleibt.

Jetzt gilt in allen drei Geometrien die isoperimetrische Ungleichung[6])

$$\text{(B)} \qquad J \leqq \frac{\overline{J}_{\{R\}}^{(n)'}}{\overline{L}_{\{R\}}^{(n)'}} L - \left(\frac{\overline{J}_{\{R\}}^{(n)'}}{\overline{L}_{\{R\}}^{(n)'}} \overline{L}_{\{R\}}^{(n)} - \overline{J}_{\{R\}}^{(n)} \right) = g^{(n)}(L, R). \quad [7])$$

Man erhält unmittelbar durch Differenziation

$$\text{(B, 1)} \qquad \frac{\partial g^{(n)}(L, R)}{\partial R} = (L - \overline{L}_{\{R\}}^{(n)}) \frac{d}{dR} \left(\frac{\overline{J}_{\{R\}}^{(n)'}}{\overline{L}_{\{R\}}^{(n)'}} \right).$$

Nun ergeben die Formeln für Oberflächeninhalt und Volumen der Kugel in der *Euklidischen* Geometrie

$$\text{(B, 2)} \qquad \frac{\overline{J}_{\{R\}}^{(n)'}}{\overline{L}_{\{R\}}^{(n)'}} = \frac{1}{n-1} R,$$

in der *hyperbolischen* Geometrie

$$\text{(B, 3)} \qquad \frac{\overline{J}_{\{R\}}^{(n)'}}{\overline{L}_{\{R\}}^{(n)'}} = \frac{1}{n-1} \operatorname{tgh} R = \frac{1}{n-1} \frac{e^R - e^{-R}}{e^R + e^{-R}},$$

---

[6]) Für die *Euklidische* Geometrie ist (B) gleichbedeutend mit l. c. [1]) (33), wobei für $V\,J$, für $|O|\,L$ und für $\varrho\ R$ zu schreiben ist. — Für die *hyperbolische* Geometrie ist (B) mit l. c. [2]) (78) wegen (76) und wegen der schon unter [3]) erwähnten Gleichung

$$\sin \alpha = \operatorname{tgh} R$$

gleichbedeutend; (B, 3) folgt aus (75). — Für die *sphärische* Geometrie ist (B) in der vorliegenden Arbeit unter (124) enthalten und (B, 4) folgt aus (83) (84); dabei ist für α R zu schreiben.

[7]) Diese Ungleichung für Rotationskörper im dreidimensionalen Euklidischen Raum, also die Ungleichung

$$J \leqq \frac{R}{2} L - \left(\frac{R}{2} \cdot 4\pi R - \frac{4}{3} \pi R^3 \right) = \frac{R}{2} L - \frac{2}{3} \pi R^3,$$

ist, unter Heranziehung von Methoden der Variationsrechnung, zuerst von Bonnesen [Acta Math. 48 (1926), S. 123—178] bewiesen worden.

in der *sphärischen* Geometrie

$$\frac{\overline{J}^{(n)'}_{\{R\}}}{\overline{L}^{(n)'}_{\{R\}}} = \frac{1}{n-1} \operatorname{tg} R. \tag{B, 4}$$

In allen drei Geometrien ist daher

$$\frac{d}{d\,R}\left(\frac{\overline{J}^{(n)'}_{\{R\}}}{\overline{L}^{(n)'}_{\{R\}}}\right) > 0. \tag{B, 5}$$

Gemäß (B, 1) folgt hieraus, daß für alle drei Geometrien die mit

$$g^{(n)}(L, R)$$

bezeichnete rechte Seite der isoperimetrischen Ungleichung (B) bei festem L mit wachsendem R für

$$R \leqq R'$$

monoton zunimmt und für

$$R \geqq R'$$

monoton abnimmt. Dabei bedeutet R' den durch die Gleichung

$$\overline{L}^{(n)}_{\{R'\}} = L \tag{B, 6}$$

definierten Radius der Kugel gleichen Oberflächeninhalts. Die Funktion

$$g^{(n)}(L, R)$$

erreicht also bei festem L für

$$R = R'$$

das Maximum, welches, wie (B) unmittelbar erkennen läßt, gleich

$$\overline{J}^{(n)}_{\{R'\}}$$

wird. *Damit ist festgestellt, daß in allen drei Geometrien aus der isoperimetrischen Ungleichung* (B) *die gewöhnliche isoperimetrische Ungleichung*

$$J \leqq \overline{J}^{(n)}_{\{R'\}} \tag{B, 7}$$

a fortiori folgt.

In allen drei Geometrien wird in der isoperimetrischen Ungleichung (B) für

$$R_1 < R \leqq R'$$

die Gleichheit von einem und nur einem Rotationskörper erreicht, in der gewöhnlichen isoperimetrischen Ungleichung (B, 7) nur von der Kugel. Dabei ist in der Euklidischen und hyperbolischen Geometrie $R_1 = 0$, während in der sphärischen R_1 durch (130c), (130d) definiert ist, wobei wie oben für α durchweg R zu schreiben ist. Stets gilt $R_1 < R'$. Für

$$R > R'$$

kann in allen drei Geometrien die isoperimetrische Schranke (B) noch durch eine kleinere ersetzt werden, der gegenüber dann die Gleichheit ebenfalls von einem und nur einem Rotationskörper erreicht wird[8]).

Dabei ist in allen drei Geometrien in betreff der Meridiankurve der Rotationskörper die Voraussetzung gemacht worden, daß ihre laufenden Koordinaten sich als Funktionen eines Parameters darstellen lassen, deren erste Ableitungen bis auf höchstens endlich viele Punkte bestimmt und stetig sind und nicht gleichzeitig verschwinden.

Der wesentliche Vorzug, die charakteristische Eigenschaft der isoperimetrischen Ungleichung (B) *besteht darin, daß sie für alle, den oben angegebenen Voraussetzungen genügenden Rotationskörper mit vorgeschriebenem Maximalradius der* $(n-1)$*-dimensionalen Breitenkugeln linear in* L *und* J *ist, wobei die beiden Konstanten der linearen Ungleichung durch diesen Maximalradius bestimmt sind.*

Nimmt man nämlich an, daß unter diesen Nebenbedingungen eine lineare Ungleichung von der Gestalt

$$J \leqq a L - b$$

besteht, welche eine Verschärfung der gewöhnlichen isoperimetrischen Ungleichung

$$\bar{J} \leqq \bar{J}^{(n)}_{\{R'\}}$$

darstellt, wobei R' durch (B, 6) definiert ist, so schließt man genau so, wie oben für die Ungleichung (A) durchgeführt worden ist, daß

$$a = \frac{\bar{J}^{(n)'}_{\{R\}}}{\bar{L}^{(n)'}_{\{R\}}} \quad \text{und} \quad b = \frac{\bar{J}^{(n)'}_{\{R\}}}{\bar{L}^{(n)'}_{\{R\}}} \bar{L}^{(n)}_{\{R\}} - \bar{J}^{(n)}_{\{R\}}$$

ist, wobei R den Maximalradius bedeutet.

Wie in der *Euklidischen* Geometrie auf Grund des Schwarzschen Abrundungsverfahrens bewiesen worden ist[9]), und in einer noch folgenden Arbeit für die *hyperbolische* und *sphärische* Geometrie auf ähnlichem Wege hergeleitet werden wird, *bleibt die isoperimetrische Ungleichung* (B) *nebst ihren oben angegebenen Konsequenzen, also insbesondere auch nebst der gewöhnlichen isoperimetrischen Ungleichung* (B, 7) *für beliebige n-dimensionale Körper gültig.* Dabei bedeutet dann R den Radius derjenigen $(n-1)$-dimensionalen Kugel, welche dem Maximalquerschnitt einer gewissen Schar von Querschnitten volumengleich ist[10]).

---

[8]) Die Beweise siehe l. c. [1]) § 3, l. c. [2]) § 3, die vorliegende Arbeit § 4.

[9]) l. c. [1]) § 11 (249), wobei für V J, für $|O|$ L und für P' R zu schreiben ist.

[10]) Für den dreidimensionalen Euklidischen Raum ist die Erweiterung der Gültigkeit der Ungleichung (B), also in diesem Falle der Ungleichung

$$J \leqq \frac{R}{2} L - \frac{2}{3} \pi R^3,$$

auf beliebige Körper, mit Hilfe des Schwarzschen Abrundungsverfahrens, zuerst von Bonnesen [l. c. [7])] bewiesen worden.

§ 2.

Die isoperimetrischen Ungleichungen auf der gewöhnlichen Kugel.

$\xi_1(s)$, $\xi_2(s)$, $\xi_3(s)$ seien die laufenden Koordinaten einer auf der Einheitskugel

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1 \tag{1}$$

liegenden geschlossenen einfachen Kurve C_k als Funktionen der Bogenlänge. Ihre ersten Ableitungen seien bis auf höchstens endlich viele Punkte bestimmt und stetig.

Wir machen zunächst die Voraussetzung, daß auf der Kurve kein Paar von Gegenpunkten liegt. Dann kann die Kurve C_k die aus ihren Gegenpunkten bestehende geschlossene einfache Kurve C_k^* nicht schneiden. Daher wird die Kugel durch C_k und C_k^* in drei Gebiete zerlegt: das nur von C_k begrenzte Gebiet T_k, das nur von C_k^* begrenzte Gebiet T_k^* und das von C_k und C_k^* begrenzte Gebiet $\bar{T}_k$. Die Gebiete T_k und T_k^* bestehen jedes aus den Gegenpunkten des anderen und haben daher gleichen Flächeninhalt. Das Gebiet $\bar{T}_k$ enthält dagegen mit jedem Punkt auch seinen Gegenpunkt.

Liegt daher, wie eben vorausgesetzt, auf C_k kein Paar von Gegenpunkten, so enthält das eine der beiden Gebiete, in welche die Kugel durch C_k zerlegt wird, nämlich das Gebiet T_k, kein Paar von Gegenpunkten und besitzt einen Flächeninhalt, der kleiner als 2π ist. Das andere dagegen, dessen Flächeninhalt größer als 2π ist, enthält Paare von Gegenpunkten, die in ihrer Gesamtheit das oben erklärte Gebiet $\bar{T}_k$ erfüllen.

Liegt aber auf C_k ein Paar von Gegenpunkten, so muß C_k zwei Bögen enthalten, die von dem einen Gegenpunkt zum anderen führen und nur diese beiden Punkte gemein haben. Daher muß in diesem Falle

$$L \geqq 2\pi \tag{2}$$

sein, wobei L die Länge von C_k bedeutet.

Gilt endlich

$$L = 2\pi, \tag{3}$$

so liegt auf C_k nur dann ein Paar von Gegenpunkten, wenn C_k aus zwei größten Halbkreisen zwischen zwei Gegenpunkten besteht.

Die isoperimetrische Aufgabe erhält auf der Kugel die folgende Fassung: Es soll die Einheitskugel durch eine geschlossene einfache Kurve möglichst geringen Umfangs in zwei Gebiete mit den Flächeninhalten $J \leqq 2\pi$ und $4\pi - J$ zerlegt werden. Da nun jede Zerlegung der Kugel in zwei Gebiete vorgegebenen Flächeninhalts schon durch Breitenkreise bewirkt werden kann, so können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Voraussetzung

$$L \leqq 2\pi \tag{4}$$

zugrunde legen.

Unter dieser letzten Voraussetzung kann die isoperimetrische Aufgabe auch folgendermaßen formuliert werden: Es soll durch eine geschlossene einfache Kurve von gegebener Länge die Einheitskugel in zwei Gebiete zerlegt werden, deren kleineres einen möglichst großen Flächeninhalt J besitzt. Es ist also definitionsgemäß

$$J \leqq 2\pi. \tag{5}$$

Ist nun

$$J = 2\pi, \tag{6}$$

so muß nach den oben gemachten Feststellungen auf C_k ein Paar von Gegenpunkten liegen und daher bei Berücksichtigung der Voraussetzung (4)

$$L = 2\pi$$

sein. C_k muß also aus zwei größten Halbkreisen zwischen zwei Gegenpunkten bestehen, welche wegen (6) zusammen einen größten Kreis bilden. Damit ist die isoperimetrische Aufgabe für den Fall

$$J = 2\pi$$

erledigt.

Ist nun aber

$$J < 2\pi,$$

so kann eine solche Teilung der Kugeloberfläche jedenfalls durch einen vom Äquator verschiedenen Breitenkreis bewirkt werden. Wir können jetzt also ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Voraussetzungen

$$J < 2\pi, \quad L < 2\pi \tag{7}$$

treffen. Dann kann wegen (7) und (2) auf C kein Paar von Gegenpunkten liegen, und das oben mit T_k bezeichnete der von C_k umschlossenen beiden Gebiete ist dasjenige, welches den Inhalt J besitzt.

Man verbinde nun einen Punkt von C_k mit einem Punkt von C_k^* auf einem durch $\overline{T}_k$ laufenden Wege. Auf diesem Wege muß dann mindestens ein Punkt liegen, der — auf der Kugel gemessenen — gleich weit von C_k und C_k^* entfernt ist. Es gibt also in T_k unendlich viele solche Punkte. Man wähle einen derselben zum Nordpol. Dann sind der Nordpol und der Südpol gleich weit von C_k entfernt; denn die Entfernung des Südpols von C_k ist gleich der Entfernung des Nordpols von C_k^*.

Also haben die nördlichsten und südlichsten Punkte von C_k dieselbe nördliche und südliche geographische Breite, die jedoch $\frac{\pi}{2}$ nicht erreichen kann. Ist diese Breite α, $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$, so kann 2α als ein Breitenmaß der Kurve C_k betrachtet werden. Die Kurve ist in der Tat in eine Kugelzone, welche von zwei auf beiden Seiten eines größten Kreises in der Entfernung α von ihm verlaufenden Parallelkreisen begrenzt wird, dergestalt eingeschrieben, daß die beiden Pole der Parallelkreise durch die Kurve nicht getrennt werden.

Die Breitenmaße eines Kreises auf der Kugel sind offenbar alle gleich dem doppelten auf der Kugel gemessenen Radius des Kreises. Ist dieser gleich α, so gelten für den Umfang $\bar{L}(\alpha)$ und den Inhalt $\bar{J}(\alpha)$ des Kreises die Formeln

$$\bar{L}(\alpha) = 2\pi \sin\alpha, \quad \bar{J}(\alpha) = 2\pi(1 - \cos\alpha). \tag{8}$$

Der Hauptinhalt dieses Paragraphen besteht nun in den folgenden Sätzen:

Es gilt bei den obigen Definitionen die isoperimetrische Ungleichung

$$J \leqq \frac{\bar{J}'(\alpha)}{\bar{L}'(\alpha)} L - \left(\frac{J'(\alpha)}{\bar{L}'(\alpha)} \bar{L}(\alpha) - \bar{J}(\alpha)\right) = L \operatorname{tg}\alpha - 2\pi\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right) = H(L, \alpha), \tag{9}$$

wobei $\bar{J}'(\alpha)$ und $\bar{L}'(\alpha)$ die Ableitungen von $\bar{J}(\alpha)$ und $\bar{L}(\alpha)$ bedeuten.

Bei Multiplikation mit $\cos\alpha$ und Umordnung der Glieder ergibt sich hieraus

$$(2\pi - J)\cos\alpha + L\sin\alpha \geqq 2\pi. \tag{9^I}$$

Um eine Ungleichung zu gewinnen, welche für die beiden von der geschlossenen Kurve begrenzten Gebiete gültig bleibt, schreibe man

$$|2\pi - J|\cos\alpha + L\sin\alpha \geqq 2\pi. \tag{9^{II}}$$

Aus dieser Gestalt der Ungleichung folgt à fortiori die bekannte [11]) isoperimetrische Ungleichung auf der Einheitskugel

$$(2\pi - J)^2 + L^2 \geqq 4\pi^2, \tag{9^{III}}$$

welche sich bei Umordnung der Glieder auch schreiben läßt [12])

$$J(4\pi - J) \leqq L^2. \tag{9^{IV}}$$

---

[11]) Vgl. F. Bernstein [Math. Annalen **60** (1905), S. 117—136], T. Radó [Amer. Journ. of Math. **57** (1935), S. 765—770] und das oben zitierte Buch von Bonnesen.

[12]) Auch in der hyperbolischen ebenen Geometrie läßt die gewöhnliche isoperimetrische Ungleichung, d. h. die Ungleichung

$$J \leqq \bar{J}\{R'\}, \tag{\alpha}$$

wobei R' durch die Gleichung

$$\bar{L}\{R'\} = L \tag{\beta}$$

definiert ist, die analoge Umformung zu. Sie lautet

$$(2\pi + J)^2 - L^2 \leqq 4\pi^2 \tag{\gamma}$$

oder gleichbedeutend

$$J(4\pi + J) \leqq L^2. \tag{\delta}$$

Denn (α) ist wegen (β) gleichbedeutend mit der Ungleichung

$$(2\pi + J)^2 - L^2 \leqq (2\pi + \bar{J}\{R'\})^2 - \bar{L}\{R'\}^2.$$

Hieraus ergibt sich bei Einführung der Gleichungen

$$\bar{J}\{R'\} = \pi(e^{R'} + e^{-R'} - 2), \qquad \bar{L}\{R'\} = \pi(e^{R'} - e^{-R'})$$

die zu beweisende Ungleichung (γ).

Zusammenfassend läßt sich also, worauf mich Herr Dinghas aufmerksam gemacht hat, die gewöhnliche isoperimetrische Ungleichung in der Euklidischen,

Nun erhält man

$$\frac{\partial H(L,\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}(L - \overline{L}(\alpha)) = \frac{1}{\cos^2 \alpha}(L - 2\pi \sin \alpha). \tag{10}$$

Bezeichnet also α' den durch die Gleichung

$$\overline{L}(\alpha') = 2\pi \sin \alpha' = L$$

definierten Radius des Kreises gleichen Umfanges, so nimmt die rechte Seite der Ungleichung (9) mit wachsendem α für $\alpha \leqq \alpha'$ monoton zu und für $\alpha \geqq \alpha'$ monoton ab. Für $\alpha = \alpha'$ nimmt sie ihr Maximum an, welches gleich $\overline{J}(\alpha')$ ist.

Also folgt aus (9) *a fortiori die gewöhnliche isoperimetrische Ungleichung*

$$J \leqq \overline{J}(\alpha') = H(L,\alpha'). \tag{11}$$

Die Ungleichung (9) *stellt also eine Verschärfung der gewöhnlichen isoperimetrischen Ungleichung* (11) *dar.*

Ferner gilt:

Bei gegebenem $L < 2\pi$ und α gibt es für

$$\alpha \leqq \alpha'$$

stets eine und nur eine geschlossene einfache Kurve, welche in der Ungleichung (9) *die Gleichheit erreicht. Für*

$$\alpha = \alpha'$$

ist das der Kreis, woraus folgt, daß in der gewöhnlichen isoperimetrischen Ungleichung (11) *die Gleichheit nur vom Kreise erreicht wird.*

Für

$$\alpha > \alpha'$$

kann die durch (9) *gegebene Schranke durch eine kleinere ersetzt werden. Diese letztere wird dann ebenfalls stets von einer und nur einer geschlossenen einfachen Kurve erreicht.*

Dabei ist noch zu beachten, daß

$$\alpha < \frac{L}{4} \tag{12}$$

bleiben muß. Denn C_k muß vier bis auf die Endpunkte punktfremde Bögen enthalten, welche von einem der beiden Breitenkreise mit der geographischen Breite $\pm \alpha$ zum Äquator führen.

---

sphärischen und hyperbolischen ebenen Geometrie in der folgenden einheitlichen Form darstellen:

$$J(4\pi - KJ) \leqq L^2,$$

wobei $K = \pm \frac{1}{P^2}$ das Krümmungsmaß bedeutet, und die Gleichheit nur vom Kreise erreicht wird.

Beweis. Man drehe die Kugel so, daß der oben gewählte Nordpol die Koordinaten $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 1$ erhält, und projiziere dann vom Nordpol aus die Kugel stereographisch auf die Ebene

$$\xi_3 = 0.$$

Läßt man in dieser Ebene die positive x-Achse mit der positiven ξ_1-Achse und die positive y-Achse mit der positiven ξ_2-Achse zusammenfallen, so erhält man für das stereographische Bild (x, y) des Punktes (ξ_1, ξ_2, ξ_3) die Gleichungen

$$x = \frac{\xi_1}{1-\xi_3},\ y = \frac{\xi_2}{1-\xi_3};\ \xi_1 = \frac{2x}{1+x^2+y^2},\ \xi_2 = \frac{2y}{1+x^2+y^2},\ \xi_3 = \frac{x^2+y^2-1}{1+x^2+y^2},$$

$$d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 = \left(\frac{2}{1+x^2+y^2}\right)^2 (dx^2 + dy^2); \tag{13}$$

$$dx^2 + dy^2 = \left(\frac{1}{1-\xi_3}\right)^2 (d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2).$$

Bezeichnen also dS und dT das Längenelement und das Oberflächenelement auf der Kugel und ds das Euklidische Längenelement in der (xy)-Ebene, so ist

$$dS = \frac{2}{1+x^2+y^2}ds, \quad dT = \left(\frac{2}{1+x^2+y^2}\right)^2 dx\,dy. \tag{14}$$

Man bezeichne nun die stereographischen Bilder der geschlossenen Kurve C_k und des von ihr unbegrenzten Gebietes T_k mit C und T. Da der Nordpol und der Südpol außerhalb T_k gewählt sind, so ist C ebenfalls eine geschlossene einfache Kurve, T ist das von ihr in der (xy)-Ebene umschlossene Gebiet, und der Koordinatenanfangspunkt O liegt außerhalb T.

Ferner ist C in den Kreisring eingeschrieben, welcher von den stereographischen Bildern, der beiden Parallelkreise mit der nördlichen und der südlichen geographischen Breite α begrenzt wird, d. h. von den beiden Kreisen

$$r = \varrho \quad \text{und} \quad r = \frac{1}{\varrho};\ \varrho = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right),\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},\ \varrho > 1. \tag{15}$$

Dabei bedeutet r die Entfernung vom Koordinatenanfangspunkt O, und da dieser außerhalb T liegt, so ist C dergestalt in den Kreisring eingeschrieben, daß T ganz innerhalb des Kreisringes liegt oder mit anderen Worten, daß für alle Punkte von T

$$\frac{1}{\varrho} \leqq r \leqq \varrho$$

ist. Gemäß (14) erhält man für L und J die Darstellungen

$$(16) \qquad L = \int_C \frac{2}{1+x^2+y^2}\,ds, \quad J = \int_T \left(\frac{2}{1+x^2+y^2}\right)^2 dx\,dy.$$

Man führe jetzt Polarkoordinaten ein

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad ds^2 = dr^2 + r^2\,d\varphi^2, \quad dx\,dy = r\,dr\,d\varphi.$$

Man bezeichne mit (Nr) und $(N\varphi)$ die Winkel, welche die äußere Normale N von C mit dem Radiusvektor und mit der senkrecht zu ihm nach dem wachsenden φ weisenden Richtung bildet. Wird dann der Durchlaufungssinn ein für allemal so festgesetzt, daß die Normale N zum Radiusvektor so liegt, wie die im Durchlaufungssinn gerichtete Tangente zu der senkrecht zum Radiusvektor nach dem wachsenden φ weisenden Richtung, so ist

$$(17) \qquad \cos(Nr) = r\frac{d\varphi}{ds}, \quad \cos(N\varphi) = -\frac{dr}{ds}.$$

Die Gleichungen (16) erhalten die Gestalt

$$(18) \quad L = \int_C \frac{2}{1+r^2}\,ds, \quad J = \int_T \left(\frac{2}{1+r^2}\right)^2 r\,dr\,d\varphi = \int_C \left(1-\frac{2}{1+r^2}\right)\frac{1}{r}\cos(Nr)\,ds$$

$$= \int_C \frac{r-\frac{1}{r}}{1+r^2}\cos(Nr)\,ds.$$

Man führe jetzt einen Parameter q ein, der lediglich der Einschränkung

$$(19) \qquad q \geqq \varrho - \frac{1}{\varrho} = 2\operatorname{tg}\alpha$$

unterworfen ist.

Nun ist das innere Produkt des Vektors, dessen erste Komponente $r - \frac{1}{r}$, dessen zweite Komponente $+\sqrt{q^2-\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}$ und dessen Länge q ist, mit dem Einheitsvektor, dessen erste Komponente $\cos(Nr)$, und dessen zweite Komponente $|\cos(N\varphi)|$ ist, nicht größer als das Produkt der Längen der beiden Vektoren, d. h. es ist

$$(20) \qquad \left(r-\frac{1}{r}\right)\cos(Nr) + \sqrt{q^2-\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}\,|\cos(N\varphi)| \leqq q.$$

Das Gleichheitszeichen gilt hier dann und nur dann, wenn

$$(21) \qquad r - \frac{1}{r} = q\cos(Nr)$$

ist. Aus (20) folgt

$$\frac{r-\frac{1}{r}}{1+r^2}\cos(Nr) \leqq \frac{q}{1+r^2} - \frac{\sqrt{q^2-\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}}{1+r^2}\left|\cos(N\varphi)\right|.$$

Die Einführung dieser Ungleichung in (18) ergibt bei Berücksichtigung von (17)

(22)
$$J \leqq \frac{q}{2}L - \int_C \frac{\sqrt{q^2-\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}}{1+r^2}\left|\cos(N\varphi)\right| ds = \frac{q}{2}L - \int_C \frac{\sqrt{q^2-\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}}{1+r^2}\left|\frac{dr}{ds}\right| ds.$$

Das Gleichheitszeichen gilt hier dann und nur dann, wenn (21) identisch erfüllt ist.

Die Extremalwerte $r=\varrho$ und $r=\frac{1}{\varrho}$ konnen auf C natürlich unbeschränkt oft angenommen werden. Es sei P' ein Punkt, in welchem $r=\varrho$ ist. Es sei beim oben festgesetzten Durchlaufungssinn P_1 der erste auf P' folgende Punkt, in welchem $r=\frac{1}{\varrho}$ wird, und auf dem Wege von P' nach P_1 P_0 der letzte Punkt, in welchem $r=\varrho$ ist. Es sei ferner P_3 der erste auf P_1 folgende Punkt, in welchem wieder $r=\varrho$ wird, und auf dem Wege von P_1 nach P_3 P_2 der letzte Punkt, in welchem $r=\frac{1}{\varrho}$ ist. Mißt man dann die Euklidische Bogenlänge auf C von P_0 ab und bezeichnet mit s_1, s_2, s_3 die Bogenlängen n P_1, P_2, P_3, so hat man

(23)
$$\begin{cases} r(0)=\varrho,\ r(s_1)=\frac{1}{\varrho},\ r(s_2)=\frac{1}{\varrho},\ r(s_3)=\varrho. \\ \frac{1}{\varrho}<r<\varrho \text{ für } 0<s<s_1 \text{ und } s_2<s<s_3. \end{cases}$$

Nun ist

$$\int_{\frac{1}{\varrho}}^{\varrho} \frac{\sqrt{q^2-\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}}{1+r^2}\,dr = \int_{s_1}^{0} \frac{\sqrt{q^2-\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}}{1+r^2}\frac{dr}{ds}\,ds \leqq \int_0^{s_1} \frac{\sqrt{q^2-\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}}{1+r^2}\left|\frac{dr}{ds}\right| ds,$$

$$\int_{\frac{1}{\varrho}}^{\varrho} \frac{\sqrt{q^2-\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}}{1+r^2}\,dr = \int_{s_2}^{s_3} \frac{\sqrt{q^2-\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}}{1+r^2}\frac{dr}{ds}\,ds \leqq \int_{s_2}^{s_3} \frac{\sqrt{q^2-\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}}{1+r^2}\left|\frac{dr}{ds}\right| ds,$$

(24)
$$2\int_{\frac{1}{\varrho}}^{\varrho} \frac{\sqrt{q^2-\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}}{1+r^2}\,dr \leqq \int_C \frac{\sqrt{q^2-\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}}{1+r^2}\left|\frac{dr}{ds}\right| ds.$$

Das Gleichheitszeichen gilt hier dann und nur dann, wenn

$$(25)\quad \begin{cases} \text{für } 0 < s < s_1 & \frac{dr}{ds} \leqq 0, \quad \frac{1}{\varrho} < r < \varrho, \quad \cos(N\varphi) \geqq 0, \\ \text{für } s_1 < s < s_2 & \frac{dr}{ds} \equiv 0, \quad r \equiv \frac{1}{\varrho}, \quad \cos(Nr) = -1, \\ \text{für } s_2 < s < s_3 & \frac{dr}{ds} \geqq 0, \quad \frac{1}{\varrho} < r < \varrho, \quad \cos(N\varphi) \leqq 0, \\ \text{für } s_3 < s < l & \frac{dr}{ds} \equiv 0, \quad r \equiv \varrho, \quad \cos(Nr) = 1 \end{cases}$$

ist, wobei l die Euklidische Länge von C bezeichnet. Das Vorzeichen von $\cos(N\varphi)$ für $0 < s < s_1$ und $s_2 < s < s_3$ folgt hierbei aus (17) und das Vorzeichen von $\cos(Nr)$ für $s_1 < s < s_2$ und für $s_3 < s < l$ daraus, daß C in den Kreisring zwischen den beiden konzentrischen Kreisen mit den Radien $\frac{1}{\varrho} < 1$ und $\varrho > 1$ eingeschrieben ist.

Nun ist, wie die Substitution

$$r = \frac{1}{r'}$$

zeigt,

$$(26)\quad \int_1^{\frac{1}{\varrho}} \frac{\sqrt{q^2 - \left(r - \frac{1}{r}\right)^2}}{1 + r^2} dr = \int_1^{\varrho} \frac{\sqrt{q^2 - \left(r - \frac{1}{r}\right)^2}}{1 + r^2} dr.$$

Bei Berücksichtigung dieser Identität ergibt die Einführung von (24) in (22) die Ungleichung

$$(27)\quad J \leqq \frac{q}{2} L - 4 \int_1^{\varrho} \frac{\sqrt{q^2 - \left(r - \frac{1}{r}\right)^2}}{1 + r^2} dr.$$

Durch die Substitution

$$(28)\quad r = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right), \quad \frac{2\,dr}{1 + r^2} = d\beta, \quad r - \frac{1}{r} = 2\operatorname{tg}\beta$$

erhält die letzte Ungleichung die Form

$$(29)\quad J \leqq \frac{q}{2} L - 2 \int_0^{\alpha} \sqrt{q^2 - 4\operatorname{tg}^2\beta}\, d\beta = \Gamma(L, \alpha, q).$$

Das Gleichheitszeichen gilt in den beiden Ungleichungen (27) und (29) dann und nur dann, wenn (21) und (25) erfüllt sind.

Spezialisiert man jetzt

$$(30)\quad q = \varrho - \frac{1}{\varrho} = 2\operatorname{tg}\alpha,$$

so ergibt sich

$$J \leqq \operatorname{tg}\alpha L - 4\int_0^{\alpha} \sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta}\, d\beta = \Gamma(L, \alpha, 2\operatorname{tg}\alpha). \tag{31}$$

Das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn (21) unter der Spezialisierung (30) und ferner noch (25) erfüllt sind.

Nun wollen wir zeigen, daß diese Bedingungen in der Tat für den Kreis erfüllt sind, der in den Kreisring zwischen den beiden konzentrischen Kreisen

$$r = \varrho \text{ und } r = \frac{1}{\varrho}$$

dergestalt eingeschrieben ist, daß er den Koordinatenanfangspunkt nicht umschließt.

Bezeichnet nämlich O den Koordinatenanfangspunkt, M den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises und P seinen laufenden Punkt, so ist

$$\overline{MP} = \frac{1}{2}\left(\varrho - \frac{1}{\varrho}\right), \overline{OM} = \frac{1}{2}\left(\varrho + \frac{1}{\varrho}\right), \overline{OP} = r$$

und man hat laut dem Kosinussatz für das Dreieck OMP

$$\frac{1}{4}\left(\varrho + \frac{1}{\varrho}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\varrho - \frac{1}{\varrho}\right)^2 + r^2 - \left(\varrho - \frac{1}{\varrho}\right) r \cos(Nr),$$

$$r - \frac{1}{r} = \left(\varrho - \frac{1}{\varrho}\right)\cos(Nr) = 2\operatorname{tg}\alpha \cos(Nr).$$

Also ist (21) unter der Spezialisierung (30) erfüllt.

Daß auch (25) erfüllt ist, leuchtet ein, wenn man die Euklidische Bogenlänge auf dem eingeschriebenen Kreise von seinem Berührungspunkt mit dem äußeren Kreise des Kreisrings mißt; s_1 wird dann gleich der halben Kreisperipherie, s_2 fällt mit s_1 zusammen und s_3 mit l, d. h. der Länge der ganzen Kreisperipherie.

Da dem eingeschriebenen Kreise auf der Kugel ein Kreis mit dem auf der Kugel gemessenen Radius α entspricht, dessen Inhalt und Umfang wie in (8) mit $\overline{J}(\alpha)$ und $\overline{L}(\alpha)$ bezeichnet werden mögen, so gilt also, wie eben bewiesen,

$$\overline{J}(\alpha) = \operatorname{tg}\alpha\, \overline{L}(\alpha) - 4\int_0^{\alpha} \sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta}\, d\beta. \tag{32}$$

Aus (31) und (32) folgt

$$J \leqq L\operatorname{tg}\alpha - (\operatorname{tg}\alpha\, \overline{L}(\alpha) - \overline{J}(\alpha)) = \Gamma(L, \alpha, 2\operatorname{tg}\alpha). \tag{33}$$

Bei Einführung von (8) ergibt sich hieraus die zu beweisende isoperimetrische Ungleichung (9).

Die Feststellung derjenigen geschlossenen einfachen Kurven, welche in dieser Ungleichung die Gleichheit erreichen, folgt im nächsten Paragraphen.

§ 3.

Feststellung derjenigen geschlossenen einfachen Kurven, welche in den isoperimetrischen Ungleichungen die Gleichheit erreichen.

Wie noch einmal wiederholt werden darf, gilt in der isoperimetrischen Ungleichung (29) das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn (21) und (25) erfüllt sind. Ebenso gilt in den miteinander gleichbedeutenden aus (29) durch die Spezialisierung (30) hervorgehenden Ungleichungen (33) (9) das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn (21) bei dieser Spezialisierung erfüllt ist und (25) desgleichen.

Zunächst fordert (25), daß

$$(34)\quad \begin{cases} \text{für } s_1 < s < s_2 & r - \dfrac{1}{r} \equiv -\left(\varrho - \dfrac{1}{\varrho}\right),\ \cos(Nr) = -1 \\ \text{und für } s_3 < s < l & r - \dfrac{1}{r} \equiv \left(\varrho - \dfrac{1}{\varrho}\right),\ \cos(Nr) = 1 \end{cases}$$

ist. Also folgt wegen (21) aus

$$q > \varrho - \frac{1}{\varrho}$$

$$(35)\qquad s_1 = s_2, \quad s_3 = l.$$

Ist aber

$$q = \varrho - \frac{1}{\varrho}$$

und ist

$$\text{für}\quad s_1 < s < s_2 \quad r \equiv \frac{1}{\varrho} \quad \text{und für}\quad s_3 < s < l \quad r \equiv \varrho,$$

so sind in diesen Intervallen (25) und (21) erfüllt. Denn da die Kurve C in den Kreisring zwischen den beiden konzentrischen Kreisen mit den Radien $\frac{1}{\varrho} < 1$ und $\varrho > 1$ eingeschrieben ist, so muß für $r \equiv \frac{1}{\varrho}$ $\cos(Nr) \equiv -1$ und für $r \equiv \varrho$ $\cos(Nr) \equiv 1$ sein.

Jetzt soll der Verlauf einer (21) und (25) erfüllenden Kurve C in den Intervallen $0 < s < s_1$ und $s_2 < s < s_3$ untersucht werden.

Da in diesen Intervallen gemäß (25)

$$\frac{1}{\varrho} < r < \varrho$$

ist, so folgt aus (21), daß in diesen Intervallen

$$(36)\qquad |\cos(Nr)| < 1 \quad \text{und mithin auch} \quad \cos(N\varphi) \neq 0$$

bleibt. Gemäß (17) ist nun

$$(37)\qquad \frac{d\varphi}{dr} = -\frac{\cos(Nr)}{r\cos(N\varphi)} = -\operatorname{sign}(\cos(N\varphi))\,\frac{\cos(Nr)}{r\sqrt{1-\cos^2(Nr)}},$$

wobei der Wurzel das positive Vorzeichen beizulegen ist. Durch Einführung von (21) in (37) erhält man

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\operatorname{sign}(\cos(N\varphi)) \frac{r-\frac{1}{r}}{r\sqrt{q^2-\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}}.$$

Die Vorzeichenbestimmung von $\cos(N\varphi)$ durch (25) ergibt

(38) für $0 < s < s_1$ $\quad \frac{d\varphi}{dr} = -\frac{r-\frac{1}{r}}{r\sqrt{q^2-\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}}$,

(39) für $s_2 < s < s_3$ $\quad \frac{d\varphi}{dr} = \frac{r-\frac{1}{r}}{r\sqrt{q^2-\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}}$.

Ist also

$$\text{für } s = 0 \qquad \varphi = \varphi(0),$$

so erhält man

(40) $$\text{für } 0 \leqq s \leqq s_1 \qquad \varphi = \varphi(0) + \int_r^{\varrho} \frac{t-\frac{1}{t}}{t\sqrt{q^2-\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}}\,dt.$$

Wie die Substitution

$$t = \frac{1}{t'}$$

zeigt, ist

(41) $$\int_1^{\varrho} \frac{t-\frac{1}{t}}{t\sqrt{q^2-\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}}\,dt = -\int_{\frac{1}{\varrho}}^{1} \frac{t-\frac{1}{t}}{t\sqrt{q^2-\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}}\,dt.$$

Also ist

(42) $$\varphi(s_1) = \varphi(0).$$

Ebenso ergibt sich für

(43) $$s_2 \leqq s \leqq s_3 \qquad \varphi = \varphi(s_2) + \int_{\frac{1}{\varrho}}^{r} \frac{t-\frac{1}{t}}{t\sqrt{q^2-\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}}\,dt,$$

(44) $$\varphi(s_3) = \varphi(s_2).$$

Man betrachte nun einen Kreis mit dem Radius $\frac{q}{2}$, dessen Mittelpunkt M vom Koordinatenanfangspunkt O die Entfernung

$$\overline{OM} = \sqrt{1+\frac{q^2}{4}}$$

hat. Bezeichnet man mit P den laufenden Punkt des Kreises und setzt

$$OP = r,$$

so ist gemäß dem Kosinussatz für das Dreieck OMP

$$1 + \frac{q^2}{4} = \frac{q^2}{4} + r^2 - r\,q\cos(N\,r),$$

wobei N die äußere Normale des Kreises in P bedeutet. Aus der letzten Gleichung folgt (21), wenn die äußere Normale des vom Kreisbogen als Teil der geschlossenen einfachen Kurve C umschlossenen Gebietes mit der äußeren Normalen des Kreises übereinstimmt, oder mit anderen Worten, wenn der Kreisbogen das umschlossene Gebiet mit der konvexen Seite nach außen begrenzt.

Nun folgen aus (21) und der Identität (37) die Gleichungen (38) und (39) und mithin auch (40) und (43). Also ergibt sich aus den gemachten Feststellungen:

Die geschlossene einfache, den Forderungen (21) und (25) genügende Kurve C verläuft für $0 \leqq s \leqq s_1$ in einem aus solch einem Kreise durch die konzentrischen Kreise mit den Radien $\frac{1}{\varrho}$ und ϱ ausgeschnittenen Kreisbogen, der das von C umschlossene Gebiet mit der konvexen Seite nach außen begrenzt und dessen konvexe Seite dem wachsenden φ zugekehrt ist; für $s_2 \leqq s \leqq s_3$ verläuft C ebenfalls in einem aus solch einem Kreise durch die konzentrischen Kreise mit den Radien $\frac{1}{\varrho}$ und ϱ ausgeschnittenen Kreisbogen der das von C umschlossene Gebiet mit der konvexen Seite nach außen begrenzt, dessen konvexe Seite aber jetzt dem fallenden φ zugekehrt ist.

Im Spezialfall

$$q = \varrho - \frac{1}{\varrho} = 2\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

sind die beiden Kreisbögen Halbkreise, welche die konzentrischen Kreise mit den Radien $\frac{1}{\varrho}$ und ϱ berühren.

I. Es sei jetzt

$$q = \varrho - \frac{1}{\varrho} = 2\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Dann besteht die Kurve C aus zwei aus den beiden konzentrischen Kreisen mit den Radien $\frac{1}{\varrho}$ und ϱ durch zwei Radien, die in O einen Winkel γ bilden, ausgeschnittenen Kreisbögen und zwei auf ihren Endpunkten mit der konvexen Seite nach außen aufgestülpten Halbkreisen, welche die beiden konzentrischen Kreise berühren und — auf der Kugel gemessen — den Radius α besitzen.

Bezeichnet $C_{\mathrm{I},\alpha\gamma}$ eine solche Kurve und $\bar{L}_{\mathrm{I},\alpha\gamma}$ ihren auf der Kugel gemessenen Umfang, so erhält man gemäß (8), (18)

$$(45)\quad \bar{L}_{\mathrm{I},\alpha,\gamma} = 2\pi\sin\alpha + \frac{2}{1+\frac{1}{\varrho^2}}\frac{1}{\varrho}\gamma + \frac{2}{1+\varrho^2}\varrho\gamma = 2\pi\sin\alpha + \frac{4}{\varrho+\frac{1}{\varrho}}\gamma =$$

$$= 2\pi\sin\alpha + 2\gamma\cos\alpha.$$

Zu gegebenem L und α gibt es daher dann und nur dann eine Kurve $C_{\mathrm{I},\alpha,\gamma}$, wenn

$$2\pi\sin\alpha \leqq L \text{ oder gleichbedeutend } \alpha \leqq \alpha'$$

ist, wobei, wie wiederholt werden darf, der Radius des Kreises gleichen Umfanges α' durch die Gleichung

$$(46)\qquad 2\pi\sin\alpha' = L$$

definiert ist. Durch die Gleichung

$$(47)\qquad 2\pi\sin\alpha + 2\gamma\cos\alpha = L$$

wird dann γ bestimmt, und es gehört daher zu L und α nur eine einzige Kurve $C_{\mathrm{I},\alpha,\gamma}$.

Vom Koordinatenanfangspunkt aus gesehen ist der scheinbare Größenwinkel jedes der beiden an den beiden Enden von $C_{\mathrm{I},\alpha,\gamma}$ aufgestülpten Halbkreise gleich α. Denn da der Radius dieser Halbkreise gleich $\frac{1}{2}\left(\varrho-\frac{1}{\varrho}\right)$ und die Entfernung der Mittelpunkte vom Koordinatenanfangspunkt gleich $\frac{1}{2}\left(\varrho+\frac{1}{\varrho}\right)$ ist, so ist der Sinus des Größenwinkels gleich

$$\frac{\frac{1}{2}\left(\varrho-\frac{1}{\varrho}\right)}{\frac{1}{2}\left(\varrho+\frac{1}{\varrho}\right)} = \sin\alpha \qquad \text{wegen (15).}$$

Daher ist der scheinbare Größenwinkel der ganzen Kurve $C_{\mathrm{I},\alpha,\gamma}$ gleich $\gamma+2\alpha$. Nun ergibt der aus (47) ermittelte Wert von γ bei Berücksichtigung von (7)

$$(47\,\mathrm{a})\qquad \gamma + 2\alpha < \pi.$$

Man erhält nämlich

$$\gamma+2\alpha = \frac{L-2\pi\sin\alpha}{2\cos\alpha} + 2\alpha < \pi\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} + 2\alpha = \pi\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right) + 2\alpha$$

$$= \pi - \pi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{4}{\pi} - \frac{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}}\right) < \pi.$$

Denn die Funktion

$$\frac{\operatorname{tg} \psi}{\psi}$$

wächst im Quadranten $0 < \psi < \frac{\pi}{2}$ monoton mit ψ und bleibt daher für

$$\psi = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$$

kleiner als

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}.$$

Für

$$\alpha = \alpha'$$

wird

$$\gamma = 0$$

und $C_{\mathrm{I}, \alpha, \gamma}$ geht in den Kreis mit dem auf der Kugel gemessenen Radius α' über.

Damit ist bewiesen, daß für den Fall

$$\alpha \leqq \alpha'$$

in den miteinander gleichbedeutenden isoperimetrischen Ungleichungen (31), (33), (9) *die Gleichheit stets von einer und nur einer geschlossenen einfachen Kurve erreicht wird, nämlich von derjenigen, deren stereographische Projektion die oben bestimmte Kurve* $C_{\mathrm{I}, \alpha, \gamma}$ *ist. Insbesondere ist damit auch bewiesen, daß in der aus der Ungleichung* (9) *a fortiori folgenden gewöhnlichen isoperimetrischen Ungleichung* (11) *die Gleichheit nur vom Kreise erreicht wird.*

II. Es sei

$$q > \varrho - \frac{1}{\varrho} = 2 \operatorname{tg} \alpha.$$

Dann besteht C wegen (35), (42), (44) aus zwei Kreisbögen, welche Kreisen mit dem Radius $\frac{q}{2}$ angehören, innerhalb des von den beiden konzentrischen Kreisen mit den Radien $\frac{1}{\varrho}$ und ϱ begrenzten Kreisringes verlaufen und sich auf diesen Kreisen in zwei Punkten schneiden die auf einem von O ausgehenden Radiusvektor liegen. Die Mittelpunkte dieser Kreise haben dann von O die Entfernung

$$\sqrt{1 + \frac{q^2}{4}}$$

Denn ist h die Entfernung eines Mittelpunktes von dem durch die Schnittpunkte gehenden Radiusvektor, so ist

$$h^2 + \left(\frac{\varrho - \frac{1}{\varrho}}{2}\right)^2 = \frac{q^2}{4}$$

und mithin

$$h^2 + \left(\frac{\varrho + \frac{1}{\varrho}}{2}\right)^2 = 1 + \frac{q^2}{4}. \tag{48}$$

Man bezeichne eine solche Kurve C mit $C_{\mathrm{II},\alpha,q}$, ihre auf der Kugel gemessene Länge mit $\bar{L}_{\mathrm{II}}(\alpha, q)$ und den auf der Kugel gemessenen Flächeninhalt des von ihr umschlossenen Gebiets mit $\bar{J}_{\mathrm{II}}(\alpha, q)$. Da $C_{\mathrm{II},\alpha,\varrho}$ für

$$q = \varrho - \frac{1}{\varrho} = 2 \operatorname{tg} \alpha$$

in den Kreis mit dem auf der Kugel gemessenen Radius α übergeht, so hat man

$$\bar{L}_{\mathrm{II}}(\alpha, 2 \operatorname{tg} \alpha) = 2\pi \sin \alpha, \quad \bar{J}_{\mathrm{II}}(\alpha, 2 \operatorname{tg} \alpha) = 2\pi (1 - \cos \alpha). \tag{49}$$

Gemäß (18), (21) ist

$$\bar{J}_{\mathrm{II}}(\alpha, q) = \int_{C_{\mathrm{II},\alpha,q}} \frac{r - \frac{1}{r}}{1 + r^2} \cos(N r)\, ds = \int_{C_{\mathrm{II},\alpha,q}} \frac{\left(r - \frac{1}{r}\right)^2}{q(1 + r^2)} dr.$$

Nun ist wegen (17), (38), (39) auf jedem der beiden Kreisbögen, aus welchen $C_{\mathrm{II},\alpha,q}$ besteht

$$\left(\frac{ds}{dr}\right)^2 = 1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 = \frac{q^2}{q^2 - \left(r - \frac{1}{r}\right)^2}. \tag{50}$$

Daher erhält man

$$\bar{J}_{\mathrm{II}}(\alpha, q) = 2 \int_{\frac{1}{\varrho}}^{\varrho} \frac{\left(r - \frac{1}{r}\right)^2}{(1 + r^2) \sqrt{q^2 - \left(r - \frac{1}{r}\right)^2}} dr = 4 \int_{1}^{\varrho} \frac{\left(r - \frac{1}{r}\right)^2}{(1 + r^2) \sqrt{q^2 - \left(r - \frac{1}{r}\right)^2}} dr. \tag{51}$$

Durch die Substitution

$$r = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right), \quad \frac{2 dr}{1 + r^2} = d\beta, \quad r - \frac{1}{r} = 2 \operatorname{tg} \beta$$

ergibt sich

$$\bar{J}_{\mathrm{II}}(\alpha, q) = 8 \int_{0}^{\alpha} \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{\sqrt{q^2 - 4 \operatorname{tg}^2 \beta}} d\beta. \tag{52}$$

Ebenso erhält man aus (18), (21)

$$(53)\quad \bar{L}_{II}(\alpha, q) = \int\limits_{C_{II,\alpha,q}} \frac{2}{1+r^2}\,ds = 4\int\limits_{\frac{1}{q}}^{q} \frac{q}{(1+r^2)\sqrt{q^2-\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}}\,dr$$

$$= 8\int\limits_{1}^{q} \frac{1}{(1+r^2)\sqrt{1-\frac{\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}{q^2}}}\,dr,$$

$$(54)\quad \bar{L}_{II}(\alpha, q) = 4\int\limits_{0}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{q^2}\operatorname{tg}^2\beta}}\,d\beta.$$

Aus den Darstellungen (52), (54) geht hervor, daß

$$\bar{J}_{II}(\alpha, q) \quad \text{und} \quad \bar{L}_{II}(\alpha, q)$$

bei festem α mit wachsendem q monoton abnehmen und bei festem q mit wachsendem α monoton zunehmen. Man erhält

$$(55)\quad \lim_{q\to\infty} \bar{J}_{II}(\alpha, q) = 0, \quad \lim_{q\to\infty} \bar{L}_{II}(\alpha, q) = 4\alpha.$$

Zu gegebenem L und α gibt es also dann und nur dann eine Kurve $C_{II,\alpha,q}$, wenn die Gleichung

$$(56)\quad \bar{L}_{II}(\alpha, q) = L$$

eine Lösung

$$(57)\quad q^* = q^*(L, \alpha)$$

besitzt. Da gemäß (12)

$$(58)\quad 4\alpha < L$$

bleiben muß, und die linke Seite von (56), wie eben festgestellt, bei festem α mit wachsendem q monoton abnimmt, so folgt aus (49) und (55), daß die Gleichung (56) dann und nur dann eine Lösung hat, wenn

$$(59)\quad 2\pi\sin\alpha \geqq L \text{ oder gleichbedeutend } \alpha \geqq \alpha'$$

ist, wobei α' durch (46) definiert ist. Die Gleichung hat dann stets nur eine einzige Lösung. Für $\alpha = \alpha'$ erhält man wegen (49), (46)

$$(60)\quad q^*(L, \alpha') = 2\operatorname{tg}\alpha'.$$

Für $\alpha > \alpha'$ ist wegen (49), (46)

$$(61)\quad q^*(L, \alpha) > 2\operatorname{tg}\alpha.$$

Da ferner, wie wiederholt werden darf,

$$\bar{L}_{II}(\alpha, q)$$

bei festem q mit wachsendem α monoton zunimmt, so nimmt auch

$$q^*(L, \alpha)$$

bei festem L mit wachsendem α monoton zu.

Wie (54) zeigt, ist

$$\lim_{\alpha \to \frac{L}{4}} q^*(L, \alpha) = \infty, \tag{62}$$

und hieraus folgt wegen (52)

$$\lim_{\alpha \to \frac{L}{4}} \bar{J}_{II}(\alpha, q^*(L, \alpha)) = 0. \tag{63}$$

Da, wie bewiesen, in der isoperimetrischen Ungleichung (29) für $q = q^*$ die Kurve C_{II, α, q^*} die Gleichheit erreicht, so ist

$$\Gamma(L, \alpha, q^*(L, \alpha)) = \bar{J}_{II}(\alpha, q^*(L, \alpha)). \tag{64}$$

Die Ungleichung (29) gilt aber für jedes $q \geqq 2 \operatorname{tg} \alpha$. Also ist für jedes $q \geqq 2 \operatorname{tg} \alpha$

$$\Gamma(L, \alpha, q) \geqq \bar{J}_{II}(\alpha, q^*(L, \alpha)). \tag{65}$$

Hier ist aber nach den obigen Feststellungen für

$$q \neq q^*(L, \alpha)$$

das Gleichheitszeichen ausgeschlossen. Also ist für

$$q \neq q^*(L, \alpha) \quad \Gamma(L, \alpha, q^*(L, \alpha)) < \Gamma(L, \alpha, q). \tag{66}$$

Insbesondere ist also wegen (61) für

$$\alpha > \alpha' \quad \Gamma(L, \alpha, q^*(L, \alpha)) < \Gamma(L, \alpha, 2 \operatorname{tg} \alpha). \tag{67}$$

Die aus (29) *für* $q = q^*$ *hervorgehende isoperimetrische Ungleichung*

$$J \leqq \Gamma(L, \alpha, q^*(L, \alpha)) = \bar{J}_{II}(\alpha, q^*(L, \alpha)) \tag{68}$$

liefert also in der Tat für $\alpha > \alpha'$ *eine kleinere Schranke als die miteinander gleichbedeutenden isoperimetrischen Ungleichungen* (31), (33), (9).

Jetzt wollen wir noch den Verlauf von

$$\Gamma(L, \alpha, q^*(L, \alpha))$$

als Funktion von L und α diskutieren. Es ist

$$\frac{\partial}{\partial L} \Gamma(L, \alpha, q^*(L, \alpha)) = \Gamma_L(L, \alpha, q^*) + \Gamma_q(L, \alpha, q^*) \frac{\partial q^*(L, \alpha)}{\partial L}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \Gamma(L, \alpha, q^*(L, \alpha)) = \Gamma_\alpha(L, \alpha, q^*) + \Gamma_q(L, \alpha, q^*) \frac{\partial q^*(L, \alpha)}{\partial \alpha}.$$

Nun ist wegen (29)

$$(69) \qquad \Gamma_L(L,\alpha,q^*) = \frac{q^*}{2}, \qquad \Gamma_q(L,\alpha,q^*) = -2\sqrt{q^{*2} - 4\operatorname{tg}^2\alpha}$$

und wegen (66), (61) für

$$(70) \qquad \alpha > \alpha' \qquad \Gamma_q(L,\alpha,q^*) = 0,$$

während wegen (54) (56) q^* nach L und α differenzierbar bleibt.

Also ist für

$$(71) \qquad \alpha > \alpha' \qquad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L}\Gamma(L,\alpha,q^*(L,\alpha)) &= \frac{q^*(L,\alpha)}{2}, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha}\Gamma(L,\alpha,q^*(L,\alpha)) &= -2\sqrt{q^*(L,\alpha)^2 - 4\operatorname{tg}^2\alpha}. \end{aligned}$$

Ferner ist wegen (68), (63)

$$(72) \qquad \lim_{\alpha \to \frac{L}{4}} \Gamma(L,\alpha,q^*(L,\alpha)) = 0$$

und wegen (60), (68), (49)

$$(73) \quad \Gamma(L,\alpha',q^*(L,\alpha')) = \Gamma(L,\alpha',2\operatorname{tg}\alpha') = \bar{J}_{II}(\alpha',2\operatorname{tg}\alpha') = 2\pi(1-\cos\alpha').$$

Man definiere nun unter Berücksichtigung von (29), (31), (33), (9), (11) die Funktion $G(L,\alpha)$ durch die Gleichungen

$$(74) \quad \begin{cases} \text{für } \alpha \leqq \alpha' \quad G(L,\alpha) = \Gamma(L,\alpha,2\operatorname{tg}\alpha) = H(L,\alpha) = L\operatorname{tg}\alpha - 2\pi\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right), \\ \text{für } \alpha > \alpha' \quad G(L,\alpha) = \Gamma(L,\alpha,q^*(L,\alpha)). \end{cases}$$

Wie (73), (11), (8) zeigen, ist die Funktion $G(L,\alpha)$ auch an der „Nahtstelle"

$$\alpha = \alpha'$$

stetig; wie aus (71), (60), (10) hervorgeht, bleiben sogar auch die ersten Ableitungen der Funktion nach L und α an dieser Stelle stetig. Man erhält

$$(75) \qquad G(L,\alpha') = \bar{J}(\alpha') = 2\pi(1-\cos\alpha'),$$

$$(76) \qquad G_L(L,\alpha') = \operatorname{tg}\alpha', \quad G_\alpha(L,\alpha') = 0.$$

Ferner lassen (10) und (71) erkennen, daß die Funktion $G(L,\alpha)$ mit wachsendem α für $\alpha \leqq \alpha'$ monoton zunimmt, für $\alpha \geqq \alpha'$ monoton absteigt und gemäß (68), (63) mit $\frac{L}{4} - \alpha$ gegen Null konvergiert.

Nun gilt für alle bei gegebenem L überhaupt möglichen Werte von α, d. h. für

$$0 < \alpha < \frac{L}{4},$$

die isoperimetrische Ungleichung

$$(77) \qquad J \leqq G(L,\alpha),$$

in welcher die Gleichheit stets von einer und nur einer geschlossenen einfachen Kurve erreicht wird.

§ 4.

Die isoperimetrischen Ungleichungen für Rotationskörper im n-dimensionalen sphärischen Raum.

Es sei $\mathfrak{R}_{K^{(n+1)}}$, $n \geqq 3$, ein im n-dimensionalen sphärischen Raum, also auf der Oberfläche der Einheitskugel $K^{(n+1)}$

$$\sum_{1}^{n+1}{}_{\nu} \xi_\nu^2 = 1 \tag{78}$$

liegender Rotationskörper, d. h. ein Körper, der bei allen Euklidischen Drehungen der Kugel um ihren Mittelpunkt, welche die Punkte eines größten Kreises, der Rotationsachse, fest lassen, in sich selbst übergeht. Es sei ferner noch vorausgesetzt, daß die Oberfläche des Körpers mit der Rotationsachse zwei und nur zwei verschiedene Punkte gemein hat. Ist das Koordinatensystem so gewählt, daß die Rotationsachse die Gleichungen

$$\xi_\mu = 0, \qquad \mu = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{79}$$

hat, so läßt sich die Oberfläche des Körpers folgendermaßen darstellen:

Es seien

$$\xi_n(t), \quad \xi_{n+1}(t), \quad \eta(t), \quad \eta(t) \geqq 0$$

die laufenden Koordinaten der auf der dreidimensionalen Einheitskugel $K^{(3)}$

$$\xi_n^2 + \xi_{n+1}^2 + \eta^2 = 1 \tag{80}$$

liegenden „Meridiankurve" $M_{K^{(3)}}$, einer einfachen Kurve, welche den größten Kreis

$$\eta = 0$$

in zwei und nur zwei verschiedenen Punkten schneidet.

Dann wird die Oberfläche des Rotationskörpers $\mathfrak{R}_{K^{(n+1)}}$ gegeben durch die Gleichungen

$$\xi_n = \xi_n(t), \qquad \xi_{n+1} = \xi_{n+1}(t), \qquad \sum_{1}^{n-1}{}_{\mu} \xi_\mu^2 = \eta^2(t). \tag{81}$$

Dabei machen wir noch die Voraussetzung, daß die ersten Ableitungen der Funktionen

$$\xi_n(t), \quad \xi_{n+1}(t), \quad \eta(t)$$

bis auf höchstens endlich viele Punkte bestimmt und stetig sind und nicht gleichzeitig verschwinden.

Der einfachste Rotationskörper im n-dimensionalen sphärischen Raum auf $K^{(n+1)}$ ist die n-dimensionale Kugel $K_\alpha^{(n)}$ mit dem auf $K^{(n+1)}$ gemessenen Radius α. Ist M ihr auf $K^{(n+1)}$ gelegener Mittelpunkt, so besteht ihre Oberfläche aus allen Punkten auf $K^{(n+1)}$, welche von M die auf $K^{(n+1)}$ gemessene

Entfernung α haben. Die Oberfläche geht daher bei allen Euklidischen Drehungen der Einheitskugel $K^{(n+1)}$ um ihren Mittelpunkt, welche den Mittelpunkt M von $K_\alpha^{(n)}$ fest lassen und mithin auch bei allen Rotationen um einen durch M gehenden größten Kreis von $K^{(n+1)}$ in sich selbst über. Die Vollkugel $K_\alpha^{(n)}$ besteht aus allen Punkten auf $K^{(n+1)}$, welche von M eine α nicht übersteigende Entfernung haben. Sind etwa

$$\xi_{n+1} = 1, \quad \xi_\nu = 0, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

die Koordinaten des Mittelpunktes M, so wird die Oberfläche von $K_\alpha^{(n)}$ gebildet durch den Schnitt der n-dimensionalen Ebene

$$\xi_{n+1} = \cos\alpha \tag{82}$$

mit der Oberfläche von $K^{(n+1)}$. Die Oberfläche von $K_\alpha^{(n)}$ ist also auch zugleich die Oberfläche einer gewöhnlichen Euklidischen n-dimensionalen Kugel mit dem Radius $\sin\alpha$.

Bezeichnet also $\bar{L}^{(n)}(\alpha)$ den Oberflächeninhalt der Kugel $K_\alpha^{(n)}$, so ist

$$\bar{L}^{(n)}(\alpha) = n E_n \sin^{n-1}\alpha. \tag{83}$$

Dabei bedeutet hier wie im folgenden E_p das Volumen der Euklidischen p-dimensionalen Einheitskugel und dementsprechend pE_p ihren Oberflächeninhalt. Um das Volumen $\bar{J}^{(n)}(\alpha)$ der auf $K^{(n+1)}$ gelegenen Kugel $K_\alpha^{(n)}$ zu erhalten, erzeuge man diese, indem man im Euklidischen Raum $(\xi_1\, \xi_2 \ldots \xi_{n+1})$ um die ξ_{n+1}-Achse als Rotationsachse einen Einheitskreisbogen von der Länge α, der im Punkte $\xi_{n-1} = 1$ senkrecht zur Rotationsachse ansetzt, rotieren läßt. $K_\alpha^{(n)}$ wird dann durch die Oberfläche dieses Rotationskörpers gegeben und mithin $\bar{J}^{(n)}(\alpha)$ durch seinen Oberflächeninhalt. Man hat also [13])

$$\bar{J}^{(n)}(\alpha) = n E_n \int_0^\alpha \sin^{n-1}\beta\, d\beta. \tag{84}$$

Aus (83) und (84) folgt

$$\bar{L}^{(n)}(\alpha) \leqq n E_n, \qquad 2 n E_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}\beta\, d\beta = (n+1) E_{n+1}. \tag{85}$$

Die isoperimetrische Aufgabe für Rotationskörper auf $K^{(n+1)}$ erhält nun naturgemäß die folgende Fassung:

Der sphärische Raum auf $K^{(n+1)}$ soll durch eine Rotationskörperoberfläche von möglichst geringem Oberflächeninhalt in zwei Gebiete von den gegebenen Volumina

$$J \text{ und } (n+1) E_{n+1} - J$$

zerlegt werden. Da eine solche Zerlegung in zwei Gebiete gegebenen Volumens stets auch durch eine auf $K^{(n+1)}$ liegende Kugel $K_\alpha^{(n)}$ bei passend gewähltem α

[13]) Vgl. Fußnote [14]), S. 773.

oder mit anderen Worten durch den Schnitt von $K^{(n+1)}$ mit einer der n-dimensionalen Ebenen

$$\xi_{n+1} = \cos\alpha$$

bewirkt werden kann, so zeigt (85), daß ohne Beschränkung der Allgemeinheit von vorn herein angenommen werden darf, daß

$$L \leqq n E_n \tag{86}$$

ist.

Schließen wir den Fall

$$J = \frac{n+1}{2} E_{n+1} \tag{87}$$

zunächst aus, so können wir also die Voraussetzung

$$L < n E_n \tag{88}$$

zugrunde legen. Unter dieser Voraussetzung kann die isoperimetrische Aufgabe auf $K^{(n+1)}$ auch so gefaßt werden:

Der sphärische Raum auf $K^{(n+1)}$ soll durch eine Rotationskörperoberfläche gegebenen Oberflächeninhalts L so in zwei Gebiete zerlegt werden, daß das kleinere derselben einen möglichst großen Inhalt hat.

Aus (88) folgt, wie am Ende dieses Paragraphen gezeigt werden wird, daß die oben definierten Meridiankurve $M_{K^{(3)}}$ nicht durch den Punkt

$$\eta = 1, \quad \xi_n = 0, \quad \xi_{n+1} = 0$$

hindurchgehen kann.

Die Halbkugel

$$\eta \geqq 0$$

der Kugel $K^{(3)}$ wird durch die Meridiankurve $M_{K^{(3)}}$ in zwei Gebiete zerlegt. Mit $G_{K^{(3)}}$ sei dasjenige der beiden Gebiete bezeichnet, welches den Punkt

$$\eta = 1, \quad \xi_n = 0, \quad \xi_{n+1} = 0$$

nicht enthält. Wir treffen jetzt die Festsetzung, daß $\mathfrak{R}_{K^{(n+1)}}$ denjenigen Rotationskörper auf $K^{(n+1)}$ bezeichnet, der $G_{K^{(3)}}$ entspricht, d. h. dessen Punkte durch die Gleichungen

$$\xi_n = \xi_{n,G}, \qquad \xi_{n+1} = \xi_{n+1,G}, \qquad \sum_{1}^{n-1} \xi_u^2 = \eta_G^2$$

gegeben sind, wobei der Punkt

$$(\xi_{n,G},\ \xi_{n+1,G},\ \eta_G)$$

das Gebiet $G_{K^{(3)}}$ durchläuft.

Wir denken uns auf dem die Rotationsachse bildenden größten Kreise (79) die Achsen

$$\xi_n, \quad \xi_{n+1}$$

so gewählt, daß auf $K^{(3)}$ der Punkt

$$\xi_{n+1} = 1, \quad \xi_n = 0, \quad \eta = 0$$

nicht zu $G_{K^{(3)}}$ gehört, oder, was dasselbe ist, daß auf $K^{(n+1)}$ der Punkt

$$\xi_{n+1} = 1, \quad \xi_\nu = 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n$$

ein äußerer Punkt von $\mathfrak{R}_{K^{(n+1)}}$ ist.

Man projeziere nun die Kugel $K^{(n+1)}$ vom Punkte

$$\xi_{n+1} = 1, \quad \xi_\nu = 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n$$

aus stereographisch auf die n-dimensionale Ebene

$$\xi_{n+1} = 0.$$

Läßt man in dieser Ebene die positiven x_ν-Achsen, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, mit den positiven ξ_ν-Achsen, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, zusammenfallen, so erhält man für das stereographische Bild $(x_1\, x_2 \ldots x_n)$ des Punktes $(\xi_1\, \xi_2 \ldots \xi_{n+1})$ die Gleichungen

$$(89) \qquad \begin{cases} x_\nu = \dfrac{\xi_\nu}{1-\xi_{n+1}}, & \nu = 1, 2, \ldots, n, \\ \xi_\nu = \dfrac{2\,x_\nu}{1+\sum\limits_1^n{}_\nu x_\nu^2}, & \nu = 1, 2, \ldots, n, \qquad \xi_{n+1} = \dfrac{\sum\limits_1^n{}_\nu x_\nu^2 - 1}{1+\sum\limits_1^n{}_\nu x_\nu^2}, \end{cases}$$

$$(90) \qquad \sum_1^n{}_\nu\, dx_\nu^2 = \left(\frac{1}{1-\xi_{n+1}}\right)^2 \sum_1^{n+1}{}_\nu\, d\xi_\nu^2, \qquad \sum_1^{n+1}{}_\nu\, d\xi_\nu^2 = \left(\frac{2}{1+\sum\limits_1^n{}_\nu x_\nu^2}\right)^2 \sum_1^n{}_\nu\, dx_\nu^2.$$

Bezeichnet auf der Kugel $K^{(n+1)}$ dS das Längenelement, dS_p das Element einer p-dimensionalen Mannigfaltigkeit, dT das Oberflächenelement und bezeichnen ds', ds'_p, $d\tau = dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$ die entsprechenden Elemente der stereographischen Projektion, so ist also

$$(91) \qquad \begin{cases} dS = \dfrac{2}{1+\sum\limits_1^n{}_\nu x_\nu^2}\, ds', \quad dS_p = \left(\dfrac{2}{1+\sum\limits_1^n{}_\nu x_\nu^2}\right)^p ds'_p, \\ dT = \left(\dfrac{2}{1+\sum\limits_1^n{}_\nu x_\nu^2}\right)^n dx_1 dx_2 \ldots dx_n. \end{cases}$$

Setzt man jetzt

$$(92) \qquad \sum_1^{n-1}{}_\mu \xi_\mu^2 = \eta^2, \quad \eta \geqq 0, \qquad \sum_1^{n-1}{}_\mu x_\mu^2 = y^2, \quad y \geqq 0,$$

so ergibt sich

$$(93)\quad \begin{cases} x_n = \dfrac{\xi_n}{1-\xi_{n+1}}, \quad y = \dfrac{\eta}{1-\xi_{n+1}}, \quad \xi_n = \dfrac{2x_n}{1+x_n^2+y^2}, \\ \eta = \dfrac{2y}{1+x_n^2+y^2}, \quad \xi_{n+1} = \dfrac{x_n^2+y^2-1}{1+x_n^2+y^2}; \end{cases}$$

$$(94)\quad \begin{cases} dx_n^2 + dy^2 = \left(\dfrac{1}{1-\xi_{n+1}}\right)^2 (d\xi_n^2 + d\xi_{n+1}^2 + d\eta^2); \\ d\xi_n^2 + d\xi_{n+1}^2 + d\eta^2 = \left(\dfrac{2}{1+x_n^2+y^2}\right)^2 (dx_n^2 + dy^2). \end{cases}$$

Das stereographische Bild der Oberfläche von $\mathfrak{K}_{K^{(n+1)}}$ wird also gegeben durch die Gleichungen

$$(95)\quad x_n(t) = \frac{\xi_n(t)}{1-\xi_{n+1}(t)}, \quad y(t) = \frac{\eta(t)}{1-\xi_{n+1}(t)}, \quad \sum_1^{n-1} x_\mu^2 = y^2.$$

Das stereographische Bild ist also ein Euklidischer Rotationskörper um die x_n-Achse. Seine Meridiankurve M mit den laufenden Koordinaten $x_n(t)$, $y(t)$ ist dabei das stereographische Bild der auf der Kugel $K^{(3)}$ gelegenen Meridiankurve $M_{K^{(3)}}$, wenn die Projektion der Kugel $K^{(3)}$ vom Punkte

$$\xi_{n+1} = 1, \quad \xi_n = 0, \quad \eta = 0$$

aus auf die Ebene

$$\xi_{n+1} = 0$$

ausgeführt wird. Es ist also

$$(96)\quad x_n'(t)^2 + y'(t)^2 = \left(\frac{2}{1-\xi_{n+1}(t)}\right)^2 (\xi_n'(t)^2 + \xi_{n+1}'(t)^2 + \eta'(t)^2),$$

woraus wegen der über $M_{K^{(3)}}$ gemachten Voraussetzungen folgt, daß die Ableitungen der laufenden Koordinaten von M

$$x_n'(t), \quad y'(t)$$

bis auf höchstens endlich viele Punkte bestimmt und stetig sind und nicht gleichzeitig verschwinden.

Im Raume $(x_1\, x_2 \ldots x_n)$ entspricht bei der Rotation um die x_n-Achse dem Element

$$dx_n\, dy$$

der Meridianebene das Volumenelement

$$(n-1)\, E_{n-1}\, y^{n-2}\, dx_n\, dy,$$

und dem Element ds' auf der Meridiankurve M das Oberflächenelement

$$(n-1)\, E_{n-1}\, y^{n-2}\, ds', \quad ^{14})$$

---

14) Eine ausführliche Begründung dieser Formeln findet sich in der unter 1) zitierten Arbeit, S. 706—708.

wobei wie oben E_p das Volumen der p-dimensionalen Einheitskugel im Euklidischen Raum bedeutet. Bezeichnen also L und J Oberflächeninhalt und Volumen von $\mathfrak{K}_{K^{(n+1)}}$, so erhält man wegen (91)

$$(97)\qquad \begin{cases} L = \int\limits_M \left(\dfrac{2}{1+x_n^2+y^2}\right)^{n-1} (n-1)\,E_{n-1}\,y^{n-2}\,ds', \\ J = \int\limits_G \left(\dfrac{2}{1+x_n^2+y^2}\right)^{n} (n-1)\,E_{n-1}\,y^{n-2}\,dx_n\,dy, \end{cases}$$

wobei G das stereographische Bild von $G_{K^{(3)}}$ ist und, da $G_{K^{(3)}}$ den Nordpol der Projektion nicht enthält, von M und der x_n-Achse als inneres Gebiet umschlossen wird.

Aus (93), (94) folgt jetzt

$$(98)\qquad L = (n-1)E_{n-1}\int\limits_{M_{K^{(3)}}} \eta^{n-2}\,dS_{K^{(3)}}, \quad J = (n-1)\,E_{n-1}\int\limits_{G_{K^{(3)}}} \eta^{n-2}\,dT_{K^{(3)}},$$

wobei $dS_{K^{(3)}}$ und $dT_{K^{(3)}}$ das Längenelement und das Oberflächenelement auf der Kugel $K^{(3)}$ bedeuten.

Setzt man

$$(99)\qquad \sin\beta = \eta, \quad 0 \leqq \beta < \frac{\pi}{2},$$

so ist β die auf der Kugel $K^{(n+1)}$ gemessene Entfernung derjenigen Punkte der Oberfläche des Körpers $\mathfrak{K}_{K^{(n+1)}}$ von der Rotationsachse, welche zum Punkte

$$\xi_n = \xi_n(t), \quad \xi_{n+1} = \xi_{n+1}(t), \quad \eta = \eta(t)$$

der Meridiankurve $M_{K^{(3)}}$ gehören; β bildet eben den auf der Kugel $K^{(n+1)}$ gemessenen Radius der betreffenden $(n-1)$-dimensionalen Breitenkugel des Rotationskörpers. Es bezeichne nun α den Maximalwert von β, d. h. also den auf $K^{(n+1)}$ gemessenen Maximalradius der $(n-1)$-dimensionalen Breitenkugeln. Dann ist α offenbar auch der auf $K^{(3)}$ gemessene Maximalabstand der Meridiankurve $M_{K^{(3)}}$ vom größten Kreis

$$\eta = 0.$$

Da ferner, wie oben vorausgeschickt, diese Kurve wegen (88) nicht durch den Punkt

$$\xi_n = 0, \quad \xi_{n+1} = 0, \quad \eta = 1$$

hindurchgehen kann, so ist

$$(100)\qquad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Nunmehr projiziere man die Kugel $K^{(3)}$ vom Nordpol

$$\eta = 1, \quad \xi_n = 0, \quad \xi_{n+1} = 0$$

aus stereographisch auf die Ebene

$$\eta = 0.$$

Läßt man in dieser Ebene die positive u-Achse mit der positiven ξ_n-Achse und die positive v-Achse mit der positiven ξ_{n+1}-Achse zusammenfallen, so erhält man

$$(101) \quad \begin{cases} u = \dfrac{\xi_n}{1-\eta}, \; v = \dfrac{\xi_{n+1}}{1-\eta}, \; \xi_n = \dfrac{2u}{1+u^2+v^2}, \\ \xi_{n+1} = \dfrac{2v}{1+u^2+v^2}, \qquad \eta = \dfrac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2}; \end{cases}$$

$$(102) \quad \begin{cases} du^2 + dv^2 = \left(\dfrac{1}{1-\eta}\right)^2 (d\xi_n^2 + d\xi_{n+1}^2 + d\eta^2), \\ d\xi_n^2 + d\xi_{n+1}^2 + d\eta^2 = \left(\dfrac{2}{1+u^2+v^2}\right)^2 (du^2 + dv^2). \end{cases}$$

Bedeutet ds das Euklidische Längenelement der (u, v)-Ebene, so hat man also

$$(103) \qquad dS_{K^{(3)}} = \frac{2\,ds}{1+u^2+v^2}, \qquad dT_{K^{(3)}} = \left(\frac{2}{1+u^2+v^2}\right)^2 du\,dv.$$

Die Einführung von (101), (102), (103) in (98) ergibt

$$(104) \quad \begin{cases} L = (n-1)\,E_{n-1} \displaystyle\int_{C'} \left(\frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2}\right)^{n-2} \frac{2}{1+u^2+v^2}\,ds, \\ J = (n-1)\,E_{n-1} \displaystyle\int_{T'} \left(\frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2}\right)^{n-2} \left(\frac{2}{1+u^2+v^2}\right)^2 du\,dv, \end{cases}$$

wobei C' die stereographische Projektion der Meridiankurven $M_{K^{(3)}}$, und T' die stereographische Projektion des Gebietes $G_{K^{(3)}}$ bedeuten. Wegen (99) und (100) verläuft also C' ganz in dem Gebiet

$$(105) \qquad 1 \leqq r \leqq \varrho = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right), \qquad r^2 = u^2 + v^2.$$

C' trifft ferner mindestens einmal den Kreis

$$r = \varrho,$$

trifft den Kreis

$$r = 1$$

in zwei und nur zwei verschiedenen Punkten und umschließt zusammen mit dem einen Bogen dieses Kreises das Gebiet T'.

Jetzt führe man Polarkoordinaten ein.

$$(106) \quad u = r\cos\varphi, \quad v = r\sin\varphi, \quad du^2 + dv^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad du\,dv = r\,dr\,d\varphi.$$

Man erhält

$$(107)\quad L = 2(n-1)E_{n-1}\int_{C'}\left(1-\frac{2}{1+r^2}\right)^{n-2}\frac{1}{1+r^2}ds$$

$$= 2(n-1)E_{n-1}\int_{C'}\left(\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\right)^{n-2}\frac{1}{r+\frac{1}{r}}\sqrt{\left(\frac{1}{r}dr\right)^2+d\varphi^2},$$

$$(108)\quad J = (n-1)E_{n-1}\int_{T'}\left(1-\frac{2}{1+r^2}\right)^{n-2}\frac{4r}{(1+r^2)^2}dr\,d\varphi$$

$$= E_{n-1}\int_{C'}\left(1-\frac{2}{1+r^2}\right)^{n-1}\frac{\cos(N'r)}{r}ds$$

$$= E_{n-1}\int_{C'}\left(\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\right)^{n-2}\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\cos(N'r)\sqrt{\left(\frac{1}{r}dr\right)^2+d\varphi^2}.$$

Dabei bezeichnet N' die in das Äußere von T' weisende Normale in C' und $(N'r)$ den Winkel, den diese mit dem Radiusvektor bildet. Die Integrale auf der rechten Seite von (108) sind eigentlich über den ganzen Rand von T' zu erstrecken; da aber auf dem Teile des Randes, der vom Kreise

$$r = 1$$

gebildet wird, der Integrand wegen $n \geqq 3$ verschwindet, so brauchen die Integrale nur über C' erstreckt zu werden.

Es bezeichne nun C'' das Spiegelbild der Kurve C' am Kreise

$$r = 1,$$

T'' das Spiegelbild des Gebietes T' und N'' die in das Äußere von T'' weisende Normale von C''. Dann ist

$$(109)\quad \int_{C'}\left(\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\right)^{n-2}\frac{1}{r+\frac{1}{r}}\sqrt{\left(\frac{1}{r}dr\right)^2+d\varphi^2} =$$

$$= \int_{C''}\left|\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\right|^{n-2}\frac{1}{r+\frac{1}{r}}\sqrt{\left(\frac{1}{r}dr\right)^2+d\varphi^2}.$$

Berücksichtigt man ferner, daß in entsprechenden Punkten von C' und C''

$$\cos(N'r) \text{ und } \cos(N''r)$$

gleichen Betrag und entgegengesetztes Vorzeichen und daher

$$\left(r-\frac{1}{r}\right)\cos(N'r) \text{ und } \left(r-\frac{1}{r}\right)\cos(N''r)$$

gleichen Betrag und gleiches Vorzeichen haben, so ergibt sich

$$(110)\quad \int_{C'}\left(\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\right)^{n-2}\frac{\left(r-\frac{1}{r}\right)}{r+\frac{1}{r}}\cos(N'r)\sqrt{\left(\frac{1}{r}dr\right)^2+d\varphi^2}$$

$$=\int_{C''}\left|\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\right|^{n-2}\frac{\left(r-\frac{1}{r}\right)}{r+\frac{1}{r}}\cos(N''r)\sqrt{\left(\frac{1}{r}dr\right)^2+d\varphi^2}.$$

Bezeichnet jetzt C die aus C' und C'' zusammengesetzte geschlossene einfache Kurve, T das von ihr umschlossene, also aus T' und T'' zusammengesetzte Gebiet und N die in das Äußere von T weisende Normale von C, so ergibt sich aus (107), (108), (109), (110)

$$(111)\quad L=(n-1)E_{n-1}\int_C\left|\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\right|^{n-2}\frac{1}{r+\frac{1}{r}}\sqrt{\left(\frac{1}{r}dr\right)^2+d\varphi^2}$$

$$=(n-1)E_{n-1}\int_C\left|\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\right|^{n-2}\frac{ds}{1+r^2},$$

$$(112)\quad J=\frac{1}{2}E_{n-1}\int_C\left|\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\right|^{n-2}\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\cos(Nr)\sqrt{\left(\frac{1}{r}dr\right)^2+d\varphi^2}$$

$$=\frac{1}{2}E_{n-1}\int_C\left|\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\right|^{n-2}\frac{\left(r-\frac{1}{r}\right)\cos(Nr)}{1+r^2}ds.$$

Die geschlossene einfache Kurve C ist dabei in den von den beiden konzentrischen Kreisen

$$(113)\qquad r=\varrho=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right) \text{ und } r=\frac{1}{\varrho}=\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$$

begrenzten Kreisring dergestalt eingeschrieben, daß der Koordinatenanfangspunkt in ihrem Äußeren liegt; sie geht bei der Spiegelung am Kreise

$$r=1$$

in sich selbst über.

Jetzt führen wir den Parameter q ein, der lediglich der Einschränkung

$$q \geqq \varrho - \frac{1}{\varrho} = 2 \operatorname{tg} \alpha \tag{114}$$

unterworfen sei.

Wegen (20) ist

$$\left|\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\right|^{n-2} \frac{\left(r-\frac{1}{r}\right)\cos(Nr)}{1+r^2} \leqq \left|\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\right|^{n-2} \frac{q}{1+r^2} -$$

$$- \left|\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\right|^{n-2} \frac{\sqrt{q^2-\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}}{1+r^2} |\cos(N\varphi)|.$$

Die Einführung dieser Ungleichung in (112) ergibt bei Berücksichtigung von (111) und (17)

$$J \leqq \frac{q}{2(n-1)} L - \frac{1}{2} E_{n-1} \int_C \left|\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\right|^{n-2} \frac{\sqrt{q^2-\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}}{1+r^2} \left|\frac{dr}{ds}\right| ds. \tag{115}$$

Das Gleichheitszeichen gilt hier dann und nur dann, wenn (21) identisch erfüllt ist.

Genau so, wie oben die Gleichung (24) hergeleitet wurde, erhält man jetzt

$$2 \int_{\frac{1}{\varrho}}^{\varrho} \left|\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\right|^{n-2} \frac{\sqrt{q^2-\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}}{1+r^2} dr \tag{116}$$

$$\leqq \int_C \left|\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\right|^{n-2} \frac{\sqrt{q^2-\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}}{1+r^2} \left|\frac{dr}{ds}\right| ds,$$

wobei das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn (25) erfüllt ist. Nun ist, wie die Substitution

$$r = \frac{1}{r'},$$

zeigt,

(117)
$$\int_{\frac{1}{\varrho}}^{1} \left|\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\right|^{n-2} \frac{\sqrt{q^2-\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}}{1+r^2}\,dr = \int_{1}^{\varrho} \left(\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\right)^{n-2} \frac{\sqrt{q^2-\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}}{1+r^2}\,dr.$$

Bei Berücksichtigung dieser Identität ergibt die Einführung von (116) in (115)

$$J \leqq \frac{q}{2(n-1)} L - 2E_{n-1} \int_{1}^{\varrho} \left(\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\right)^{n-2} \frac{\sqrt{q^2-\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}}{1+r^2}\,dr.$$

Durch die Substitution

(118) $$r = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right), \qquad \frac{2\,dr}{1+r^2} = d\beta, \qquad r-\frac{1}{r} = 2\operatorname{tg}\beta, \qquad r+\frac{1}{r} = \frac{2}{\cos\beta}$$

erhält bei Berücksichtigung von (113) die letzte Ungleichung die Form

(119) $$J \leqq \frac{q}{2(n-1)} L - E_{n-1} \int_{0}^{\alpha} \sin^{n-2}\beta \sqrt{q^2-4\operatorname{tg}^2\beta}\,d\beta = \Gamma^{(n)}(L,\alpha,q).$$

Wie oben festgestellt, gilt das Gleichheitszeichen in der isoperimetrischen Ungleichung (119) dann und nur dann, wenn (21) und (25) erfüllt sind.

Spezialisiert man jetzt wie im § 1 unter (30)

$$q = \varrho - \frac{1}{\varrho} = 2\operatorname{tg}\alpha,$$

so ergibt sich

(120) $$J \leqq \frac{1}{n-1} L\operatorname{tg}\alpha - 2E_{n-1} \int_{0}^{\alpha} \sin^{n-2}\beta \sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta}\,d\beta$$
$$= \Gamma^{(n)}(L,\alpha,2\operatorname{tg}\alpha),$$

wobei das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn (21) unter der Spezialisierung (30) und (25) erfüllt sind. Diese Bedingungen sind nun, wie bei der Herleitung von (32) gezeigt worden ist, in der Tat für den Kreis erfüllt, der in den Kreisring zwischen den beiden konzentrischen Kreisen

$$r = \varrho \text{ und } r = \frac{1}{\varrho}$$

dergestalt eingeschrieben ist, daß er den Koordinatenanfangspunkt nicht umschließt. Dieser Kreis ist die stereographische Projektion des auf der

Kugel $K^{(3)}$ mit dem Mittelpunkte auf dem Äquator $\eta = 0$ liegenden Kreises mit dem Radius α. Der Rotation des letzteren um den Äquator als Rotationsachse entspricht auf der Kugel $K^{(n+1)}$ eine Kugel vom Radius α. Bezeichnen also wie oben $\overline{J}^{(n)}(\alpha)$ und $\overline{L}^{(n)}(\alpha)$ das Volumen und den Oberflächeninhalt einer solchen Kugel, so gilt

$$(121) \qquad \overline{J}^{(n)}(\alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{n-1}\overline{L}^{(n)}(\alpha) - 2E_{n-1}\int_0^{\alpha} \sin^{n-2}\beta \sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta}\, d\beta.$$

Aus (120) *und* (121) *folgt die isoperimetrische Ungleichung*

$$(122) \qquad J \leqq \frac{\operatorname{tg}\alpha}{n-1}L - \left(\frac{1}{n-1}\operatorname{tg}\alpha\,\overline{L}^{(n)}(\alpha) - \overline{J}^{(n)}(\alpha)\right) = \Gamma^{(n)}(L, \alpha, 2\operatorname{tg}\alpha).$$

Nun folgt aus (83), (84)

$$(123) \qquad \frac{1}{n-1}\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{J}^{(n)'}(\alpha)}{\overline{L}^{(n)'}(\alpha)},$$

wobei

$$\overline{J}^{(n)'}(\alpha) \quad \text{und} \quad \overline{L}^{(n)'}(\alpha)$$

die Ableitungen von

$$\overline{J}^{(n)}(\alpha) \quad \text{und} \quad \overline{L}^{(n)}(\alpha)$$

nach α bedeuten. Die Einführung von (123), (83), (84) in (122) ergibt *die isoperimetrische Ungleichung in der Gestalt*

$$(124) \quad J \leqq \frac{\overline{J}^{(n)'}(\alpha)}{\overline{L}^{(n)'}(\alpha)}L - \left(\frac{\overline{J}^{(n)'}(\alpha)}{\overline{L}^{(n)'}(\alpha)}\overline{L}^{(n)}(\alpha) - \overline{J}^{(n)}(\alpha)\right)$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha}{n-1}L - nE_n\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{n-1}\sin^{n-1}\alpha - \int_0^{\alpha}\sin^{n-1}\beta\, d\beta\right) = \Gamma^{(n)}(L, \alpha, 2\operatorname{tg}\alpha).$$

Man erhält

$$(125) \qquad \frac{\partial}{\partial\alpha}\Gamma^{(n)}(L, \alpha, 2\operatorname{tg}\alpha) = \frac{L - \overline{L}^{(n)}(\alpha)}{(n-1)\cos^2\alpha} = \frac{L - nE_n\sin^{n-1}\alpha}{(n-1)\cos^2\alpha}.$$

Man definiere nun den Radius α' der Kugel gleichen Oberflächeninhalts durch die Gleichung

$$(126) \qquad L = \overline{L}^{(n)}(\alpha') = nE_n\sin^{n-1}\alpha',$$

wobei wegen (88)

$$0 < \alpha' < \frac{\pi}{2}$$

bleibt. Dann zeigt (125), daß die rechte Seite der Ungleichungen (122), (124) bei festem L mit wachsendem α für

$$\alpha \leqq \alpha'$$

monoton zunimmt und für

$$\alpha \geqq \alpha'$$

monoton abnimmt. Für

$$\alpha = \alpha'$$

erreicht sie also ihr Maximum, welches wie aus (122) unmittelbar hervorgeht, gleich

$$\overline{J}^{(n)}(\alpha')$$

wird. *Aus der isoperimetrischen Ungleichung* (124) *folgt daher a fortiori die gewöhnliche isoperimetrische Ungleichung*

$$J \leqq \overline{J}^{(n)}(\alpha'). \tag{127}$$

In den isoperimetrischen Ungleichungen (122), (124) gilt, wie wiederholt werden darf, das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn (21) unter der Spezialisierung (30) und ferner noch (25) erfüllt sind, also nur für die im § 3 angegebenen Kurven $C_{\mathrm{I},\alpha,\gamma}$, welche auch der jetzt noch hinzugetretenen Forderung genügen, bei der Spiegelung am Kreise

$$r = 1$$

in sich selbst überzugehen. Bezeichnet $\overline{L}_{\mathrm{I}}^{(n)}(\alpha,\gamma)$ den Oberflächeninhalt des der Kurve $C_{\mathrm{I},\alpha,\gamma}$ entsprechenden Rotationskörpers, so folgt aus (111) und (83)

$$\begin{aligned}\overline{L}_{\mathrm{I}}^{(n)}(\alpha,\gamma) &= \overline{L}^{(n)}(\alpha) + (n-1)E_{n-1}\left|\frac{\varrho-\frac{1}{\varrho}}{\varrho+\frac{1}{\varrho}}\right|^{n-2}\frac{1}{1+\varrho^2}\varrho\gamma + \\ &\quad + (n-1)E_{n-1}\left|\frac{\frac{1}{\varrho}-\varrho}{\frac{1}{\varrho}+\varrho}\right|^{n-2}\frac{1}{1+\frac{1}{\varrho^2}}\frac{1}{\varrho}\gamma \\ &= \overline{L}^{(n)}(\alpha) + 2(n-1)E_{n-1}\left(\frac{\varrho-\frac{1}{\varrho}}{\varrho+\frac{1}{\varrho}}\right)^{n-2}\frac{1}{\varrho+\frac{1}{\varrho}}\gamma \\ &= nE_n\sin^{n-1}\alpha + (n-1)E_{n-1}(\sin^{n-2}\alpha\cos\alpha)\gamma.\end{aligned} \tag{128}$$

Zu gegebenem L und α gibt es daher dann und nur dann eine Kurve

$$C_{\mathrm{I},\alpha,\gamma},$$

wenn

$$nE_n\sin^{n-1}\alpha \leqq L \quad \text{oder gleichbedeutend} \quad \alpha \leqq \alpha', \tag{129}$$

ist. Durch die Gleichung

$$nE_n\sin^{n-1}\alpha + (n-1)E_{n-1}(\sin^{n-2}\alpha\cos\alpha)\gamma = L \tag{130}$$

wird dann γ bestimmt, und es gehört daher zu L und α nur eine einzige Kurve

$$C_{\mathrm{I},\alpha\gamma}.$$

Damit diese Kurve $C_{\mathrm{I},\alpha,\gamma}$ sich nicht selbst überschneidet, ist notwendig und hinreichend, daß

(130a) $$\gamma + 2\alpha < 2\pi \quad \text{und mithin} \quad \gamma < 2\pi - 2\alpha$$

ausfällt. Denn es ist, wie bei der Diskussion von (47) gezeigt, vom Koordinatenanfangspunkt aus gesehen der scheinbare Größenwinkel jedes der beiden an den beiden Enden von $C_{\mathrm{I},\alpha,\gamma}$ aufgestülpten Halbkreise gleich α. Die Ungleichungen (130a) sind gemäß (130) gleichbedeutend mit der Ungleichung

(130b) $$F(\alpha) = n E_n \sin^{n-1}\alpha + (n-1) E_{n-1} (\sin^{n-2}\alpha \cos\alpha)(2\pi - 2\alpha) > L.$$

Man erhält für die Ableitung von $F(\alpha)$

$$F'(\alpha) = 2(n-1) E_{n-1} \sin^{n-2}\alpha \cos\alpha \left\{ \frac{n E_n}{2 E_{n-1}} - 1 + (n-2)(\pi-\alpha)\operatorname{cotg}\alpha - (\pi-\alpha)\operatorname{tg}\alpha \right\}.$$

Da der eingeklammerte Ausdruck auf der rechten Seite mit wachsendem α im Quadranten $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ von $+\infty$ bis $= \infty$ monoton abnimmt, so gibt es ein α_2, $(0 < \alpha_2 < \pi_2)$, so daß für

$$0 < \alpha < \alpha_2 \quad F'(\alpha) > 0 \quad \text{und für} \quad \alpha_2 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad F'(\alpha) < 0$$

wird. Mit wachsendem α steigt also $F(\alpha)$ im Intervall $0 \leqq \alpha \leqq \alpha_2$ monoton an, und zwar wegen $n \geqq 3$ von 0 bis $F(\alpha_2)$, während im Intervall $\alpha_2 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ die Funktion von $F(\alpha_2)$ bis $n E_n$ monoton abnimmt. Da nun gemäß (88)

$$L < n E_n$$

ist, so folgt, daß die Gleichung

(130c) $$F(\alpha) = L$$

eine und nur eine Lösung

(130d) $$\alpha = \alpha_1, \quad 0 < \alpha_1 < \frac{\pi}{2}$$

besitzt, und daß für $\alpha > \alpha_1$ die Ungleichungen (130b), (130a) erfüllt sind, während sie für $\alpha \leqq \alpha_1$ nicht gelten. Aus (130c) und (126) folgt endlich

(130e) $$\alpha_1 < \alpha'.$$

Für

$$\alpha = \alpha' \quad \text{wird} \quad \gamma = 0$$

und

$$C_{\mathrm{I},\alpha,\gamma}$$

geht in den Kreis mit dem auf der Kugel K^3 gemessenen Radius α' über.

Damit ist bewiesen, daß für den Fall

$$\alpha_1 < \alpha \leqq \alpha'$$

in den miteinander gleichbedeutenden isoperimetrischen Ungleichungen (122), (124) *die Gleichheit von einem und nur einem Rotationskörper erreicht wird*, nämlich demjenigen, welcher der oben bestimmten Kurve $C_{I,\alpha,\gamma}$ entspricht. *Insbesondere ist damit auch bewiesen, daß in der aus diesen Ungleichungen a fortiori folgenden gewöhnlichen isoperimetrischen Ungleichung* (127) *die Gleichheit nur von der Kugel erreicht wird.*

Für

$$\alpha \leqq \alpha_1$$

kann die Schranke (122), (124) nicht erreicht werden. Daß diese Abschätzung bei kleinen Werten von α nicht genau ist, springt in die Augen. Denn der Rotationskörper muß in demjenigen Rotationskörper enthalten sein, der aus allen Punkten besteht, welche auf der Kugel K^{n+1} gemessen von der Rotationsachse um nicht mehr als α entfernt sind. Der Meridiankurve des letzteren entspricht in unseren Koordinaten (106) der Kreis $v = \varrho$. Sein Volumen ergibt sich gemäß (108) als gleich

$$2\pi E_{n-1} \sin^{n-1}\alpha.$$

Also gilt die von L unabhängige triviale Ungleichung

$$J < 2\pi E_{n-1} \sin^{n-1}\alpha. \tag{130f}$$

Da diese Schranke mit α in $(n-1)$-ter Ordnung verschwindet, während die Schranke (122), (124) in erster Ordnung verschwindet, so ist wegen $n \geqq 3$ bei genügend kleinem α die Abschätzung (130f) in der Tat schärfer als die Abschätzung (122), (124).

Ehe wir uns dem Fall

$$\alpha > \alpha'$$

zuwenden, seien folgende vorbereitende Feststellungen gemacht.

Wegen (84), (85) ist

$$2\overline{J}^{(n-1)}(\alpha) = 2(n-1)E_{n-1}\int_0^{\alpha} \sin^{n-2}\beta\, d\beta < \tag{131}$$

$$< 2(n-1)E_{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}\beta\, d\beta = nE_n.$$

Wegen (88) läßt sich daher ein α_0

$$0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$$

stets so bestimmen, daß

$$2\overline{J}^{(n-1)}(\alpha_0) = L \tag{132}$$

ist.

Nun wollen wir beweisen, daß für jeden Rotationskörper

(133) $$\alpha < \alpha_0$$

bleiben muß.

Beweis. Wegen (111) und $\left|\frac{dr}{ds}\right| \leqq 1$ ist

(134) $$L \geqq (n-1)\, E_{n-1} \int_C \left|\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\right|^{n-2} \frac{1}{1+r^2}\left|\frac{dr}{ds}\right| ds.$$

Nun ist, wenn s_1, s_2, s_3 dieselbe Bedeutung haben wie in (23)

$$\int_{\frac{1}{\varrho}}^{\varrho} \left|\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\right|^{n-2} \frac{1}{1+r^2} dr = \int_{s_1}^{0} \left|\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\right|^{n-2} \frac{1}{1+r^2}\frac{dr}{ds} ds \leqq \int_{0}^{s_1} \left|\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\right|^{n-2} \frac{1}{1+r^2}\left|\frac{dr}{ds}\right| ds,$$

$$\int_{\frac{1}{\varrho}}^{\varrho} \left|\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\right|^{n-2} \frac{1}{1+r^2} dr = \int_{s_2}^{s_3} \left|\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\right|^{n-2} \frac{1}{1+r^2}\frac{dr}{ds} ds \leqq \int_{s_2}^{s_3} \left|\frac{r-\frac{1}{r}}{r-\frac{1}{r}}\right|^{n-2} \frac{1}{1+r^2}\left|\frac{dr}{ds}\right| ds.$$

Die Addition dieser beiden Ungleichungen ergibt

(135) $$4\int_1^{\varrho} \left(\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\right)^{n-2} \frac{1}{1+r^2} dr = 2\int_{\frac{1}{\varrho}}^{\varrho} \left|\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\right|^{n-2} \frac{1}{1+r^2} dr \leqq$$

$$\leqq \int_C \left|\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\right|^{n-2} \frac{1}{1+r^2}\left|\frac{dr}{ds}\right| ds.$$

Aus (134) und (135) folgt

$$L \geqq 4\,(n-1)\, E_{n-1} \int_1^{\varrho} \left(\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\right)^{n-2} \frac{1}{1+r^2} dr$$

und hieraus ergibt die Substitution (118) bei Berücksichtigung von (131)

$$L \geqq 2\,\overline{J}^{(n-1)}(\alpha). \tag{136}$$

Das Gleichheitszeichen in dieser letzten Ungleichung würde wegen (111), (134) fordern, daß

$$\frac{dr}{ds} \equiv 1, \quad \text{also} \quad \frac{d\varphi}{ds} \equiv 0$$

bleibt, was bei einer geschlossenen einfachen Kurve unmöglich ist. Damit ist (133) bewiesen.

Es sei jetzt

$$q > \varrho - \frac{1}{\varrho} = 2\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Dann gilt in der isoperimetrischen Ungleichung (119) das Gleichheitszeichen nur für die im § 2 angegebenen Kurven $C_{\mathrm{II},\alpha q}$. Es mögen

$$\overline{J}_{\mathrm{II}}^{(n)}(\alpha, q) \quad \text{und} \quad \overline{L}_{\mathrm{II}}^{(n)}(\alpha, q)$$

Volumen und Oberfläche des entsprechenden Rotationskörpers auf $K^{(n+1}$ bezeichnen. Da $C_{\mathrm{II},\alpha,q}$ für

$$q = \varrho - \frac{1}{\varrho} = 2\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

in den Kreis mit dem auf der Kugel $K^{(3)}$ gemessenen Radius α übergeht, so hat man zunächst wegen (83), (84)

$$\overline{L}_{\mathrm{II}}^{(n)}(\alpha, 2\,\mathrm{tg}\,\alpha) = n\,E_n \sin^{n-1}\alpha, \qquad \overline{J}_{\mathrm{II}}^{(n)}(\alpha, 2\,\mathrm{tg}\,\alpha) = n\,E_n \int_0^{\alpha} \sin^{n-1}\beta\, d\beta. \tag{137}$$

Gemäß (112), (21), (50) erhält man ferner

$$\overline{J}_{\mathrm{II}}^{(n)}(\alpha, q) = \frac{1}{2}\,E_{n-1} \int_{C_{\mathrm{II},\alpha,q}} \left|\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\right|^{n-2} \frac{\left(r-\frac{1}{r}\right)\cos(Nr)}{1+r^2}\,ds$$

$$= \frac{1}{2}\,E_{n-1} \int_{C_{\mathrm{II},\alpha,q}} \left|\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\right|^{n-2} \frac{\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}{q\,(1+r^2)}\,ds$$

$$= E_{n-1} \int_{\frac{1}{\varrho}}^{\varrho} \left|\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\right|^{n-2} \frac{\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}{(1+r^2)\sqrt{q^2-\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}}\,dr$$

$$= 2\,E_{n-1} \int_1^{\varrho} \left(\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\right)^{n-2} \frac{\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}{(1+r^2)\sqrt{q^2-\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}}\,dr.$$

Durch die Substitution (118) ergibt sich hieraus

$$\overline{J}_{\mathrm{II}}^{(n)}(\alpha, q) = 4 E_{n-1} \int_0^{\alpha} \frac{\sin^{n-2}\beta \operatorname{tg}^2\beta}{\sqrt{q^2 - 4\operatorname{tg}^2\beta}} d\beta. \tag{138}$$

Ebenso erhält man gemäß (111), (21), (50)

$$\overline{L}_{\mathrm{II}}^{(n)}(\alpha, q) = (n-1) E_{n-1} \int_{C_{\mathrm{II},\alpha,q}} \left| \frac{r - \frac{1}{r}}{r + \frac{1}{r}} \right|^{n-2} \frac{ds}{1+r^2}$$

$$= 2(n-1) E_{n-1} \int_{\frac{1}{\varrho}}^{\varrho} \left| \frac{r - \frac{1}{r}}{r + \frac{1}{r}} \right|^{n-2} \frac{q}{(1+r^2)\sqrt{q^2 - \left(r - \frac{1}{r}\right)^2}} dr$$

$$= 4(n-1) E_{n-1} \int_1^{\varrho} \left(\frac{r - \frac{1}{r}}{r + \frac{1}{r}} \right)^{n-2} \frac{q}{(1+r^2)\sqrt{q^2 - \left(r - \frac{1}{r}\right)^2}} dr.$$

Durch die Substitution (118) ergibt sich hieraus

$$\overline{L}_{\mathrm{II}}^{(n)}(\alpha, q) = 2(n-1) E_{n-1} \int_0^{\alpha} \frac{\sin^{n-2}\beta}{\sqrt{1 - \frac{4\operatorname{tg}^2\beta}{q^2}}} d\beta. \tag{139}$$

Aus den Darstellungen (138), (139) geht hervor, daß

$$\overline{J}_{\mathrm{II}}^{(n)}(\alpha, q) \quad \text{und} \quad \overline{L}_{\mathrm{II}}^{(n)}(\alpha, q)$$

bei festem α mit wachsendem q monoton abnehmen und bei festem q mit wachsendem α monoton zunehmen. Man erhält bei Berücksichtigung von (84)

$$\lim_{q \to \infty} J_{\mathrm{II}}^{(n)}(\alpha\ q) = 0, \quad \lim_{q \to \infty} L_{\mathrm{II}}^{(n)}(\alpha, q) = 2\overline{J}^{(n-1)}(\alpha). \tag{140}$$

Zu gegebenem L und α gibt es also dann und nur dann eine Kurve $C_{\mathrm{II},\alpha,q}$, wenn die Gleichung

$$\overline{L}_{\mathrm{II}}^{(n)}(\alpha, q) = L \tag{141}$$

eine Lösung

$$q = q_n^*(L, \alpha)$$

besitzt. Da gemäß (133)

$$2\overline{J}^{(n-1)}(\alpha) < L$$

bleiben muß, und die linke Seite von (141), wie eben festgestellt, bei festem α mit wachsendem q monoton abnimmt, so folgt aus (137) und (140), daß die Gleichung (141) dann und nur dann eine Lösung hat, wenn

$$n E_n \sin^{n-1}\alpha \geqq L \quad \text{oder gleichbedeutend} \quad \alpha \geqq \alpha' \tag{142}$$

ist, wobei α' wie oben durch die Gleichung (126) definiert ist. Die Gleichung hat dann stets nur eine einzige Lösung. Für

$$\alpha = \alpha'$$

erhält man wegen (137), (126)

(143) $$q_n^*(L, \alpha') = 2 \operatorname{tg} \alpha'.$$

Für

$$\alpha > \alpha'$$

ist wegen (137), (126)

(144) $$q_n^*(L, \alpha) > 2 \operatorname{tg} \alpha.$$

Da ferner, wie wiederholt werden darf,

$$\overline{L}_{\mathrm{II}}^{(n)}(\alpha, q)$$

bei festem q mit wachsendem α monoton zunimmt, so nimmt auch

$$q_n^*(L, \alpha)$$

bei festem L mit wachsendem α monoton zu. Aus (139), (131), (132) folgt leicht

(145) $$\lim_{\alpha \to \alpha_0} q_n^*(L, \alpha) = \infty$$

und mithin wegen (138)

(146) $$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \overline{J}_{\mathrm{II}}^{(n)}(\alpha, q_n^*(L, \alpha)) = 0.$$

Da, wie bewiesen, in der isoperimetrischen Ungleichung (119) für

(147) $$q = q_n^* \text{ die Kurve } C_{\mathrm{II}, \alpha, q_n^*}$$

die Gleichheit erreicht, so ist

(148) $$\overline{J}_{\mathrm{II}}^{(n)}(\alpha, q_n^*(L, \alpha)) = \Gamma^{(n)}(L, \alpha, q_n^*(L, \alpha)).$$

Die Ungleichung (119) gilt aber für jedes $q \geqq 2 \operatorname{tg} \alpha$. Also ist auch für jedes

(149) $$q \geqq 2 \operatorname{tg} \alpha \qquad \overline{J}_{\mathrm{II}}^{(n)}(\alpha, q_n^*(L, \alpha)) \leqq \Gamma^{(n)}(L, \alpha, q).$$

Hier ist aber nach den obigen Feststellungen das Gleichheitszeichen für $q \neq q_n^*$ ausgeschlossen. Also ist für

(150) $$q \neq q_n^*(L, \alpha) \qquad \Gamma^{(n)}(L, \alpha, q_n^*(L, \alpha)) < \Gamma^{(n)}(L, \alpha, q).$$

Insbesondere ist also wegen (144) für

(151) $$\alpha > \alpha' \qquad \Gamma^{(n)}(L, \alpha, q_n^*(L, \alpha)) < \Gamma^{(n)}(L, \alpha, 2 \operatorname{tg} \alpha).$$

Die aus (119) *für*

$$q = q_n^*(L, \alpha)$$

hervorgehende isoperimetrische Ungleichung

(152) $$J \leqq \Gamma^{(n)}(L, \alpha, q_n^*(L, \alpha))$$

liefert also in der Tat für

$$\alpha > \alpha'$$

eine schärfere Schranke als die miteinander gleichbedeutenden isoperimetrischen Ungleichungen (122), (124).

Jetzt soll noch der Verlauf von

$$\Gamma^{(n)}\left(L, \alpha, q_n^*(L, \alpha)\right)$$

als Funktion von L und α diskutiert werden.

Es ist

$$\frac{\partial}{\partial L}\Gamma^{(n)}\left(L, \alpha, q_n^*(L, \alpha)\right) = \Gamma_L^{(n)}(L, \alpha, q_n^*) + \Gamma_q^{(n)}(L, \alpha, q_n^*)\frac{\partial q_n^*(L, \alpha)}{\partial L},$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\Gamma^{(n)}\left(L, \alpha, q_n^*(L, \alpha)\right) = \Gamma_\alpha^{(n)}(L, \alpha, q_n^*) + \Gamma_q^{(n)}(L, \alpha, q_n^*)\frac{\partial q_n^*(L, \alpha)}{\partial \alpha}.$$

Nun ist wegen (119)

$$\Gamma_L^{(n)}(L, \alpha, q_n^*) = \frac{q_n^*}{2(n-1)}, \tag{153}$$

$$\Gamma_\alpha^{(n)}(L, \alpha, q_n^*) = -E_{n-1}\sin^{n-2}\alpha\sqrt{q_n^{*2} - 4\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Ferner ist wegen (144) für

$$\alpha > \alpha' \qquad q_n^* > 2\operatorname{tg}\alpha$$

und mithin wegen (150)

$$\Gamma_q^{(n)}(L, \alpha, q_n^*) = 0, \tag{154}$$

während wegen (141), (139), (144) q^* nach L und α differenzierbar bleibt. Also ist für $\alpha > \alpha'$

$$\frac{\partial}{\partial L}\Gamma^{(n)}\left(L, \alpha, q_n^*(L, \alpha)\right) = \frac{q_n^*(L, \alpha)}{2(n-1)}, \tag{155}$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}\Gamma^{(n)}\left(L, \alpha, q_n^*(L, \alpha)\right) = -E_{n-1}\sin^{n-2}\alpha\sqrt{q_n^{*2}(L, \alpha) - 4\operatorname{tg}^2\alpha}. \tag{156}$$

Ferner ist wegen (148), (146)

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0}\Gamma^{(n)}\left(L, \alpha, q_n^*(L, \alpha)\right) = 0 \tag{157}$$

und wegen (143), (148), (137), (84)

$$\Gamma^{(n)}\left(L, \alpha', q_n^*(L, \alpha')\right) = \Gamma^{(n)}(L, \alpha', 2\operatorname{tg}\alpha') = \overline{J}_{\mathrm{II}}^{(n)}(\alpha', 2\operatorname{tg}\alpha') \tag{158}$$

$$= \overline{J}^{(n)}(\alpha') = n E_n \int_0^{\alpha'} \sin^{n-1}\beta\, d\beta.$$

Man definiere nun bei Berücksichtigung von (124) die Funktion

$$G^{(n)}(L, \alpha)$$

durch die Gleichungen

$$(159)\quad \begin{cases} \text{für } \alpha \leqq \alpha' \quad G^{(n)}(L, \alpha) = \Gamma^{(n)}(L, \alpha, 2\operatorname{tg}\alpha) \\ \qquad\qquad = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{n-1}L - n E_n\left(\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{n-1}\sin^{n-1}\alpha - \displaystyle\int_0^{\alpha}\sin^{n-1}\beta\, d\beta\right), \\ \text{für } \alpha > \alpha' \quad G^{(n)}(L, \alpha) = \Gamma^{(n)}\left(L, \alpha, q_n^*(L, \alpha)\right). \end{cases}$$

Wie (158), (159), (126) zeigen, bleibt die Funktion

$$G^{(n)}(L, \alpha)$$

auch an der „Nahtstelle“

$$\alpha = \alpha'$$

stetig, und zwar erhält man

$$G^{(n)}(L, \alpha') = \bar{J}^{(n)}(\alpha') = n E_n \int_0^{\alpha'} \sin^{n-1} \beta \, d\beta. \tag{160}$$

Auch die ersten Ableitungen der Funktion nach L und α bleiben an dieser Stelle stetig. Man erhält wegen (155), (143), (159)

$$G_L^{(n)}(L, \alpha') = \frac{\operatorname{tg} \alpha'}{n-1} \tag{161}$$

und wegen (125), (156), (143)

$$G_\alpha^{(n)}(L, \alpha') = 0. \tag{162}$$

Ferner lassen die Gleichungen (125), (156), (144) erkennen, daß die Funktion

$$G^{(n)}(L, \alpha)$$

mit wachsendem α für

$$\alpha \leqq \alpha'$$

monoton zunimmt, für

$$\alpha \geqq \alpha'$$

monoton abnimmt und gemäß (157) mit $\alpha_0 - \alpha$ gegen Null konvergiert.

Nun gilt für alle bei gegebenem L überhaupt möglichen Werte von α, d. h. *für*

$$0 < \alpha < \alpha_0$$

die isoperimetrische Ungleichung

$$J \leqq G^{(n)}(L, \alpha), \tag{163}$$

in welcher die Gleichheit für $\alpha > \alpha_1$ *von einem und nur einem Rotationskörper erreicht wird.*

Jetzt wollen wir noch den Beweis dafür nachholen, daß die Voraussetzung (88), d. h. die Voraussetzung

$$L < n E_n \tag{164}$$

die Möglichkeit ausschließt, daß die Meridiankurve $M_{K^{(3)}}$ durch den Nordpol

$$\eta = 1, \quad \xi_n = 0, \quad \xi_{n+1} = 0$$

hindurchgeht.

Beweis. Wir führen den Beweis indirekt und machen also die Annahme, daß der Nordpol auf $M_{K^{(3)}}$ liegt. Dann projiziere man, wie oben durchgeführt, die Kugel $K^{(3)}$ von diesem Punkte aus stereographisch auf die Ebene

$$\eta = 0.$$

Da voraussetzungsgemäß $M_{K^{(3)}}$ durch den Nordpol der Projektion hindurchgeht, den Äquator in zwei und nur zwei verschiedenen Punkten A_1 und A_2 schneidet und ganz auf der nördlichen Halbkugel verläuft, so besteht das stereographische Bild von M_{K^3} aus zwei Kurvenästen C_1' und C_2', die von A_1 und A_2 ausgehen, außerhalb des Kreises

$$r = 1$$

verlaufen und sich nur im unendlich fernen Punkt der Ebene

$$\eta = 0$$

schneiden. Für den Oberflächeninhalt L des entsprechenden Rotationskörpers erhält man gemäß (107)

$$(165)\quad L = 2(n-1)E_{n-1}\left\{\int_{C_1'}\left(\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\right)^{n-2}\frac{1}{1+r^2}\,ds + \int_{C_2'}\left(\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\right)^{n-2}\frac{1}{1+r^2}\,ds\right\}.$$

Mißt man nun auf C_1' und C_2' die Bogenlänge von A_1 und A_2 ab, so erhält man

$$(166)\quad \int_{C_1'}\left(\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\right)^{n-2}\frac{1}{1+r^2}\,ds \geqq \int_{C_1'}\left(\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\right)^{n-2}\frac{1}{1+r^2}\frac{dr}{ds}\,ds = \int_1^\infty\left(\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\right)^{n-2}\frac{1}{1+r^2}\,dr.$$

Durch die Substitution (118) folgt hieraus

$$(167)\quad \int_{C_1'}\left(\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\right)^{n-2}\frac{1}{1+r^2}\,ds \geqq \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}\beta\,d\beta.$$

Ebenso erhält man

$$(168)\quad \int_{C_2'}\left(\frac{r-\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r}}\right)^{n-2}\frac{1}{1+r^2}\,ds \geqq \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}\beta\,d\beta.$$

Die Einführung von (167), (168) in (165) ergibt bei Berücksichtigung von (85)

$$L \geqq nE_n \tag{169}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung (88), w. z. b. w.

Das Gleichheitszeichen in (169) fordert das Gleichheitszeichen (168), (167), (166) und damit das Bestehen der Gleichungen

$$\frac{dr}{ds} \equiv 1, \quad \frac{d\varphi}{ds} \equiv 0$$

längs der Kurven C_1' und C_2'. Daraus folgt:

Ist

$$L = nE_n \tag{170}$$

und liegt der Punkt

$$\eta = 1, \quad \xi_n = 0, \quad \xi_{n+1} = 0$$

auf $M_{K^{(3)}}$, so besteht $M_{K^{(3)}}$ aus zwei von diesem Punkte ausgehenden Quadranten größter Kreise der Kugel $K^{(3)}$.

Jetzt wenden wir uns dem bisher voraussetzungsgemäß ausgeschlossenen Fall der isoperimetrischen Aufgabe zu, daß $K^{(n+1)}$ durch eine Rotationskörperoberfläche möglichst geringen Oberflächeninhalts in zwei Gebiete *gleichen* Inhalts zerlegt werden soll. Für den Inhalt J jedes der beiden Gebiete müßte dann also gelten

$$J = \frac{n+1}{2} E_{n+1}. \tag{171}$$

Jetzt kann (88) nicht bestehen. Denn anderenfalls würde für den Inhalt J des einen der beiden Gebiete gemäß (127) gelten

$$J \leqq \bar{J}^{(n)}(\alpha'),$$

wobei wegen (126) und (88)

$$\alpha' < \frac{\pi}{2}$$

ausfiele. Daraus würde aber gemäß (84), (85)

$$J < \frac{n+1}{2} E_{n+1}$$

folgen im Widerspruch zur Voraussetzung (171). Es muß also mindestens (170) gelten.

Wir wollen jetzt zeigen, daß, wenn (171) und (170) bestehen sollen, $M_{K^{(3)}}$ durch den Nordpol

$$\eta = 1, \quad \xi_n = 0, \quad \xi_{n+1} = 0$$

hindurchgehen muß. Wäre das nämlich nicht der Fall, oder mit anderen Worten, wäre

$$\alpha < \frac{\pi}{2}, \tag{172}$$

so müßte, da nur in Gestalt dieser Konsequenz die Voraussetzung (88) bei der Herleitung der isoperimetrischen Ungleichung (124) benutzt worden ist, (124) gelten, d. h.

$$J \leqq \frac{\operatorname{tg}\alpha}{n-1} L - n E_n \Big(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{n-1} \sin^{n-1}\alpha - \int_0^\alpha \sin^{n-1}\beta \, d\beta \Big),$$

also wegen (170)

$$J \leqq n E_n \Big\{ \frac{\operatorname{tg}\alpha}{n-1} (1 - \sin^{n-1}\alpha) + \int_0^\alpha \sin^{n-1}\beta \, d\beta \Big\} = \Phi(\alpha). \tag{173}$$

Nun ist gemäß (125)

$$\frac{d\Phi(\alpha)}{d\alpha} = n E_n \frac{1 - \sin^{n-1}\alpha}{(n-1)\cos^2\alpha} > 0. \tag{174}$$

Ferner ist

$$\operatorname{tg}\alpha (1 - \sin^{n-1}\alpha) = \sum_1^{n-1} \sin^\nu \alpha \frac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha} = \sum_1^{n-1} \sin^\nu \alpha \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$$

$$= \Big(\sum_1^{n-1} \sin^\nu \alpha \Big) \operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \Big)$$

und mithin

$$\operatorname*{Lim}_{\alpha \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}\alpha (1 - \sin^{n-1}\alpha) = 0.$$

Hieraus folgt bei Berücksichtigung von (85)

$$\operatorname*{Lim}_{\alpha \to \frac{\pi}{2}} \Phi(\alpha) = n E_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}\beta \, d\beta = \frac{n+1}{2} E_{n+1}. \tag{175}$$

Gemäß (172), (174), (175) ist daher

$$\Phi(\alpha) < \frac{n+1}{2} E_{n+1},$$

was wegen (173) im Widerspruch zur Voraussetzung (171) steht.

Damit ist also der zu führende Beweis dafür erbracht, daß der Nordpol

$$\eta = 1, \qquad \xi_n = 0, \qquad \xi_{n+1} = 0$$

auf der Meridiankurve $M_{K^{(3)}}$ liegen muß.

In diesem Falle kann aber, wie oben festgestellt, die Gleichung (170) nur dann bestehen, wenn $M_{K^{(3)}}$ aus zwei vom Nordpol ausgehenden Quadranten größter Kreise der Kugel $K^{(3)}$ zusammengesetzt ist.

Es mögen nun die beiden Quadranten den Äquator

$$\eta = 0$$

in den beiden Punkten

$$\xi_n = \cos\lambda_1, \ \xi_{n+1} = \sin\lambda_1; \ \xi_n = \cos\lambda_2, \ \xi_{n+1} = \sin\lambda_2, \quad 0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < 2\pi$$

schneiden. Dann beschreibt der eine Quadrant bei der Rotation um die Rotationsachse

$$\xi_\mu = 0, \qquad \mu = 1, 2, \ldots, n-1$$

auf $K^{(n+1)}$ das aus allen den Punkten bestehende Gebilde, für welche

$$\lambda = \lambda_1$$

ist, wobei λ definiert ist durch die Gleichungen

$$\xi_n = t\cos\lambda, \qquad \xi_{n+1} = t\sin\lambda, \qquad t \geqq 0.$$

Dem anderen Quadranten entspricht bei der Rotation dasjenige Gebilde auf $K^{(n+1)}$, das aus allen Punkten besteht, für welche

$$\lambda = \lambda_2$$

ist. Sollen also die beiden Gebiete, in welche die Oberfläche $K^{(n+1)}$ durch die Zusammensetzung dieser beiden Gebilde zerlegt wird, gleichen Inhalt haben, so muß

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \pi$$

sein. Dann besteht $M_{K^{(3)}}$ aus einem halben größten Kreise von $K^{(3)}$, der durch den Nordpol in zwei Quadranten geteilt wird. Bei der Rotation der Meridiankurve $M_{K^{(3)}}$ um die Rotationsachse

$$\xi_\mu = 0, \qquad \mu = 1, 2, \ldots, n-1$$

wird dann auf $K^{(n+1)}$ das Schnittgebilde von $K^{(n+1)}$ mit der n-dimensionalen Ebene

$$\sin\lambda_1\,\xi_n - \cos\lambda_1\,\xi_{n+1} = 0$$

erzeugt, d. h. also die Oberfläche einer n-dimensionalen Euklidischen Einheitskugel. Diese Kugel kann, wie bei der Herleitung der Formel (83) erörtert, auch aufgefaßt werden als Oberfläche einer im n-dimensionalen, auf $K^{(n+1)}$

ausgebreitetem sphärischem Raum gelegenen n-dimensionalen Kugel mit dem sphärischen Radius $\frac{\pi}{2}$, deren Mittelpunkt die Koordinaten

$$\xi_n = \sin\lambda_1, \quad \xi_{n+1} = -\cos\lambda_1, \quad \xi_\mu = 0, \qquad \mu = 1, 2, \ldots, n-1$$

oder natürlich auch

$$\xi_n = -\sin\lambda_1, \quad \xi_{n+1} = \cos\lambda_1, \quad \xi_\mu = 0 \qquad \mu = 1, 2, \ldots, n-1$$

besitzt.

Damit ist jetzt auch der Fall

$$J = \frac{(n+1)}{2} E_{n+1}$$

erledigt mit dem Ergebnis, daß für diesen Fall

$$L \geqq nE_n$$

sein muß, wobei das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn die Oberfläche des Rotationskörpers durch den Schnitt einer n-dimensionalen durch den Mittelpunkt von $K^{(n+1)}$ gehenden Ebene mit dem auf $K^{(n+1)}$ ausgebreitetem sphärischen Raum gegeben wird.

(Eingegangen am 19. April 1940.)